

ΣΕΜΦΕ Μαθηματική Ανάλυση III

Επαναληπτική Εξέταση 2007-2008

ΟΜΑΔΑ Β

**ΘΕΜΑ 1** Α. Εστω  $f$ ,  $C^1$  πραγματική συνάρτηση στο  $R = [a, b] \times [c, d]$ . Αποδείξτε ότι:

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) dx$$

υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα:  $\frac{d}{dy} \int_c^y \left( \int_a^b \frac{\partial}{\partial z} f(x, z) dx \right) dz$  με δύο τρόπους: χρησιμοποιώντας το

Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού λογισμού και εναλλακτικά με χρήση του Θεωρήματος του Fubini.

**Β.** Χρησιμοποιείστε το ερώτημα Α για να υπολογίσετε την  $F'(l)$  όπου  $F(y) = \int_0^l e^{-(x-y)^2} dx$ ,  $y \in [0, 2]$ .  
(Μονάδες 2)

**ΘΕΜΑ 2:** Α) Δίνεται η καμπύλη  $c = OABO$  όπου  $O(0,0)$ ,  $A(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ,  $B(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  που αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα  $OA$ ,  $BO$  και το τόξο  $\widehat{AB}$  κύκλου με κέντρο το  $O$  και ακτίνα 1.

**Β.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Green και με εφαρμογή του να αποδείξετε ότι  $I = \oint_C F \cdot dr = 0$ , όπου  
+ 6x<sup>2</sup> - 4x + 1  
 $c$  είναι η δοθείσα κλειστή καμπύλη και  $F = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)$ .

**Γ.** Να εξετάσετε αν το πεδίο  $F$  έχει τα επικαμπύλα ολοκληρώματα του ανεξάρτητα του δρόμου.  
**Β)** Σχεδιάστε το χωρίο ολοκλήρωσης και υπολογίστε το παρακάτω ολοκλήρωμα, αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης:  $\int_0^1 \int_{1-y}^{1+y} xy dx dy$ .

(Μονάδες 3)

**Δ)** **ΘΕΜΑ 3:** Εστω  $\Omega$  το χωρίο που περιορίζεται από τις επιφάνειες  $z = 6 - x^2 - y^2$ ,  $z = x^2 + y^2$ .

1. Να σχεδιάσετε το χωρίο και να υπολογίσετε τον δύκο  $V$  του χωρίου.
2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Gauss υποστηρίζοντας τη διατύπωση και με ένα σχήμα.
3. Χρησιμοποιώντας το διανυσματικό πεδίο  $F = (x + yz, 2y - x, z - xy)$ , το θεώρημα Gauss και το αποτέλεσμα του ερωτήματος 1 (αν δεν το έχετε υπολογίσει υποθέστε ότι είναι ένας αριθμός  $V$ ) να βρείτε την τιμή του επιφανειακού ολοκληρώματος  $I = \iint_{\Omega} F \cdot ds$ .

(Μονάδες 2,5)

**ΕΠΙΠΛΟΝ ΘΕΜΑ 4.** Α) Δείξτε ότι αν η καμπύλη  $r(t)$  είναι γραμμή ροής του ενός αστροβήλου πεδίου  $F$  (δηλαδή  $F(r(t)) = r'(t)$ ), τότε η συνάρτηση  $f(t) = \Phi(r(t))$  όπου  $\Phi(x, y, z)$  η συνάρτηση δυναμικού του  $F$ , είναι αύξουσα συνάρτηση του  $t$ . Δώστε μια φυσική ερμηνεία.

**Β)** Δίνεται το διανυσματικό πεδίο  $F(x, y, z) = (2x + \cos y, y - ax \sin y, 3)$ .  
 1. Δείξτε ότι είναι αστροβήλο για  $a=1$ .  
 2. Προσδιορίστε ένα βαθμωτό δυναμικό  $\Phi(x, y, z)$  του πεδίου  $F$  όταν  $a=1$ .  
 3. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα  $\int F \cdot dr$  κατά μήκος της καμπύλης  $c(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

(Μονάδες 2,5)