



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
 Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών  
 Επιστημών  
 ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ  
 ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ.....

1.(α) Να υπολογιστεί το Γ.Ο  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + \alpha^2)(x^2 + \beta^2)}$ , όπου  $\alpha, \beta \neq 0$  και  $\alpha \neq \beta$ .

μυσικά  
ελάχιστη

(β) Έστω  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  σταθερό διάνυσμα του  $\mathbb{R}^3$  και το διάνυσμα  $r = (x, y, z)$ . Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης  $\text{div}[r(\alpha \cdot r)] - 4(\alpha \cdot r)$ , όπου  $\alpha \cdot r$  είναι το εσωτερικό γινόμενο των  $\alpha, r$ .

2. (α) Να υπολογιστούν τα πολυώνυμα Taylor βαθμού ένα και δύο της συνάρτησης  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  στο σημείο (1,1).

(β) Να βρεθεί η κλίση (gradient) στο  $\mathbb{R}^2$  της συνάρτησης

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

3. (α) Να εξεταστεί αν η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

είναι διαφορίσιμη στο (0,0). Στη συνέχεια να υπολογιστεί η παράγωγος κατά κατεύθυνση της  $f$  στο σημείο (1,1) προς την κατεύθυνση  $u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

προς το μοναδικό

(β) Να βρεθούν και να ταξινομηθούν τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης  $f(x, y) = x^2 y - y$ .

4. (α) Έστω συνάρτηση  $F = (P, Q, R): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  με μερικές παραγώγους δευτέρας τάξεως συνεχείς. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\nabla \times (\nabla \times F) + \nabla^2 F - \nabla(\nabla \cdot F),$$

όπου  $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ ,  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ ,  $\nabla^2 F = (\nabla^2 P, \nabla^2 Q, \nabla^2 R)$ ,

$$\nabla \cdot F = \text{div} F, \nabla \times F = \text{rot} F.$$

(β) Δίδεται η επιφάνεια  $S$  με εξίσωση  $x^2 + 2y^2 + z^2 = 2$ . Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της  $S$  στο σημείο  $P(1,0,1)$  και ένα κάθετο διάνυσμα της  $S$  στο σημείο αυτό.

το P είναι στην S?

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες  
 Καλή επιτυχία