

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
Συναρτησιακή Ανάλυση

29-08-2008

πρόσκλησης

για την απόβλεψη

Θέμα 1. (α) (i) Δώστε τον ορισμό του χυρτού συνόλου ενός διανυσματικού χώρου και δείξτε ότι για κάθε χυρτό υποσύνολο K ενός χώρου με νόρμα X , η κλειστότητα \bar{K} του K είναι επίσης χυρτό σύνολο.

(ii) Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Δείξτε ότι για κάθε $x_0 \in X$ και $R > 0$ η κλειστή μπάλα $B[x_0, R] = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq R\}$ είναι χυρτό σύνολο. ~~παραδειγματικός χωρίς παρατητικός~~

(β) Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ χώροι με νόρμα, και $T : X \rightarrow Y$ γραμμικός τελεστής.

(i) Αν $0_Y \in (T[B[0_X, 1]])^\circ$, δείξτε ότι ο T είναι επί. ~~υποκλίνεται επί τα τηλεοπτικά~~ για χώρο

(ii) Αν για κάθε $x \in X$ με $\|x\|_X = 1$ ισχύει ότι $\|T(x)\|_Y = 1$ δείξτε ότι ο T είναι $1 - 1$. ~~ισομετρία~~

Θέμα 2. (α) (i) Δείξτε ότι ο $c_{00}(\mathbb{N})$ είναι πυκνός υπόχωρος του $\ell_1(\mathbb{N})$. ~~νικηφόρος για $c_{00}(\mathbb{N})$~~

(ii) Δείξτε ότι το σύνολο

$$D = \{(q_1, \dots, q_n, 0, 0, \dots) : q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$$

είναι πυκνό υποσύνολο των χώρων $(c_{00}(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1)$ και $\ell_1(\mathbb{N})$.

(β) Έστω X χώρος με νόρμα και Y υπόχωρος του X . Έστω $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 - x_2 \in Y$.

(i) Δείξτε ότι $\{x_1 - y : y \in Y\} = \{x_2 - y : y \in Y\}$. ~~Άγει γραμμικός χώρος για $x_1 - y = x_2 - y$~~

(ii) Χρησιμοποιώντας το (i) δείξτε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $\rho(\lambda x_1, Y) = \rho(\lambda x_2, Y)$.

Θέμα 3. (α) Θέτουμε $c = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ συγκλίνουσα ακολουθία στο } \mathbb{R}\}$, με τη νόρμα $\|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$. ~~παραδειγματικός χωρίς παρατητικός~~

(i) Δείξτε ότι ο c_0 είναι υπερεπίπεδο του c . ~~παραδειγματικός χωρίς παρατητικός~~

(ii) Δείξτε ότι $\rho((1, 1, 1, \dots), c_0) = 1$ και ότι για κάθε $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c$, ισχύει $\rho((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, c_0) = |\lim a_n|$.

(β) Έστω $\{t_n : n \in \mathbb{N}\}$ υποσύνολο του $[0, 1]$ και έστω $T : (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \ell_\infty$ με $T(f) = (f(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ για κάθε $f \in C[0, 1]$.

(i) Δείξτε ότι ο T είναι γραμμικός και φραγμένος και υπολογίστε την νόρμα $\|T\|$ του T .

(ii) Δείξτε ότι αν ο T είναι $1-1$ τότε το $\{t_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $[0, 1]$.

(iii) Δείξτε ότι αν το $\{t_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό υποσύνολο του $[0, 1]$ τότε ο T είναι ισομετρία.

Θέμα 4. (α) Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα.

(i) Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $(x_n)_n$ στον X με $\|x_n\| = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\forall n \neq m, \|x_n - x_m\| > \frac{1}{2}$.

(ii) Δείξτε ότι η μοναδιαία μπάλα του X δεν είναι συμπαγής.

(β) Έστω X χώρος με νόρμα και x_1, \dots, x_n γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του X .

(i) Δείξτε ότι για κάθε $i = 1, \dots, n$ υπάρχει $x_i^* \in X^*$, ώστε $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$ για κάθε $j = 1, \dots, n$.

(ii) Θέτουμε $Y = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ και ορίζουμε $P : X \rightarrow Y$ με $P(x) = \sum_{i=1}^n x_i^*(x)x_i$ για κάθε $x \in X$. Δείξτε τα εξής: (1) Η P είναι γραμμική και συνεχής. (2) Η P είναι προβολή στον Y .