ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.

(1) Έστω X B-χώρος. Δείξτε ότι άν η $\{x_n\}_{n\geq 1}$ είναι Cauchy και $x_n \xrightarrow{w} 0$, τότε $x_n \to 0$.

(2) Έστω H χώρος Hilbert και $x_n \xrightarrow{w} x$, $\|x_n\| \to \|x\|$. Δείξτε ότι $x_n \to x$.

(3) Έστω X ανακλαστικό χώρος Banach, $C \subseteq X$ μη κενό, κυρτό κλειστό και $y \in X \setminus C$. Δείξτε ότι υπάρχει $c_0 \in C$ τ.ω $\|y - c_0\| = d(y, C)$. Έπισης δείξτε ότι τό αποτέλεσμα παύει να ισχύει άν C δέν είναι κυρτό.

(4) Δείξτε ότι ό χώρος Banach $X = \ell^\infty$ δέν είναι δεν είναι διαχωρίσιμο

(5) Έστω $f : \ell^1 \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sum_{k\geq 1} x_k$ $\forall\, x = (x_k)_{k\geq 1} \in \ell^1$. Δείξτε ότι ό f είναι συνεχι άλλα όχι w^*-συνεχης (θυμίζω ότι $\ell^1 = c_0^*$).

(6) Δείξτε ότι καθε w-συμπαγες συνολο σ' ενα χωρο Banach, είναι φραγμενο.

(7) Έστω X, Y B-χωροι και $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ τ.ω $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ είναι 1-1. Δείξτε ότι $A(X)$ είναι πυκνο στο Y.

(8) Έστω X διαχωρισιμος χωρος Banach. Δείξτε ότι ό X^* είναι w^* διαχωρισιμος.

(9) Δείξτε ότι καθε w-συμπαγες συνολο στο $\ell^\infty = (\ell^1)^*$ είναι norm διαχωρισιμο.

(10) Είναι δυνατον ό ℓ^1 να είναι ισομορφικος με ένα ύποχωρο του c_0? Δικαιολογησατε τήν απαντηση σας.

(11) Έστω $L \in \mathcal{L}(\ell^1, \ell^2)$. Δείξτε ότι $L(\ell^1)$ δέν είναι κλειστός στο ℓ^2

(12) Έστω X, Y Banach χώροι και $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Λέμε ότι ο A είναι "completely continuous" ανν ($x_n \xrightarrow{w} x$ στο X
$\Downarrow$
$A(x_n) \to A(x)$ στο Y)

Λέμε ότι ο A είναι "compact" ("συμπαγής") ανν μεταφέρει φραγμένα σύνολα σε σχετικά συμπαγή σύνολα

Δείξτε ότι: (a) Compact $\Rightarrow$ Completely continuous

(b) Αν X = Reflexive, τότε completely continuous
$\Downarrow$
compact.

(13) Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach. Δείξτε ότι ∂B_1 είναι πυκνό και G_δ-υποσύνολο του $(\overline{B}_X, w)$.

(14) Δείξτε ότι αν ο χώρος Banach X είναι ανακλαστικός και ο Y είναι ισομορφικός του X, τότε και ο Y είναι ανακλαστικός.

(15) Έστω X, Y normed χώροι και $A: X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Υποθέτουμε ότι $\forall \{x_n\}_{n \geq 1} \subseteq X$ τ.ω $\|x_n\| \to 0$, έχουμε ότι $\{A(x_n)\}_n \subseteq Y$ είναι φραγμένη. Μπορούμε νά συμπεράνουμε ότι $A \in \mathcal{L}(X,Y)$; Δικαιολογήσατε τήν απάντησή σας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ.

(1) $1<p<\infty$ και $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq L^p[0,1]$ είναι φραγμένη, $f_n(t) \to f(t)$ a.e.
Δείξτε ότι $f_n \xrightarrow{w} f$ στο $L^p[0,1]$.

(2) $f \in L^1[0,1]$ και υποθέτουμε ότι $\int_a^b f(t)\,dt = 0$ $\forall\, a,b \in [0,1]$. Δείξτε ότι $f(t)=0$ a.e.

(3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μετρησιμη και υποθέτουμε ότι $\forall\, g \in L^q(\mathbb{R})$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ έχουμε $fg \in L^1(\mathbb{R})$.
Δείξτε ότι $f \in L^p(\mathbb{R})$.

(4) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ μη κενο, ανοικτο, $f \in L^p(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$ και $\int_\Omega f u\,dx = 0$ $\forall\, u \in C_c^\infty(\Omega)$.
Δείξτε ότι $f(x)=0$ a.e. στο Ω.

(5) $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ μη κενο, φραγμενο ανοικτο και $\{f_n\}_{n\geq 1} \subseteq L^p(\Omega)$ $(1 \leq p < \infty)$. Υποθετουμε ότι
$f_n(x) \to f(x)$ a.e. στο Ω, $f \in L^p(\Omega)$ και $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$. Δείξτε ότι $f_n \to f$ στο $L^p(\Omega)$

(6) Έστω $\{u_n\}_{n\geq 1} \subseteq W_0^{1,p}(0,1)$ $(1<p<\infty)$ και $\{u_n'\}_{n\geq 1} \subseteq L^p[0,1]$ είναι φραγμενη. Δείξτε
ότι $\exists\, u \in W_0^{1,p}(0,1)$ τ.ω $u_n \to u$ στο $C[0,1]$.

(7) Θέτουμε $\lambda_1 = \inf\left[\frac{\|u'\|_p^p}{\|u\|_p^p} : u \in W_0^{1,p}(0,1),\ u \neq 0\right]$. Δείξτε ότι $\lambda_1 > 0$ και υπάρχει
$u_1 \in W_0^{1,p}(0,1)$ τ.ω $\lambda_1 = \frac{\|u_1'\|_p^p}{\|u_1\|_p^p}$.

(8) Βρεστε ακολουθια $\{u_n\}_{n\geq 1} \subseteq L^p[0,1]$ $(1 \leq p < \infty)$ τ.ω $u_n \to 0$ a.e στο $[0,1]$ αλλα
$u_n \not\to 0$ στο $L^p[0,1]$ $\forall\, 1 \leq p < \infty$.

(9) Έστω $f_n \xrightarrow{\mu} f$ στο $[0,1]$ και $\{|f_n|^p\}_{n\geq 1}$ είναι ομοιομορφα ολοκληρωσιμη.
Δείξτε ότι $f_n \to f$ στο $L^p[0,1]$ $(1 \leq p < \infty)$.

(10) Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ και $\int_A f(x)\,dx \leq M$ $\forall\, |A|_N < \infty$. Δείξτε ότι $\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx \leq M$.