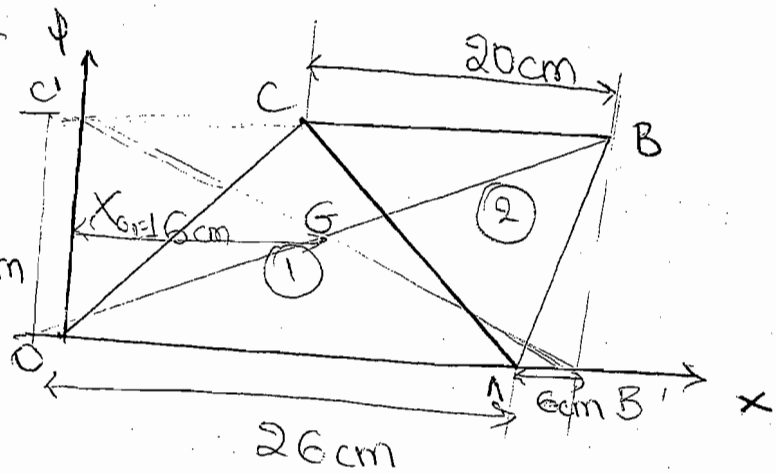
13/11/09

1

Μηχανική → Ασκήσεις

1 | Φυλ 4



$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2}\cdot 26\cdot 15 + \frac{1}{2}\cdot 20\cdot 15 = 345\,[cm^2]$$

$$(OB'BC') - (OCC') - (AB'B)$$

$$x_G = \frac{Q_\psi}{A}$$

$$\psi_G = \frac{Q_x}{A}$$

$$Q_\psi = \sum_{i=1}^{3} A_i\, x_{Gi} = Q_{\psi\, OB'BC'} - Q_{\psi\, OCC'} - Q_{\psi\, AB'B}$$

$$= (32\cdot 15)\cdot\frac{32}{2} - \left(\frac{1}{2}\,15\cdot 12\right)\frac{1}{3}\cdot 12 - \left(\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 15\right)\underbrace{\left(26+\frac{2}{3}\cdot 6\right)}_{\text{από τον άξονα των } \psi}$$

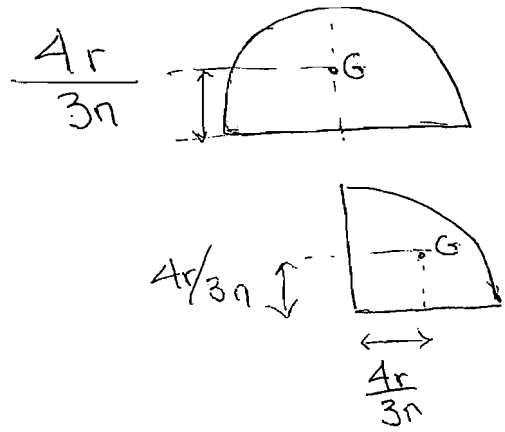
$$= \quad = 5970 \ cm^3$$

$$Q_x = (32\cdot 15)\frac{15}{2} - \left(\frac{1}{2}\,15\cdot 12\right)\frac{2}{3}\,15 - \left(\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 15\right)\frac{1}{3}\cdot 15$$

$$= 2475 \ cm^3$$

$$x_G = \frac{5970\,cm^{\cancel{3}}}{345\,\cancel{cm^2}} = 17{,}3\ cm$$

$$\psi_G = \frac{2475}{345} = 7{,}17\,cm$$



Ασκηση: 3

1). Βρίσκω την εξίσωση

$$\psi = \lambda x \Rightarrow b = \lambda \cdot a \Rightarrow \lambda = \frac{b}{a}$$

$$\varepsilon: \boxed{\psi = \frac{b}{a} x}$$

$$x_c = \frac{Q\psi}{A}$$

$$\psi_c = \frac{Qx}{A}$$

$$A = \int_0^a \underbrace{\left(\frac{b}{a} x - \frac{b}{a^2} x^2 \right)}_{\psi} dx$$

$$A = \left[-\frac{b}{3a^2} x^3 + \frac{b}{2a} x^2 \right]_0^a$$

$$= -\frac{b}{3a^2} a^3 + \frac{b}{2a} a^2$$

$$= \frac{-2ba + 3ba}{6}$$

$$= \frac{ba}{6}$$

$$Q\psi = \iint_0^A x \, dA = \int_0^a x \left(\frac{b}{a} x - \frac{b}{a^2} x^2 \right) dx$$

$$= \int_0^a \left(\frac{b}{a} x^2 - \frac{b}{a^2} x^3 \right) dx = \dots = \frac{ba^2}{12}$$

$$dA = (x_2 - x_1)\,d\psi = \left[\left(\frac{\psi a^2}{b}\right)^{1/2} - \frac{\psi a}{b}\right] d\psi$$

$$Q_x = \int_0^b \psi\left[\left(\frac{a^2}{b}\psi\right)^{1/2} - \frac{a}{b}\psi\right] d\psi =$$

$$= \left(\frac{a^2}{b}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^b \psi^{3/2}\, d\psi - \frac{a}{b}\int_0^b \psi^2 d\psi$$

$$= \frac{a}{\sqrt{b}}\left[\frac{\psi^{5/2}}{\frac{5}{2}}\right]_0^b - \frac{a}{b}\left[\frac{\psi^3}{3}\right]_0^b$$

$$= \frac{a}{\sqrt{b}}\,\frac{2}{5}\,b^{5/2} - \frac{a}{b}\,\frac{b^2}{3} = \frac{a b^2}{15}$$

5

$$C: \left.\begin{array}{l}\psi = x^2\\ \psi = 4\end{array}\right\} \Rightarrow x = 2m$$

$$A: \left.\begin{array}{l}\psi = x-1\\ \psi = 0\end{array}\right\} \Rightarrow x = 1m$$

$$B: \left.\begin{array}{l}\psi = -2x+8\\ \psi = x-1\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}x = 3m\\ \psi = 2m\end{array}$$

$$A = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 \left[x^2 - (x-1)\right] dx + \int_2^3 \left[-2x+8-(x-1)\right] dx =$$

$$A = 3{,}67\ m^2$$

$$Q_y = \int_0^1 x^3\,dx + \int_1^2 x\left[x^2-(x-1)\right]dx + \int_2^3 x\left[-2x+8-(x-1)\right]dx$$

$$Q_y = 6{,}67\ m^3$$

$y = x-1 \Rightarrow x = y+1$

$y = x^2 \Rightarrow x = y^{1/2}$

$y = -2x+8 \Rightarrow x = \frac{8-y}{2}$

$$Q_x = \int_0^2 y\left(y+1-y^{1/2}\right)dy + \int_2^4 y\left(\frac{8-y}{2} - y^{1/2}\right)dy$$

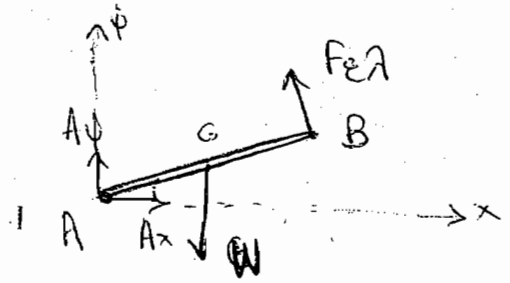
$$= 6{,}53\ m^3$$

$x_G = 1{,}82\,m$

$y_G = 1{,}78\,m$

20-11-07

ΜΗΧΑΝΙΚΗ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ



$W = mg$

$\Sigma \vec{F}_x = 0$

$\Sigma \vec{F}_y = 0$

$\Sigma \vec{M} = 0$ (1)

$\hat{B} = \hat{C} = \frac{180 - 75}{2} = 52{,}5°$

$BC^2 = \ldots$

από νόμο συνημιτόνων

$BC = 487\,mm$

$\Delta l = BC - l_0 = 87\,mm$

$F_{ελ} = k \cdot \Delta l$

$F_{ελy} = \ldots$

$F_{ελx} =$

$d_1 = 200 \cdot \cos 15° = 0{,}19\ m$

$d_2 = 400 \cdot \cos 15° = 380\,mm$

$d_3 = 400 \cdot \sin 15° = 100\,mm$

(1) $\Sigma \vec{M} = 0 \Rightarrow -W \cdot d_1 + F_{ελ,x} \cdot d_3 + F_{ελ,y} \cdot d_2 = 0$

$W = 291{,}4\,N$

$m = 29{,}14\,kg$

$$\boxed{W = \gamma \cdot A\, t}$$

A → εμβαδόν

t → πάχος

γ → ειδικό βάρος

Aceknon. 3

$\vec{O}_x = O_x \vec{i}$

$\vec{O}_y = O_y \vec{j}$

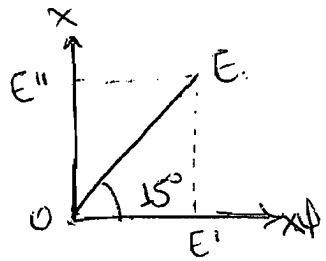
$\vec{O}_z = O_z \vec{k}$

$w = -2\vec{k}$ [kN]

$\vec{F}_1 = |\vec{F}_1| \cdot \vec{e}_{rA}$ (1)

$\vec{F}_2 = |\vec{F}_2| \vec{e}_{rB}$ (2)

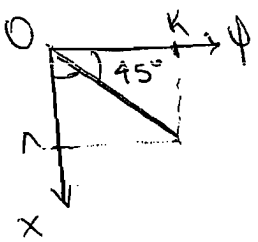
$\vec{rA} =$



$(OE') = OE \cdot \cos 15° = 9,66$ [m]

$(EE') = OE \cdot \sin 15° = 2,59$ [m]

$E(6,83 \,,\, 6,83 \,,\, 2,59)$



$OK = OA = OE' \cdot \cos 45° = 6,83$ [m]

$\vec{e}_{rA} = 0,115\vec{i} - 0,673\vec{j} + 0,73\vec{k}$

$\vec{e}_{rB} = -3,415\vec{i} + 0,585\vec{j} + 3,705\vec{k}$

$\vec{F}_1 = 0,115 F_1 \vec{i} - 0,673 F_1 \vec{j} + 0,73 F_1 \vec{k}$

$\vec{F}_2 = -3,415 F_2 \vec{i} + 0,585 F_2 \vec{j} + 3,705 F_2 \vec{k}$

$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow O_x + 0,115 F_1 - 3,415 F_2 = 0$ (3)

$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow O_y - 0,673 F_1 + 0,585 F_2 = 0$ (4)

$\sum \vec{F}_z = 0 \Rightarrow O_z - 2 + 0,73 F_1 + 3,705 F_2 = 0$ (5)

$\sum \vec{M}_O = 0 \Rightarrow \vec{r}_{OA} \otimes (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + \vec{r}_{OB} \otimes \vec{w} = 0 \Longrightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3{,}41 & 3{,}41 & 1{,}29 \\ (0{,}115F_1 - 3{,}41F_2) & (-0{,}67F_1 + 0{,}58F_2) & (0{,}33F_1 + 3{,}40F_2) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6{,}83 & 6{,}83 & 2{,}59 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \Sigma M_x = 0 \Rightarrow 3{,}36 F_1 + 2{,}34 F_2 - 13{,}66 = 0 \quad (6)$$

$$\Sigma M_y = 0 \Rightarrow 2{,}34 F_1 + 3{,}36 F_2 + 13{,}66 = 0 \quad (7)$$

$$\Sigma M = 0 \Rightarrow -2{,}69 F_1 + 2{,}69 F_2 = 0 \Rightarrow F_1 = F_2$$

$$(6) \Rightarrow F_1 = F_2 = 2{,}4\ kN$$

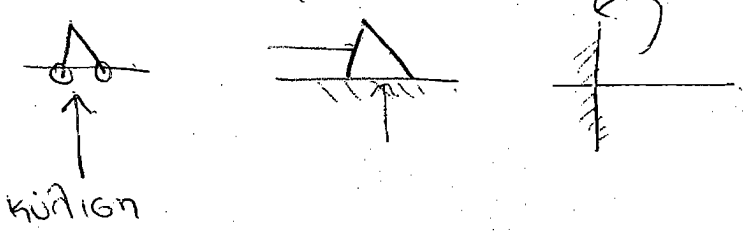
$$(3) \Rightarrow O_x = 1{,}34\ kN$$

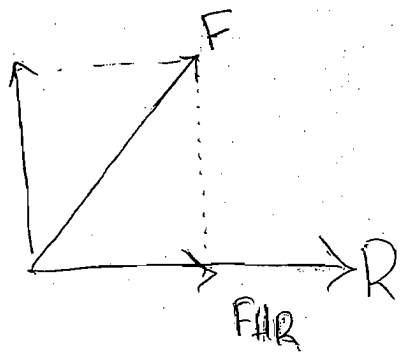
$$(4) \Rightarrow O_y = 1{,}34\ kN$$

$$(5) \Rightarrow O_z = -1{,}5\ kN$$

από την αυθαίρετη φορά

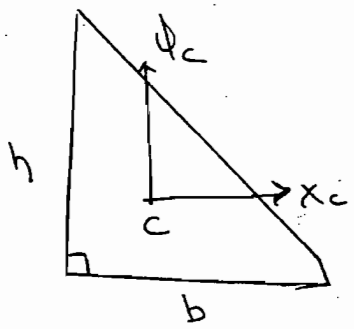
κύλιση αρθρωση πάκτωση





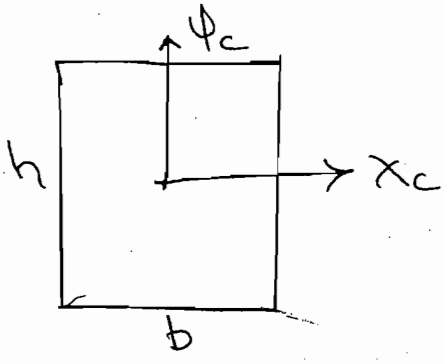
$$F_{//} = (\vec{F} \cdot \vec{e_R}) \cdot \vec{e_R}$$

2ª etapa



$$I_{x_c x_c} = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_{\varphi_c \varphi_c} = \frac{b^3 h}{36}$$



$$I_{x_c x_c} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{\varphi_c \varphi_c} = \frac{b^3 h}{12}$$

$$I_{xx} = I_{xx}^{(1)} + I_{xx}^{(2)} + I_{xx}^{(3)} \quad (1)$$

$$I_{xx} = I_{x_{c_1} x_{c_1}} + A_1 d_1^2 = \frac{120 \cdot 180^3}{12} + \frac{120 \cdot 180 \cdot (180)^2}{(2)^2} = \ldots \text{cm}^4$$

$$I_{xx}^{(2)} = I_{x_{c_2} x_{c_2}} + A_2 d_2^2 = \frac{90 \cdot 80^3}{12} + 90 \cdot 80 \cdot \frac{80^2}{2^2} = \ldots \text{cm}^4$$

$$I_{xx}^{(3)} = I_{x_{c_3} x_{c_3}} + A_3 d_3^2 = \frac{90 \cdot 100^3}{36} + \frac{1}{2} 90 \cdot 100 \left(80 + \frac{1}{3} 100\right)^2$$

$$= \ldots \text{cm}^4 = \ldots 10^{-8} \text{m}^4$$

$$I_{\varphi\varphi} = I_{\varphi\varphi}^{(1)} + I_{\varphi\varphi}^{(2)} + I_{\varphi\varphi}^{(3)} \quad (2)$$

$$I_{\varphi\varphi}^{(1)} = I_{\varphi_{c_1} \varphi_{c_1}} + A_1 \cdot d_1'^2 = \frac{180 \cdot 120^3}{12} + 120 \cdot 180 \cdot 150^2 = \ldots \text{cm}^4$$

$$I_{\varphi\varphi}^{(2)} = I_{\varphi_{c_2} \varphi_{c_2}} + A_2 d_2'^2 = \frac{80 \cdot 90^3}{12} + 90 \cdot 80 \cdot 45^2 = \ldots \text{cm}^4$$

$$I_{\varphi\varphi}^{(3)} = I_{\varphi_{c_3} \varphi_{c_3}} + A_3 d_3'^2 = \frac{100 \cdot 90^3}{36} + \frac{1}{2} 90 \cdot 100 \cdot \left(\frac{2}{3} 90\right)^2 = \ldots$$

$$x_c = \frac{Q_y^{①} + Q_y^{②} + Q_y^{③}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{120 \cdot 180 \cdot 150 + 90 \cdot 80 \cdot 45 + 50 \cdot 90 \cdot \frac{2}{3} 60}{120 \cdot 180 + 90 \cdot 80 + \frac{100}{2} \cdot 90} \text{ cm}$$

$$x_c = 115{,}14 \text{ cm}$$

$$y_c = \frac{120 \cdot 180 \cdot 90 + 90 \cdot 80 \cdot 40 + \frac{1}{2} 90 \cdot 100 \left(80 + \frac{1}{3} 100\right)}{120 \cdot 180 + 90 \cdot 80 + \frac{100}{2} 90} = 82{,}34 \text{ cm}$$

$$I_{x_c x_c} = I_{x_c x_c}^{①} + I_{x_c x_c}^{②} + I_{x_c x_c}^{③}$$

$$I_{x_c x_c} = \frac{120 \cdot 180^3}{12} + 120 \cdot 180 \, d_f^2$$

$$d_f = y_{c_1} - y_c$$

$$I_{x_c x_c}^{②} = I_{x_{c_2} x_{c_2}} + A_2 d_8^2$$

$$= \frac{90 \cdot 80^3}{12} + 90 \cdot 80 \left(y_c - y_{c_2}\right)^2$$

$$= \frac{90 \cdot 80^3}{12} + 90 \cdot 80 \cdot \left(82{,}34 - 40\right)^2$$

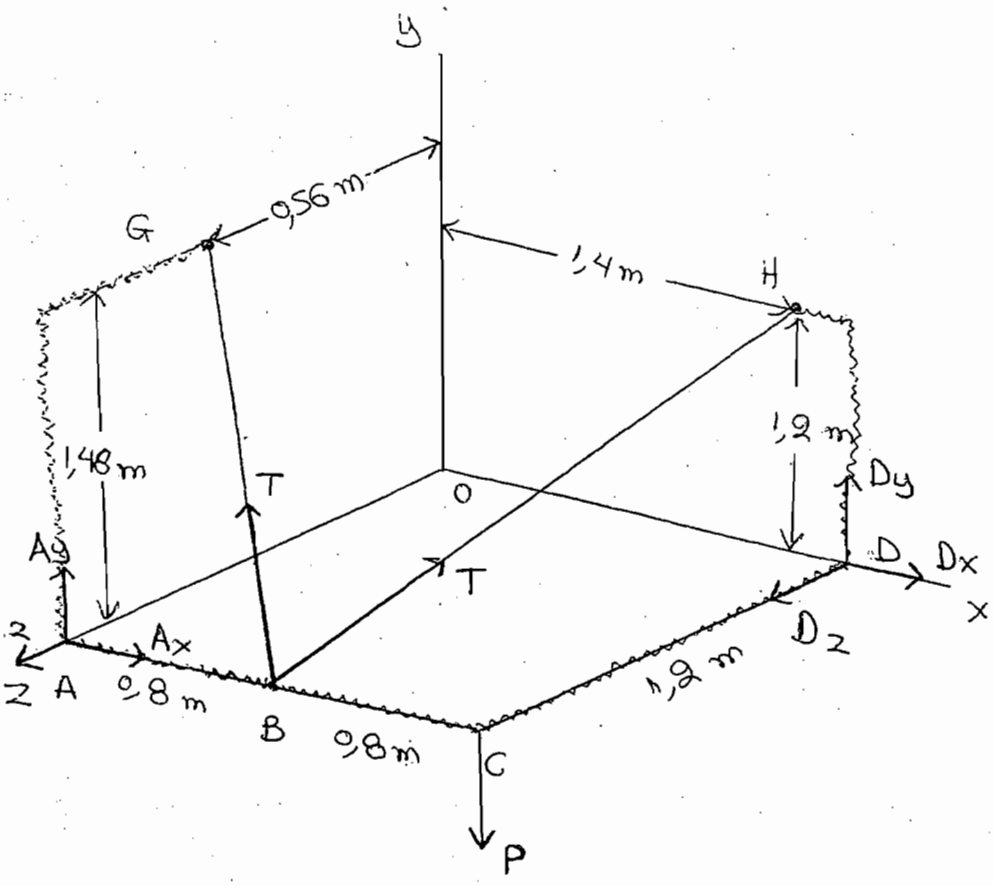
$$I_{x_c x_c}^{③} = I_{x_{c_3} x_{c_3}} + A_3 d_9^2$$

$$= \frac{90 \cdot 100^3}{36} + \frac{1}{2} 90 \cdot 100 \cdot \left(y_{c_3} - y_c\right)^2$$

$$= \frac{90 \cdot 100^3}{36} + \frac{1}{2} 90 \cdot 100 \left(80 + \frac{1}{3} 100 - 82{,}34\right)^2$$

ΠΡΟΟΔΟΣ 21/11/2009

ΖΗΤΗΜΑ 2ο



ΠΡΟΣΟΧΗ:
Το σχοινί είναι <u>ένα</u> άρα ασκεί <u>ίδιου μέτρου δύναμη</u> στα BG και BH.

$\vec{BG} = -0{,}8\vec{i} + 1{,}48\vec{j} - (1{,}2 - 0{,}56)\vec{k} = -0{,}8\vec{i} + 1{,}48\vec{j} - 0{,}64\vec{k}$ [m]

$|\vec{BG}| = \sqrt{0{,}8^2 + 1{,}48^2 + 0{,}64^2} = 1{,}8$ [m]

$\vec{e}_{BG} = \dfrac{\vec{BG}}{|\vec{BG}|} = -0{,}444\vec{i} + 0{,}822\vec{j} - 0{,}356\vec{k}$

BG: $\vec{T} = -0{,}444T\vec{i} + 0{,}822T\vec{j} - 0{,}356T\vec{k}$ [kN] (1)

$\vec{BH} = 0{,}8\vec{i} - 1{,}2\vec{k} + 1{,}2\vec{j} - 0{,}2\vec{i} = 0{,}6\vec{i} + 1{,}2\vec{j} - 1{,}2\vec{k}$ [m]

$|\vec{BH}| = \sqrt{0{,}6^2 + 1{,}2^2 + 1{,}2^2} = 1{,}8$ [m]

$\vec{e}_{BH} = \dfrac{\vec{BH}}{|\vec{BH}|} = 0{,}333\vec{i} + 0{,}667\vec{j} - 0{,}667\vec{k}$

BH: $\vec{T} = 0{,}333T\vec{i} + 0{,}667T\vec{j} - 0{,}667T\vec{k}$ (2)

Συνολικά η δύναμη του σχοινιού είναι $\vec{F} = \vec{T} + \vec{T} \xrightarrow[(2)]{(1)}$

$\Rightarrow \vec{F} = -0{,}111T\vec{i} + 1{,}489T\vec{j} - 1{,}023T\vec{k}$ [kN]

Παίρνω ροπές ως προς την ευθεία AG για να "κρύψουν" οι αντιδράσεις των χωρικών αρθρώσεων,

$$\Sigma \vec{M}_{AD} = \left(\vec{M}^A \cdot \vec{e}_{AD}\right) \cdot \vec{e}_{AD} = 0 \quad (2)$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Στο $\vec{M}^A$ μπαίνουν οι δυνάμεις που έχουν ροπή ως προς την ευθεία.

$$\vec{M}^A = \vec{M}^A_F + \vec{M}^A_P = \vec{r}_{AB} \otimes \vec{F} + \vec{r}_{AC} \otimes \vec{P} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ -0{,}111\,T & 1{,}489\,T & -1{,}023\,T \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0{,}818\,T\vec{j} + 1{,}191\,T\vec{k} - 16\vec{k} \quad [kNm]$$

$$\vec{e}_{AD} = \frac{1{,}6\vec{i} - 1{,}2\vec{k}}{\sqrt{1{,}6^2 + 1{,}2^2}} = 0{,}8\vec{i} - 0{,}6\vec{k}$$

$$(2) \Rightarrow \Sigma \vec{M}_{AD} = \left[0{,}818\,T\vec{j} + (1{,}191\,T - 16)\vec{k}\right] \cdot (0{,}8\vec{i} - 0{,}6\vec{k}) \cdot \vec{e}_{AD} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-0{,}715\,T + 9{,}6) \cdot (0{,}8\vec{i} - 0{,}6\vec{k}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -0{,}572\,T\vec{i} + 0{,}429\,T\vec{k} + 7{,}68\vec{i} - 5{,}76\vec{k} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-0{,}572\,T + 7{,}68)\vec{i} + (0{,}429\,T - 5{,}76)\vec{k} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -0{,}572\,T + 7{,}68 = 0 \\ 0{,}429\,T - 5{,}76 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T = 13{,}43\ [kN] \\ T = 13{,}43\ [kN] \end{cases}$$

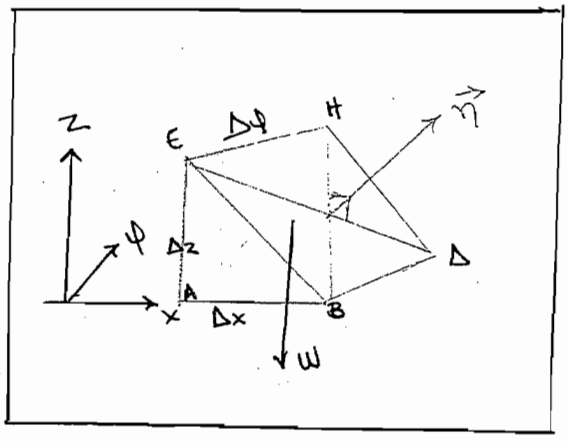
1)

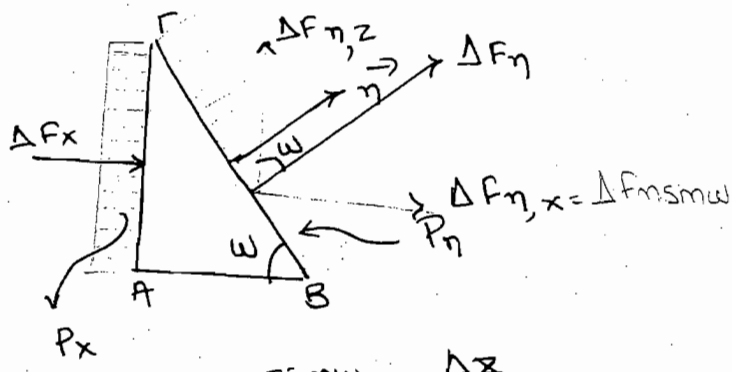
ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

27/11/09

$$P = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

1) ανεξαρτησία της πίεσεως από τον προσανατολισμό της επιφάνειας.





$$\sin\omega = \frac{\Delta z}{B\Gamma}$$

$$P = \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta F_x &= P_x \Delta A_x \\ \Delta F_n &= P_n \Delta A_n \end{aligned}\right\}$$

το σώμα ισορροπεί άρα πρέπει

$$\boxed{\Delta F_x = \Delta F_n}$$

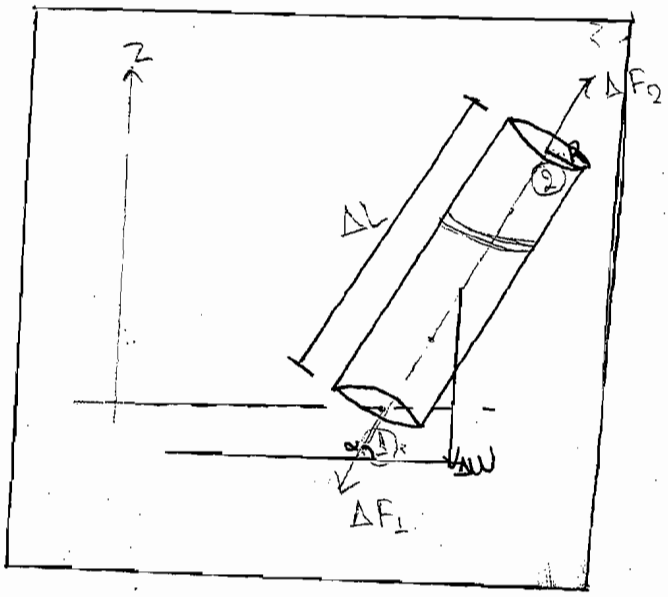
$$\Rightarrow P_x \cancel{\Delta z \Delta\varphi} = P_n \cancel{\Delta\varphi} \frac{\cancel{\Delta z}}{\cancel{\sin\omega}} \cancel{\sin\omega}$$

$$\boxed{P_x = P_n}$$

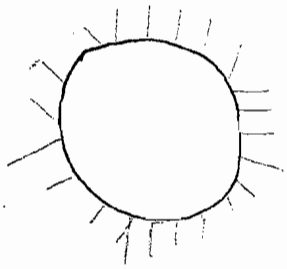
~~ΥΔΡΟΣΤΑ~~

ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗΣ

Θεωρούμε ένα μεγάλο δοχείο με ηρεμούν υγρό. αποτέλεσμα υγρό με κυλινδρικό σχήμα (;)



$$\boxed{\rho = \lim \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{W}{V}}$$



$$\Sigma F_\ell = 0 \Rightarrow \Delta F_1 - \Delta F_2 - \Delta W \sin\alpha = 0$$

$$\cancel{P_1 \Delta A_1 - P_2 \Delta A_2 - \gamma}$$

$$(\Delta V = \Delta A \cdot \Delta \ell)$$

$$P_1 \cancel{\Delta A_1} - P_2 \cancel{\Delta A_1} - \gamma \cancel{\Delta A_1} \Delta \ell \sin\alpha = 0$$

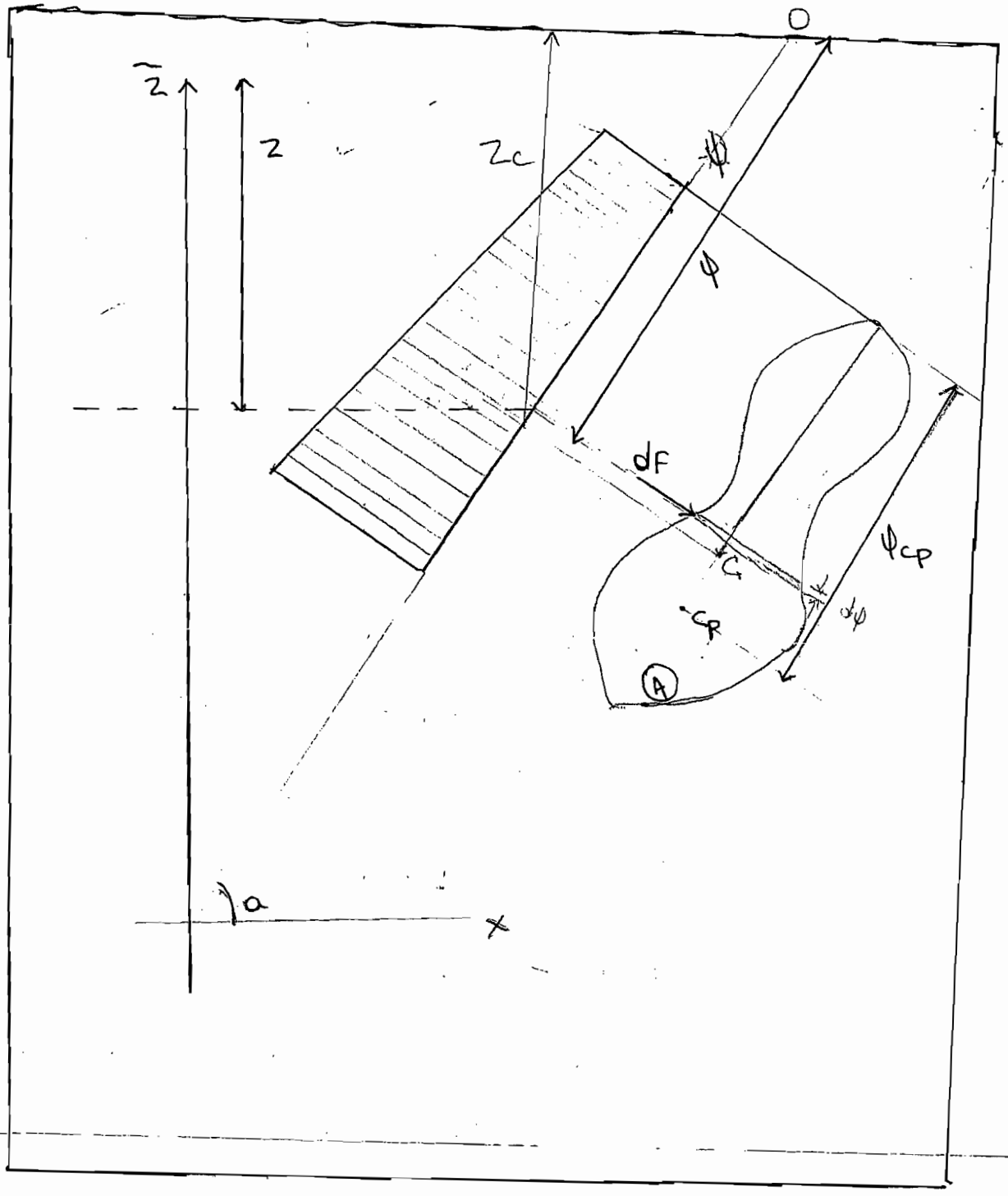
$$\boxed{P_1 = P_2 + \gamma \Delta z}$$

$$\Rightarrow P_1 - P_2 = \gamma \Delta z \Rightarrow P_1 - P_2 = \gamma (z_2 - z_1)$$

$$\boxed{P_1 + \gamma z_1 = \text{σταθ.}}$$

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΕΠΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΒΥΘΙΣΜΕΝΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

Έστω επίπεδη επιφάνεια με έναν άξονα συμμετρίας βυθισμένη ολικώς σε ηρεμούν υγρό ειδικού βάρους γ.



$dF = p_z\, dA$ Ⓐ

$$p_0 + \gamma \tilde{z}_0 = p(z) + \gamma \tilde{z} \Rightarrow$$

$$p(z) = \gamma (z_0 - z)$$

$$p(z) = \gamma \tilde{z}$$

Ⓐ → $dF = \gamma z\, dA = \gamma \psi \sin\alpha\, dA$

$$F_h = \int dF = \int_A \gamma \psi \sin\alpha\, dA = \gamma \sin\alpha \int_A \psi\, dA$$

Q_x

$$F_h = \gamma \sin\alpha\, A \psi_c = \gamma A z_c \Rightarrow \boxed{F_h = p_c \cdot A}$$

• προσδιορισμός του κέντρου πιέσεων (σημείο εφαρμογής της υδροστατικής δυνάμεως) → cp

$$M^{o}_{F_h} = \iint dM \Rightarrow p_c A \cdot \psi_{cp} = \iint \psi\, dF = \iint_A \psi^2 \gamma \sin\alpha \cdot dA$$

$$M^{F_h}_{o} = \gamma \sin\alpha \iint_A \psi^2 dA$$

$$\cancel{\Rightarrow p_c A \psi_{cp} = I_{x_c x_c} + A \cdot \psi_c \gamma \sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \cancel{\gamma} z_c A \psi_{cp} = \cancel{\gamma} \sin\alpha\, I_{xx}$$

$$\psi_c \cancel{\sin\alpha} \cdot A \psi_{cp} = \cancel{\sin\alpha}\, I_{xx}$$

$$\psi_c A \psi_{cp} = I_{x_c x_c} + A \psi_c^2$$

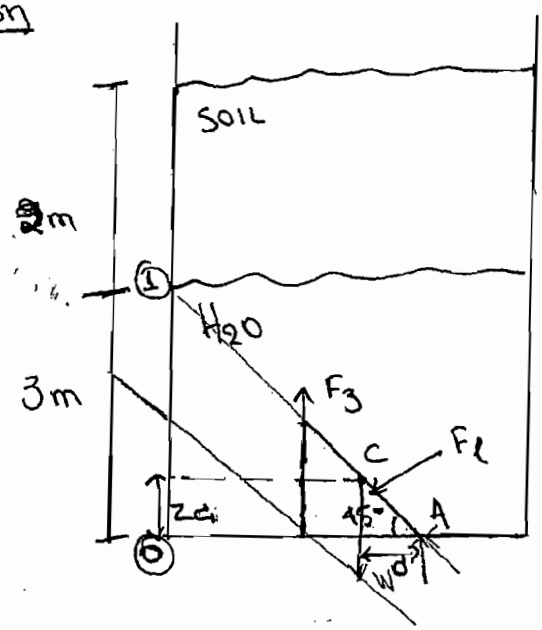
$$\Rightarrow \psi_{cp} = \frac{I_{x_c x_c} + A \psi_c^2}{A \cdot \psi_c}$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi_{cp} = \psi_c + \frac{I_{x_c x_c}}{A \cdot \psi_c}}$$

$$\boxed{\psi_{cp} \geq \psi_c}$$

"=" μόνο σε μεγάλο βάθος

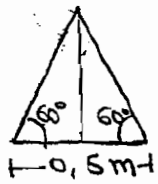
Ασκηση



$t = 5m$

ειδικό βάρος χαλυβα $\gamma_{st} = 10^5\ N/m^3$

$\gamma_{H_2O} = 10^4\ N/m^3$



Ισορροπεί με βοήθεια ελατηρίου ροπή διαταξης. Δίο υγρών με η ειδική βαρυτης του ελαίου είναι 0,8 και το ειδικό βάρος του νερού είναι $10^4\ N/m^3$. Αν το ελατήριο έχει φυσικό μηκος L_0. Να βρεθεί η σταθερά του ελατηρίου.

$$\Sigma M_A = 0$$

$$F_h = P_c A$$

Βασικός νόμος της υδρ. $0 \to 1$ $\quad P_0 + \gamma_{oil} z_{oil} = P_1 + \gamma_{oil} \cdot z_1$

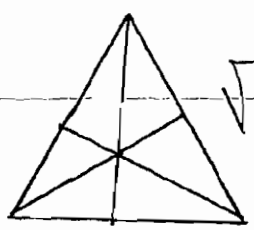
$1 \to C$ $\quad P_1 + \gamma_{H_2O} z_1 = P_c + \gamma_{H_2O} z_c$

$$P_0 + \gamma_{oil} z_0 + \gamma_{H_2O} z_1 = \gamma_{oil} z_1 + P_c + \gamma_{H_2O} z_c$$

$$101{,}33 \times 10^3 + 0{,}8\,\gamma_{H_2O} \cdot 3 + \gamma_{H_2O} \cdot 2{,}9 = P_c$$

$$P_c = 101{,}33 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^3 3 + 29 \cdot 10^3$$

$$P_c = 154{,}33\ kPa$$



$$\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$\frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$F_{oil} = P_c A = 154{,}33 \cdot 10^3 \cdot 0{,}5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0{,}5 \cdot \frac{1}{2}\ [N]$$

$$= 16{,}7\ kN$$

$$\boxed{\varphi_{cp} = \varphi_c + \frac{I_{xc}\, x_c}{\varphi_c \cdot A}} \simeq \varphi_c$$

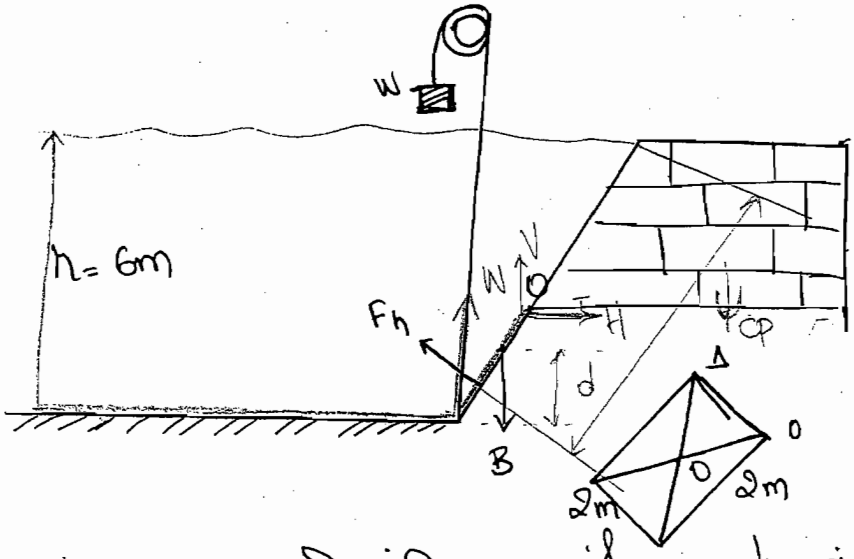
$$\boxed{W = A\, t\, \gamma_{ct}}$$

$$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow F_H \cdot [A\,(cp)] + W \cdot d = F_S \cdot \ell$$

X

01/12/09 (1)

ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι



Τετραγωνική φραγματοδυρίδα στηρίζεται με άρθρωση ή εφάπτεται σε ανένδοτο τοίχωμα στο σημείο Α. Να υπολογιστεί το βάρος W θεωρώντας τη τροχαλία Τ ιδανική· ώστε η φραγματοδυρίδα να ανοίγει όταν η στάθμη του νερού υπερβαίνει τα 6m. Δίνεται βάρος θυρίδας ένας τόνος και ω = 45°. $\gamma_{H_2O} = 10^4\ N/m^3$

$F_h = f(\text{γεωμετρικής } h,\ \gamma_{H_2O})$

$\Sigma M_O = 0 \Rightarrow M_O^{F_H} + M_O^{B} + M_O^{W} = 0$

$$\begin{cases} F_H = p_c \cdot A = \gamma_{H_2O} z_c A = 10^4 \cdot 5{,}3 \cdot 2{,}2 \quad N = 212\,kN \\ z_c = h - d = 5{,}3m \end{cases}$$

$$\psi_{cp} = \psi_c + \frac{I_{xcxc}}{\psi_c \cdot A}$$

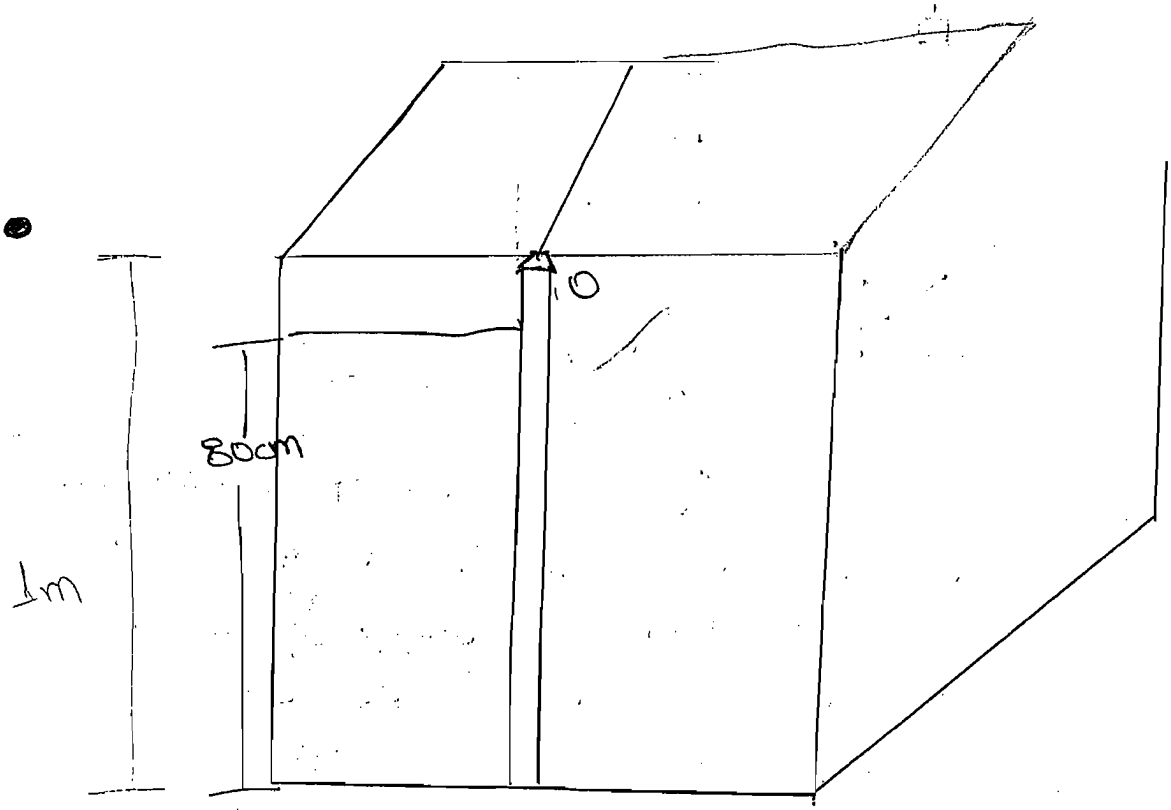
$$\psi_c = \frac{z_c}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{5{,}3}{0{,}707} = 7{,}5m$$

(2)

$$y_{cp} = y_c + \frac{I_{x_c x_c}}{y_c \cdot A} = 1,5 + \frac{\frac{1}{12}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{2}\cdot \frac{1}{3}}{1,5\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{2}} = 1,54 \text{ m}$$

$$\Sigma M_O = 0 \Longrightarrow 212\cdot 1,04 + 10\cdot 0,107 = W\cdot 1,41$$

$W = \ldots$



Ένα κυβικό δοχείο χωρίζεται σε δύο ~~σκέλη~~ τμήματα με ένα βοηθητικό πετάλωμα περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα. Να βρεθεί η σταθμη του υδραργύρου ώστε να μην αναμειχθούν τα δύο υγρά.

$\gamma_{H_2O} = 10^4 \text{ N/m}^3$

$\delta_{Hg} = 13,6$ (ειδικη βαρυτητα)

ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι → ΑΣΚΗΣΕΙΣ (7η σελίδα) 14/12/09

$$I_{x_1x_1} = I_{x_{c_1}x_{c_1}} + A_1 d_1^2 + I_{x_{c_2}x_{c_2}} + A_2 d_2^2 + I_{x_{c_3}x_{c_3}} + A_3 d_3^2$$

$$= \frac{100\cdot 20^3}{12} + 100\cdot 20\cdot 10^2 + \frac{20\cdot 100^3}{12} + 20\cdot 100\cdot 50^2 + \frac{40\cdot 10^3}{12} + 40\cdot$$

$$= 11346666{,}67\ cm^4 = \ldots\ 10^{-8}\ m^4$$

$$I_{\psi_1\psi_1} = I_{\psi_{c_1}\psi_{c_1}} + A_1 d_4^2 + I_{\psi_{c_2}\psi_{c_2}} + A_2 d_5^2 + I_{\psi_{c_3}\psi_{c_3}} + A_3 d_6^2$$

$$= \frac{20\cdot 100^3}{12} + 20\cdot 100\cdot 10^2 + \frac{100\cdot 20^3}{12} + 100\cdot 20\cdot 10^2 + \frac{10\cdot 40^3}{12} + 10\cdot 40\cdot$$

$$= 2226666{,}66\ .10^{-8}\ m^4$$

$$I_{x_1\psi_1} = I_{x_{c_1}\psi_{c_1}} + A_1 d_1 d_4 + I_{x_{c_2}\psi_{c_2}} + A_2 d_2 d_5 + I_{x_{c_3}\psi_{c_3}} + A_3 d_3 d$$

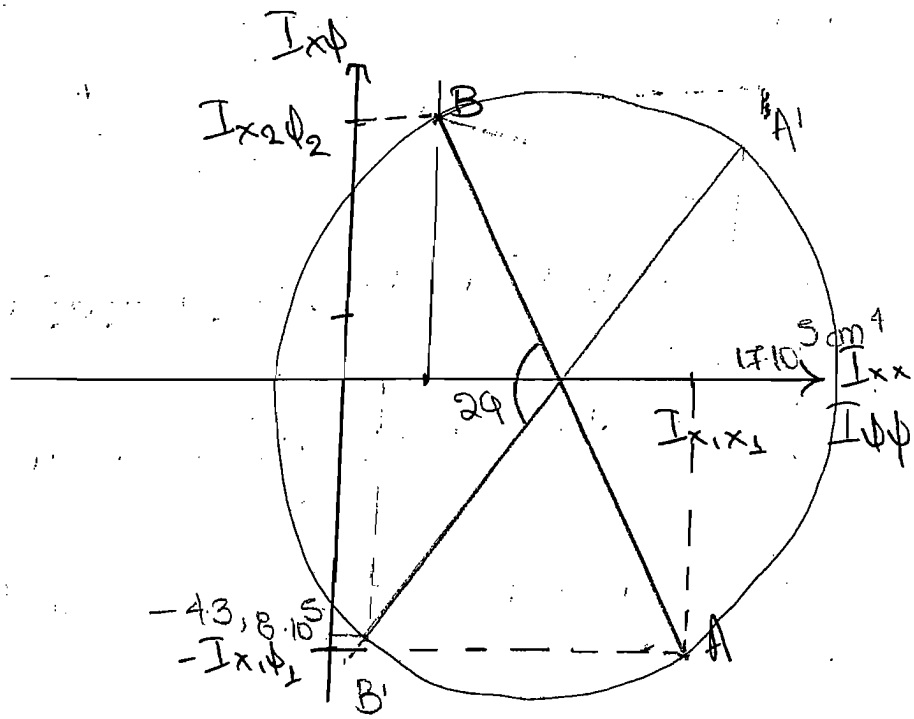
$$= 0 + 20\cdot 100(-10)(-10) + 0 + 100\cdot 20\cdot 50(-10) + 0 + 40\cdot 10$$

$$\cdot 105$$

$$= -122\cdot 10^4\ cm^4 \qquad \cdot(-10)$$

(+) Δεξιόστροφα → αρνητικά
αριστερόστροφα → θετικά

$$\tan\theta = \frac{20}{40} \Rightarrow \theta = 26{,}57^\circ \Rightarrow \varphi = 63{,}43^\circ$$



$$I = \begin{pmatrix} 17 \cdot 10^5 & 43,8 \cdot 10^5 \\ 43,8 \cdot 10^5 & 1,8 \cdot 10^5 \end{pmatrix}$$

③

HGK. 1/ 8ΣΓΕΡΑ

$$S = \frac{\gamma}{\gamma_{H_2O}}$$

$$P_{atm} + \overbrace{13{,}6 \cdot \gamma_{H_2O}}^{\gamma_{merc}} \cdot 0{,}4 + \gamma_{H_2O}\, 0{,}17 - 0{,}8 \cdot \gamma_{H_2O} \cdot 0{,}65 + \cancel{\gamma_{air} z}^{\,0}$$

$$- 13{,}6 \cdot \gamma_{H_2O} (0{,}1 + 0{,}2 \sin 70^\circ) + 0{,}8\, \gamma_{H_2O}\, 0{,}6$$

$$- \gamma_{H_2O}\, 0{,}65 = P_A$$

$$1 N/m^2 = 1\ Pa$$

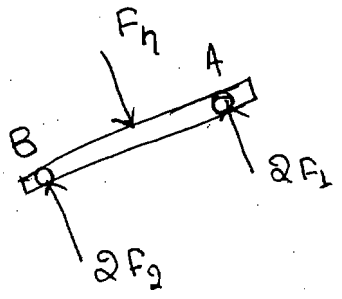
ΑΓΚ

3]

$$F = \gamma_{H_2O} \cdot A \cdot z_c = 10^4 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}5 = 450 N$$

$$\sin 45^\circ = \frac{z_c}{y_c} \rightarrow y_c = \frac{0{,}5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 0{,}707 m$$

$$\left.\begin{aligned} y_{cp} &= y_c + \frac{I_{x_c x_c}}{y_c A} \\ I_{x_c x_c} &= \frac{0{,}3 \cdot 0{,}3^3}{12} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_{cp} = 0{,}707 + \frac{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}3^3}{12}}{0{,}707 \cdot 0{,}3^2} = 0{,}718 m$$



$$\sum \vec{M}_B = 0 \Rightarrow F \cdot (0{,}2 - y_{cp} + y_c) = 2F_1 \cdot 0{,}4$$

$$\Rightarrow F_1 = \ldots \qquad + 100$$

$$\sum \vec{M}_A = 0 \Rightarrow F_2 = \ldots \qquad + 100$$

18/12/09

ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι → ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ασκ. 4 | 8η σελίδα

Z_c : η απόσταση του βαρύκεντρου από την ελεύθερη επιφάνεια

$$F = p_c \cdot A$$

$$F = \gamma_w \cdot A \cdot Z_c$$

$$\psi_{1c} = \frac{Q_x}{A_1} = \frac{(40\cdot10)\cdot45 + (30\cdot10)\cdot25 + 50\cdot10\cdot5}{400 + 300 + 500}$$

$$\psi_{1c} = 23,3\ cm$$

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{BD} \Rightarrow h = 25\sqrt{3}\ cm$$

$$BD = 50\ cm = AB$$

$$\psi_c = AB + (50 - 23,3) = 76,7\ cm$$

$$\sin 60^\circ = \frac{Z_c}{\psi_c} \Rightarrow Z_c = 66,42\ cm$$

$$\psi_{cp} = \psi_c + \frac{I_{x_c x_c}}{A\cdot\psi_c}$$

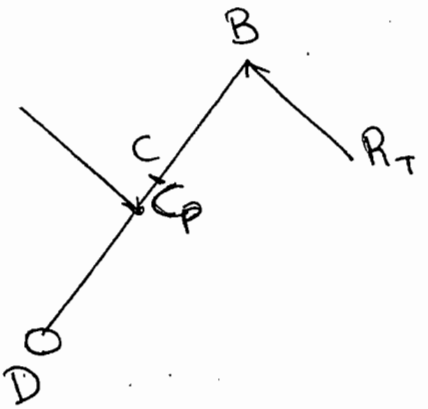
$$I_{x_c x_c} = \frac{40\cdot10^3}{12} + (40\cdot10)\cdot(26,7 - 5)^2 + \frac{10\cdot30^3}{12} + (10\cdot30)\cdot(25 - 23,3)^2 + \frac{50\cdot10^3}{12} + (50\cdot10)\cdot(23,3 - 5)^2$$

$$I_{x_c x_c} = 386668\ cm^4$$

$$\Rightarrow \psi_{cp} = 76,7\ cm + \frac{386668\ cm^4}{A\cdot 76,7} = 80,9\ cm$$

$$F = \gamma_w \cdot A \cdot Z_c = 10^4 \cdot 1200 \cdot 10^{-4} \cdot 66,42 \cdot 10^{-2}$$

$$F = 799,04\ N$$

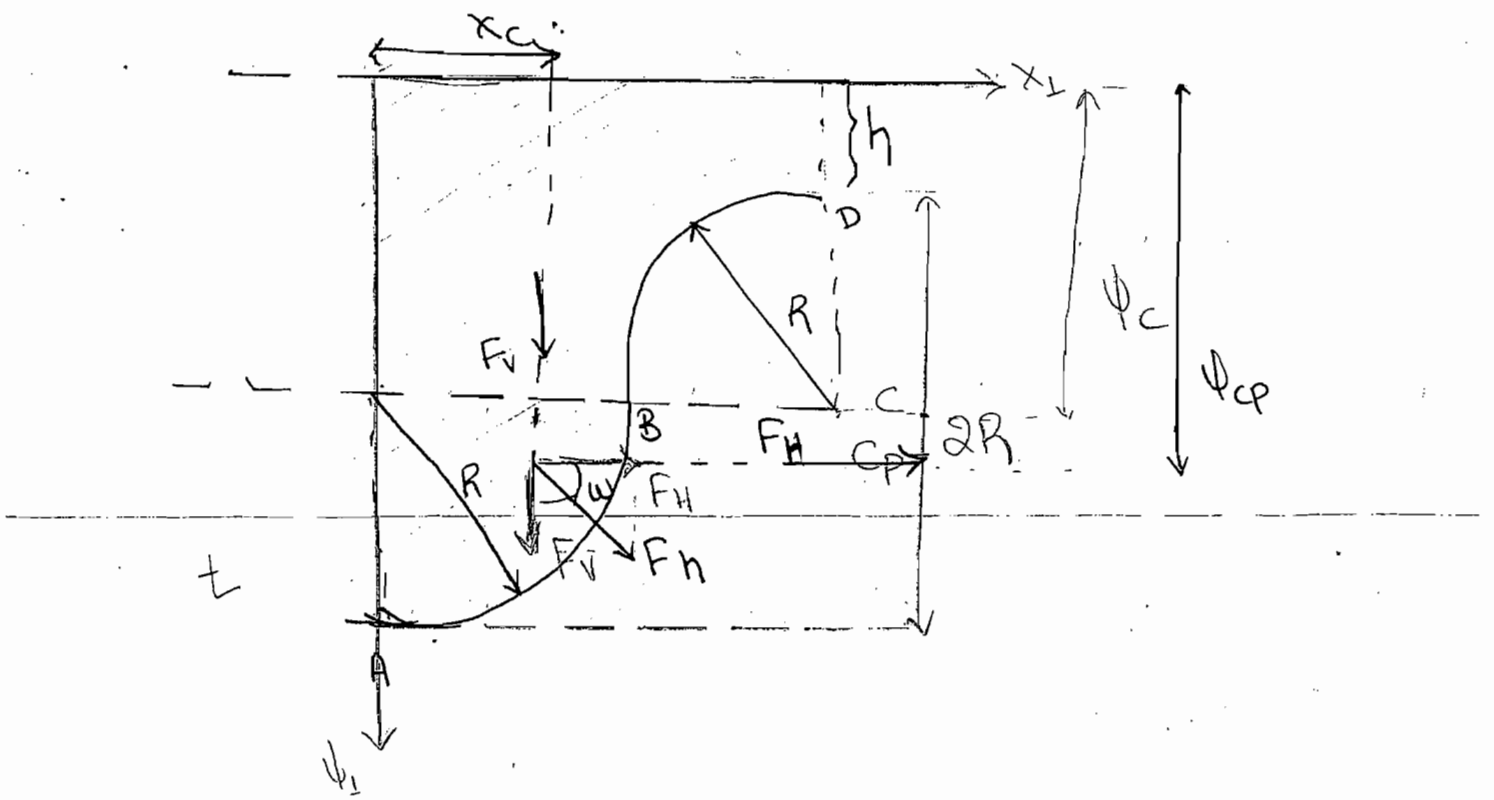


$$\sum M_D^{(+)} = 0 \Longrightarrow R_T \cdot (BD) = F \cdot (DC_p)$$

$$\Longrightarrow R_T \cdot 50 = F \cdot (AD - \psi_{cp}) \Longrightarrow$$

$$R_T \cdot 50 = F(100 - 80{,}9) \Rightarrow \frac{R_T}{F} = 0{,}382$$

Epoxiyin

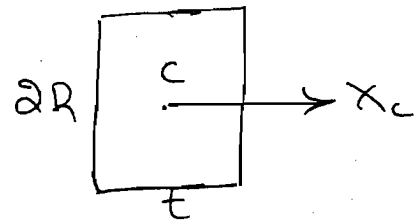


$$F_H = \gamma_w \cdot A \cdot z_c = \gamma_w \cdot (2R \cdot t) \cdot (R+h)$$

z_c: η απόσταση του κέντρου από την ελεύθερη επιφάνεια.

$$\psi_c = R+h \equiv z_c$$

$$I_{x_c x_c} = \frac{t \cdot (2R)^3}{12}$$



$$\psi_{cp} = \psi_c + \frac{I_{x_c x_c}}{A \cdot \psi_c} = \dots$$

$$F_V = \gamma_w \cdot V \quad (1)$$

$$V = A' \cdot t = (R+h)\, 2R\, t = \dots$$

$$x_c = \frac{Q\psi^1 - Q\psi^2 + Q\psi^3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{(R+h)\cdot 2R \cdot R - \frac{\pi R^2}{4}\left(2R - \frac{4R}{3\pi}\right) + \frac{\pi R^2}{4}\frac{4R}{3\pi}}{(R+h)\cdot 2R - \frac{\pi R^2}{4} + \frac{\pi R^2}{4}}$$

$$F_n = \sqrt{F_H^2 + F_V^2}$$

$$\tan\omega = \frac{F_V}{F_H} \Rightarrow \omega = \dots$$

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

↓

τάση, ανοχή του υλικού

$$\frac{F}{\pi r^2} = \frac{F}{A} \le \sigma_w$$

$$\sigma \le \sigma_w$$

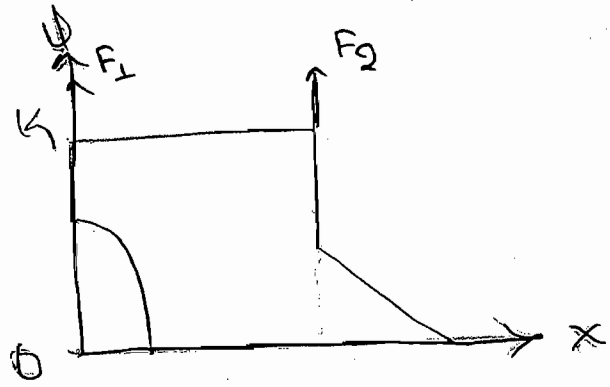
8/1/2010

ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι → ΑΣΚΗΣΕΙΣ

9η Εβδομάδα

1 $t = 10mm = 10^{-2} m$

$\gamma = 78 kN/m^3$



$x_c = \quad = 1,24 m$

$\Sigma \vec{F_y} = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 - W = \gamma A t = 78 \cdot 2,05 \cdot 10^{-2} \ kN = 1,6 kN$

$\Sigma \vec{M_K} \circlearrowleft + = 0 \Rightarrow W \cdot x_{1c} = F_2 \cdot 2 \Rightarrow F_2 = 1 kN$

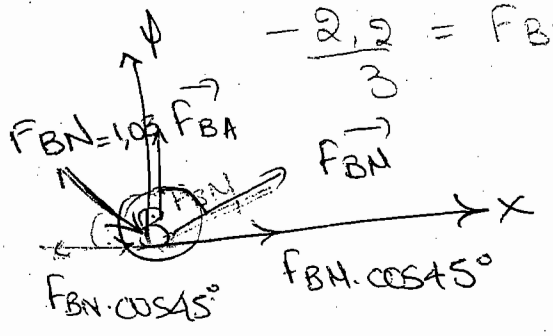
<u>άρα</u> $F_1 = 0,6 kN$

$2j - 3 = m$

$2 \cdot 13 - 3 = 23$ ράβδους

$\Sigma \vec{M}^{(A)} = 0 \Rightarrow 0,4 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + F_{BN} \cdot \cos\varphi \cdot 3 = 0$ ($\varphi = 45°$)

$-\frac{2,2}{3} = F_{BN} \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow F_{BN} = -1,03 kN$



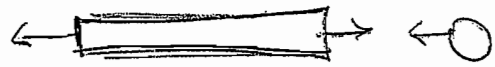
$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{BN} \cdot \cos 45° + F_{BN} \cdot \cos 45° = 0 \Rightarrow F_{BN} = -F_{BN}$

$= -1,03 kN$

$\Rightarrow$ compr/θλίψη

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_{BA} - F_{BN} \cdot \sin 45° - F_{BN} \cdot \sin 45° = 0$

$F_{BA} = 2 \cdot 1,03 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1,46 kN$ | tension = εφελκυσμός



4] $\sum M_Z = 0 \Leftrightarrow -R_A \cdot 6 - H_A \cdot 3{,}48 - 4 \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow \boxed{H_A = 5{,}77\ kN}$

$\tan 30° = \frac{ZE'}{AE'} \Rightarrow ZE = 0{,}58 \cdot 6 = 3{,}48$

$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow A_x + 2 = H_A$ (1)

$\sum \vec{F}_\phi = 0 \Rightarrow A_\phi - 12 + R_A = 0$ (2)

$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_A \cdot 12 - 4 \cdot 10 - 4 \cdot 6 - 4 \cdot 2 = 0$

$R_A = \frac{40 + 24 + 8}{12} = 6\ kN$

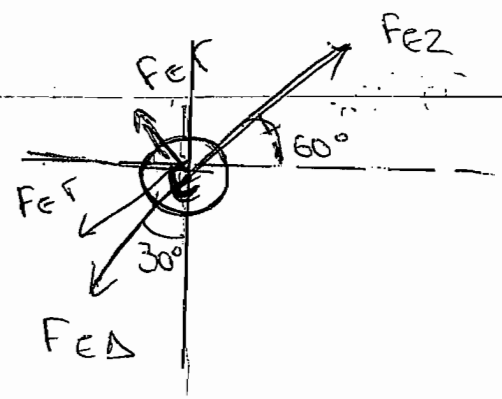
(2) $\rightarrow A_\phi = 6\ kN$

(1) $\rightarrow A_x = 3{,}77\ kN$

$\sum \vec{M}_A = 0 \Rightarrow -4 \cdot 2 + F_{E2} \cdot \sin\varphi \cdot 5 - F_{E2} \cdot \cos\varphi \cdot (EE') = 0$

$\Delta EE'$: $\tan 60° = \frac{EE'}{1} \Rightarrow EE' = 1{,}732\ m$

$F_{E2} = 2{,}91\ kN$



$EE'' = EE' - B\Gamma$

$EE' = 1{,}732\ m$

$\Delta B\Gamma$: $\tan 30° = \frac{B\Gamma}{2}$

$\Rightarrow B\Gamma = 1{,}15\ m$

$\Rightarrow EE'' = 0{,}58\ m$

$\Gamma\Gamma''E$: $\tan\hat{\omega} = \frac{3}{0{,}58} \Rightarrow \omega = 79{,}05^{\circ}$

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \boxed{F_{E\Gamma} = 0}$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{EZ} = F_{E\Delta} = 2{,}31\ kN$

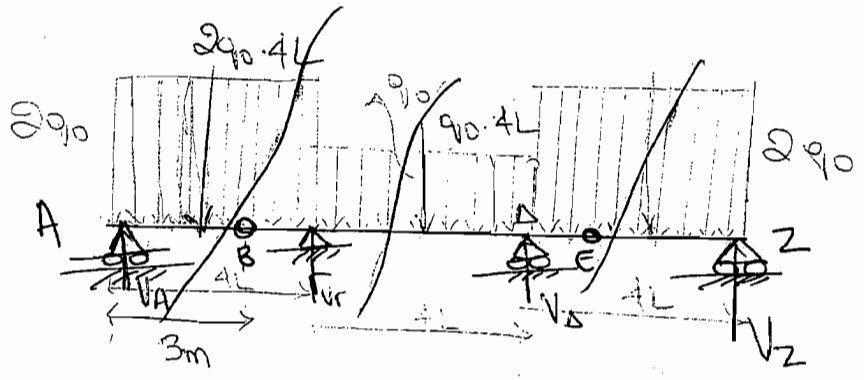
$F_{\Gamma\Delta} = -4\ kN$ ΘΛΙΨΗ

10η Σειρά → Ασκήσεις

15/01/10

2

4]



$\sum \vec{F_y} = 0 \Rightarrow V_A + V_\Gamma + V_\Delta + V_Z - 160 - 80 - 160 = 0$

Όμως $V_A = V_Z$

και $V_\Gamma = V_\Delta$

$\Rightarrow 2V_A + 2V_\Gamma = 400$

$\Rightarrow \boxed{V_A + V_\Gamma = 200}$ (1)

$\sum M_A \circlearrowleft (+) = 0 \Rightarrow -160 \cdot 2 + V_\Gamma \cdot 4 - 80 \cdot 6 + V_\Delta \cdot 8 - 160 \cdot 10 + V_Z \cdot 12 = 0$

$\Rightarrow 4V_\Gamma + 8V_\Delta + 12V_Z = 2400$

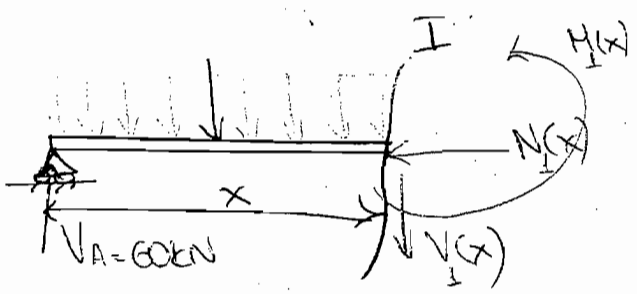
$\xRightarrow{V_\Gamma = V_\Delta} 12V_\Gamma + 12V_Z = 2400$ (2)

$\sum M_B^{\text{αριστ.}} \circlearrowleft (+) = 0 \Rightarrow -V_A \cdot \cancel{3} + 160 \cdot \frac{\cancel{3}}{2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{V_A = 60\,kN = V_Z}$ (3)

$(1) \xRightarrow{(3)} \boxed{V_\Gamma = 140\,kN = V_\Delta}$

[Η ροπή στα B, E (εσωτ. αριστ.) είναι ίση με 0].

ΤΟΜΗ I : ΑΓ $\quad 0 \le x < 4m$



$\sum \vec{F_x} = 0 \Rightarrow N_1(x) = 0$

$\sum \vec{F_y} = 0 \Rightarrow -V_1(x) + V_A - 40 \cdot x = 0$

$\Rightarrow \boxed{V_1(x) = -40x + 60}$

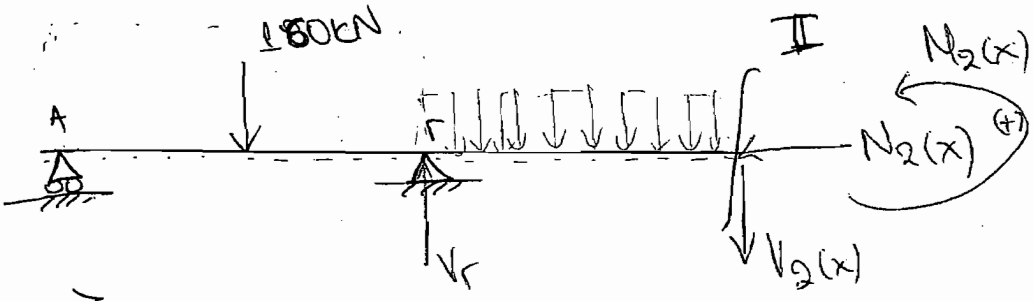
(ΣΔΟ)

$$\sum M_{I}^{(+)} = 0 \Rightarrow M_1(x) - 60.x - 40.x.\frac{x}{2} = 0$$

$$\Rightarrow M_1(x) = 40\frac{x^2}{2} - 60x$$

$$\boxed{M_1(x) = 20x^2 - 60x}$$

TOMH II : (TH) $4 \le x < 6m$.



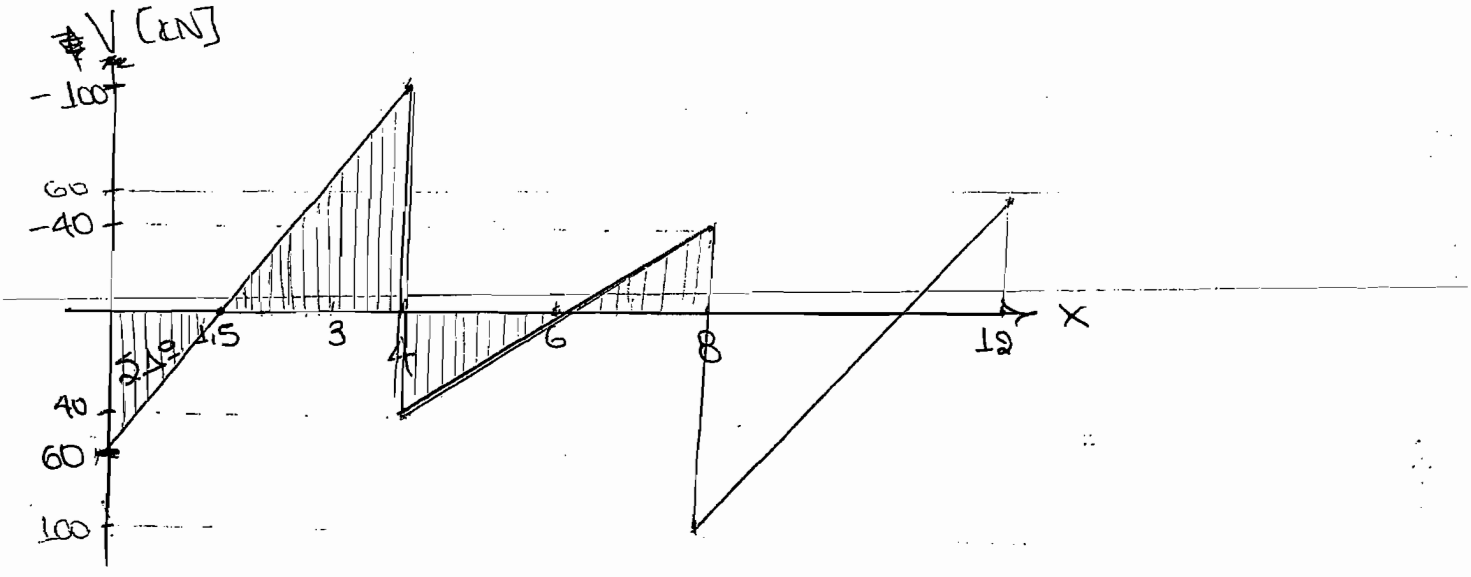
$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow N_2(x) = 0$$

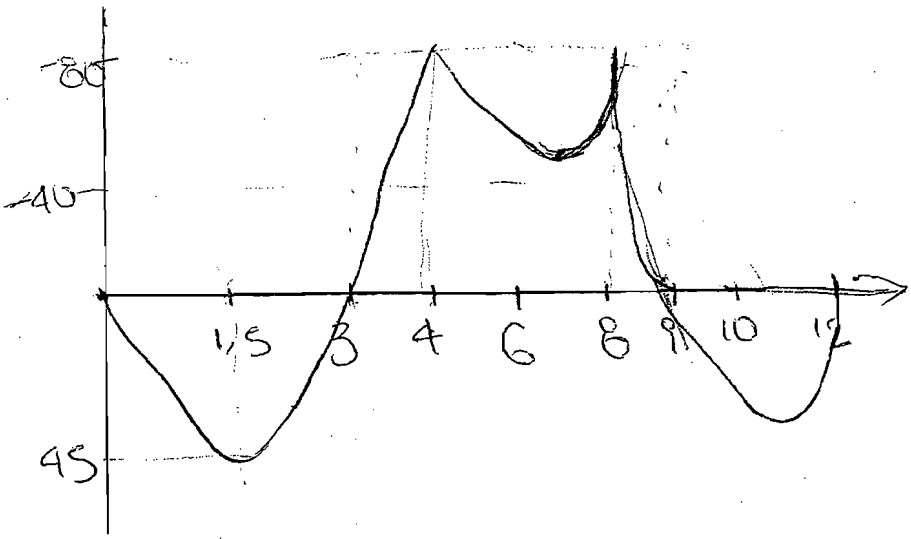
$$\sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow V_2(x) + 160 + 20(x-4) - 200 = 0$$

$$\Rightarrow V_2(x) = -20x + 120$$

$$\sum M_{II}^{(+)} = 0 \Rightarrow M_2(x) + 20(x-4)\frac{(x-4)}{2} + 160(x-2) - 60x - 140(x-4) = 0$$

$$\Rightarrow M_2(x) = -10x^2 + 120x - 400$$





Aok. 7

$$\tan\varphi = \frac{2}{4,5} = \frac{E_\phi}{E_x} \Rightarrow E_x = 2,25\,E_\phi \quad (1)$$

$$\sum \vec{F_x} = 0 \Rightarrow H_A = E_x - 2q_0 \quad (2)$$

$$\sum \vec{F_\phi} = 0 \Rightarrow E_\phi + 24 = V_A \quad (3)$$

$$\sum M_{r\,(A)} = 0 \Rightarrow -(4\cdot 3)\,1,5 + E_x\cdot 2 - E_\phi\cdot 3 = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_{A\,(A)} = 0 \Rightarrow -2q_0\cdot\frac{2}{3}\cdot 4 - (4\cdot 6)\cdot 3 - E_\phi\cdot 6 + E_x\cdot 6 = 0$$

$$\Longrightarrow q_0 = 3,375 \text{ kN/m}$$

$E_x = 27$ kN

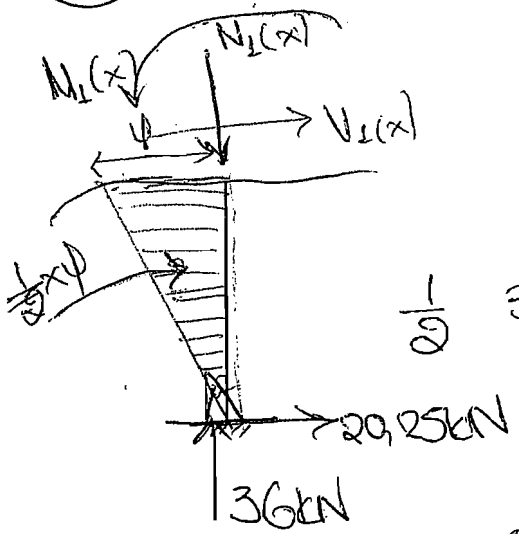
$E_\phi = 12$ kN

$H_A = 20,25$ kN

$V_A = 36$ kN

I

AB: $0 \le x < 4m$



$$\frac{\psi}{\psi_0} = \frac{x}{4} \Rightarrow \psi = 3{,}375\frac{x}{4}$$

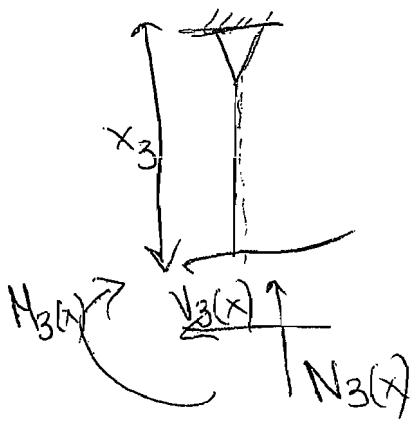
$$\frac{1}{2}\ \frac{3{,}375}{4}x^2$$

$$\sum \vec{F_x} = 0 \Rightarrow V_1(x) = -20{,}25 - \frac{1}{2}\ \frac{3{,}375}{4}x^2$$

$$\sum \vec{F_\psi} = 0 \Rightarrow N_1(x) = 36kN$$

$$\overset{(+)}{\circlearrowleft} \sum M_I = 0 \Rightarrow M_1(x) = -20{,}25x - \frac{1}{2}\cdot\frac{3{,}375}{4}x^2\cdot\frac{1}{3}x$$

TOMH III EA: $0 \le x \le 2m$

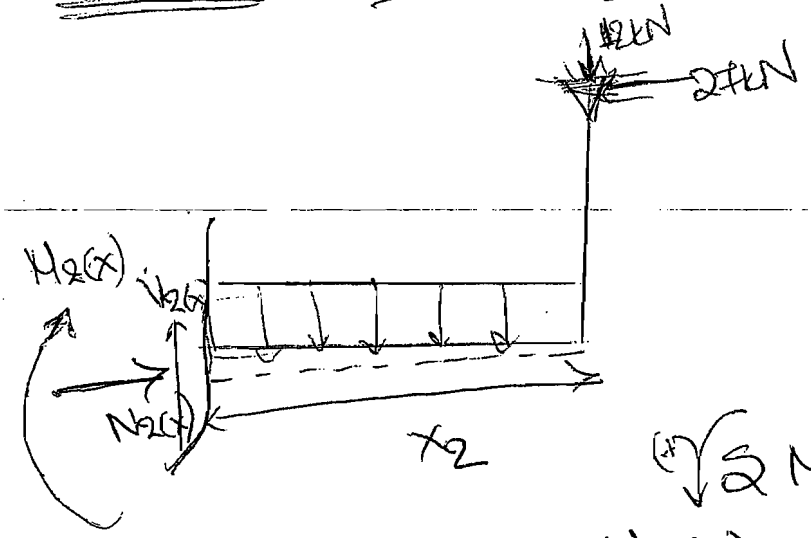


$N_3(x) = 12kN$

$V_3(x) = -27kN$

$M_3(x) = 27x$

TOMH II: AB: $0 \le x_2 < 6m$



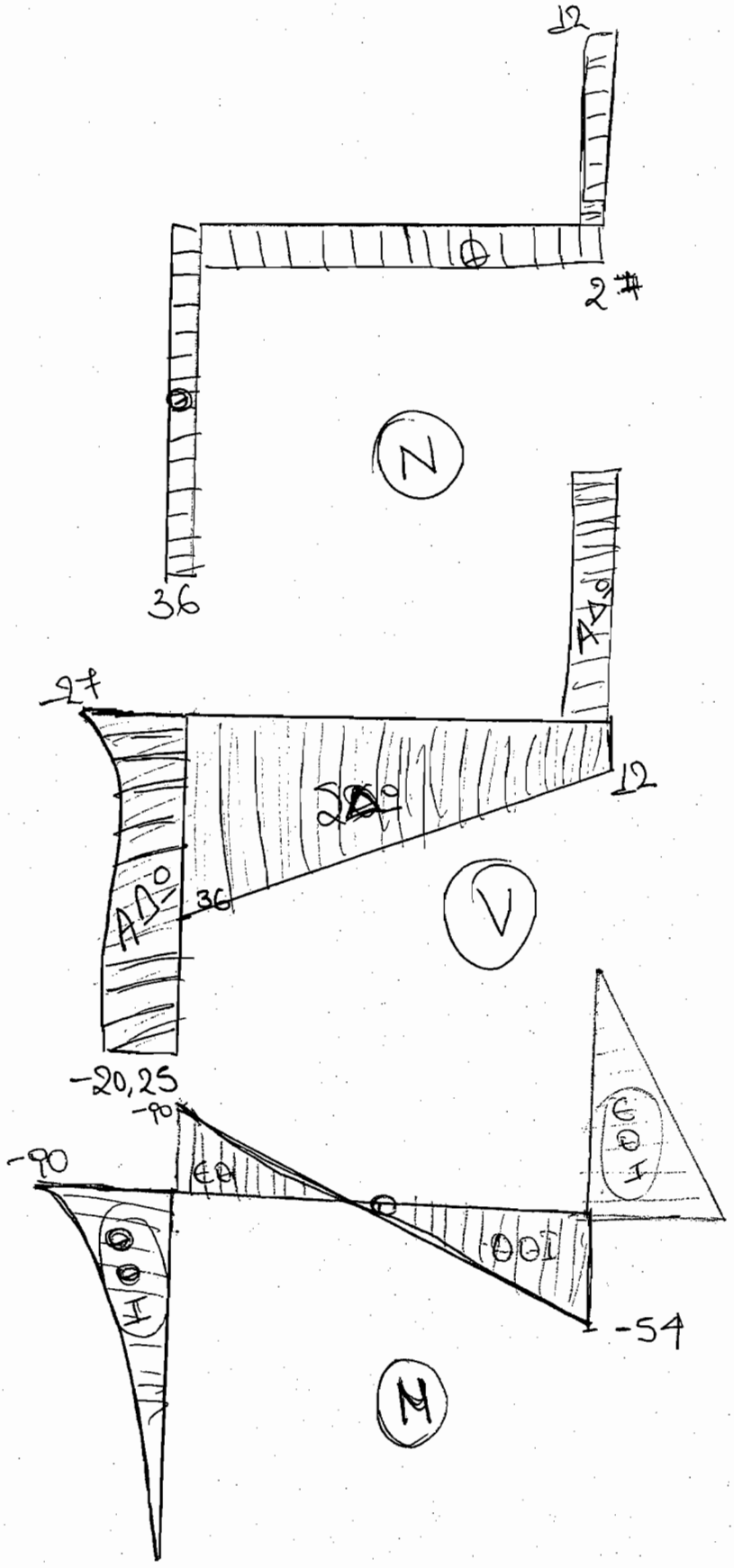
$$\sum \vec{F_x} = 0 \Rightarrow N_2(x) = 27kN$$

$$\sum \vec{F_\psi} = 0 \Rightarrow -12 - 4x_2 + V_2(x) = 0$$

$$\Rightarrow V_2(x) = 4x + 12$$

$$\overset{(+)}{\circlearrowleft} \sum M_{II} = 0 \Rightarrow 12\cdot x - 4x\frac{x}{2} + 27\cdot 2 - M_2(x) = 0$$

$$M_2(x) = 12x - 2x^2 + 54$$


12
2 #
N
36
27
12
36
V
-20,25
-90
-90
-54
M

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ
Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου
Δρ Σ. Κ. Κουρκουλής, Αναπληρωτής Καθηγητής Μηχανικής ΕΜΠ
Τηλέφωνο γραφείου: 210-7721313, 7721263, Τηλέφωνα εργαστηρίων: 7724025, 7724235, 7721317
Τηλεομοιότυπο: 2107721302, Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου: stakkour@central.ntua.gr

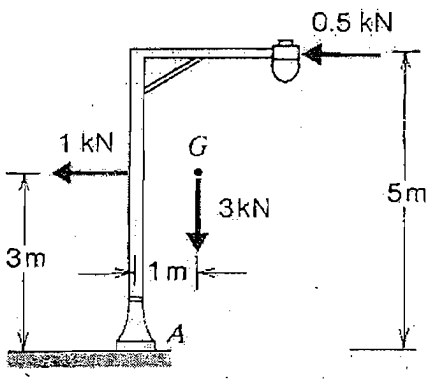
ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι (ΣΤΑΤΙΚΗ)

5η Σειρά ασκήσεων ενισχυτικής διδασκαλίας

ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Άσκηση 1

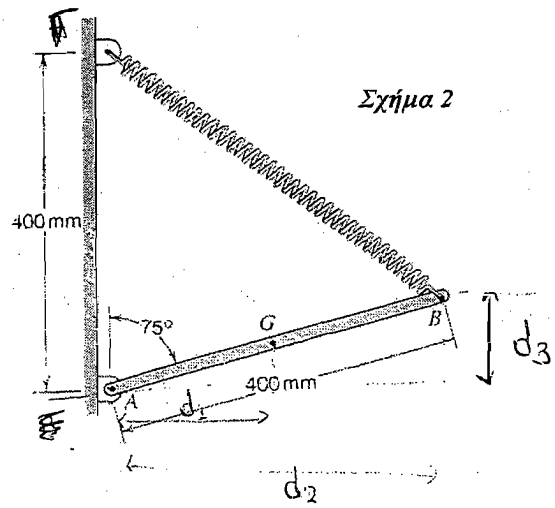
Ο σηματοδότης κυκλοφοριακής ρύθμισης φορτίζεται όπως φαίνεται στο Σχ. 1. Υπολογίστε τις αντιδράσεις στην πάκτωση Α.



Σχήμα 1

Άσκηση 2

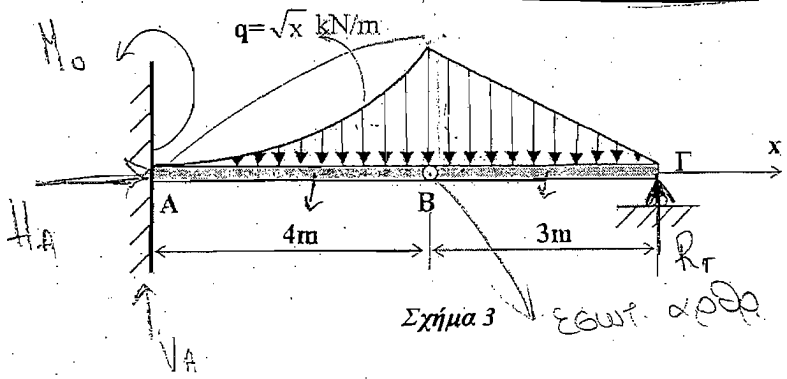
Η σταθερά του ελατηρίου του Σχ.2 είναι ίση με 2 kN/m και το φυσικό του μήκος είναι 400 mm. Αν η ράβδος ΑΒ ισορροπεί στη θέση που απεικονίζεται στο σχήμα, υπολογίστε τη μάζα της ράβδου, γνωρίζοντας ότι το κέντρο μάζας της είναι στο μέσο G.



Σχήμα 2

Άσκηση 3
(Θέμα Ακαδημαϊκού Έτους 2006-07)

Η αρθρωτή δοκός ΑΒΓ (άρθρωση στο Β) στηρίζεται με πάκτωση στο Α και κύλιση στο Γ, φέρει δε κατανεμημένο φορτίο όπως φαίνεται στο Σχ. 3. Υπολογίστε τις αντιδράσεις στηρίξεων και τη δύναμη που μεταβιβάζεται στην άρθρωση Β.

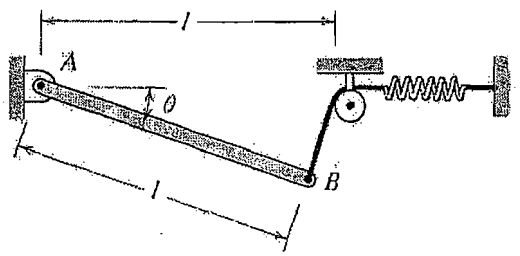


Σχήμα 3

Άσκηση 4

Η ομοιόμορφη ράβδος ΑΒ στηρίζεται με τη βοήθεια άρθρωσης στο Α και ενός καλωδίου που ενώνεται με οριζόντιο ελατήριο όπως φαίνεται στο Σχ. 4. Το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος όταν η ράβδος είναι οριζόντια (θ=0). Η σταθερά του ελατηρίου είναι 2.5 kN/m. Το μήκος της ράβδου είναι l=600 mm. Θεωρώντας την τροχαλία ιδανική:

1. Υπολογίστε τη μάζα της ράβδου αν στη στατική θέση ισορροπίας θ=30°.
2. Εκφράστε τη μάζα της ράβδου συναρτήσει της σταθεράς του ελατηρίου k, του μήκους *l* και της γωνίας θ στη στατική θέση ισορροπίας.



Σχήμα 4

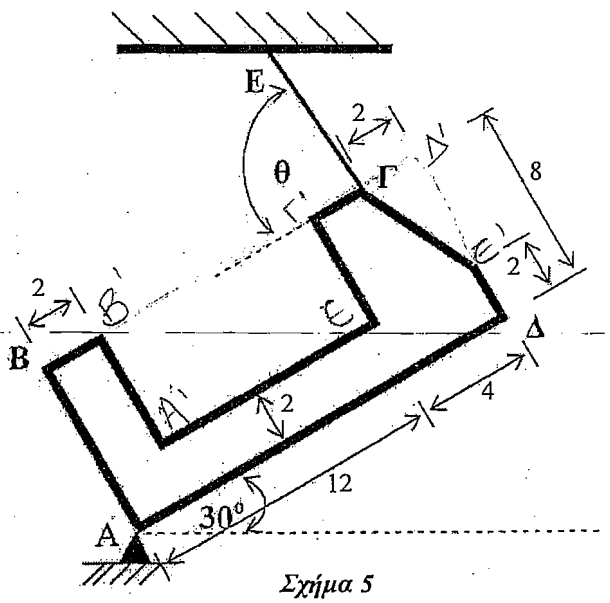
Άσκηση 5

(Θέμα εξετάσεων Ακαδημαϊκού Έτους 2004-05)

Το επίπεδο σώμα του Σχ. 5 στηρίζεται με άρθρωση στο Α και το σχοινί ΓΕ.

1. Υπολογίστε το γεωμετρικό κέντρο του σώματος.
2. Να βρεθεί η γωνία θ για την οποία η δύναμη στο σχοινί ΓΕ καθίσταται η μικρότερη δυνατή.
3. Για τη γωνία αυτή να υπολογισθούν οι αντιδράσεις στήριξης του σώματος (πάχος t=1 cm και ειδικό βάρος του υλικού του σώματος $\gamma=10^5$ N/m^3).

Οι διαστάσεις στο σχήμα δίνονται σε cm.



Σχήμα 5

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ
Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου
Δρ Σ. Κ. Κουρκουλής, Αναπληρωτής Καθηγητής Μηχανικής ΕΜΠ
Τηλέφωνο γραφείου: 210-7721313, 7721263, Τηλέφωνα εργαστηρίων: 7724025, 7724235, 7721317
Τηλεομοιότυπο: 2107721302, Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου: stakkour@central.ntua.gr

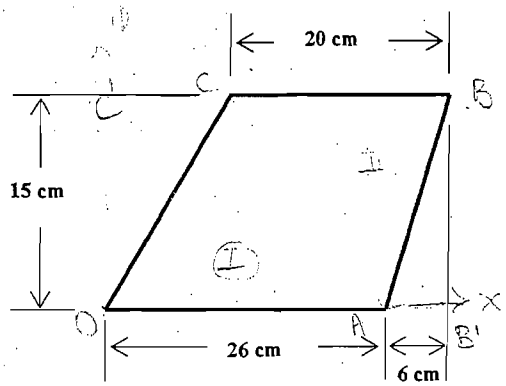
ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι (ΣΤΑΤΙΚΗ)

4η Σειρά ασκήσεων ενισχυτικής διδασκαλίας

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥ ΚΕΝΤΡΟΥ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

Άσκηση 1

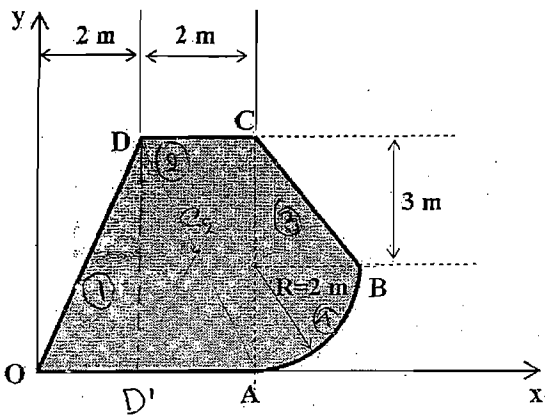
Προσδιορίστε το γεωμετρικό κέντρο της τραπεζοειδούς επιφάνειας που απεικονίζεται στο Σχ. 1.



Σχήμα 1

Άσκηση 2

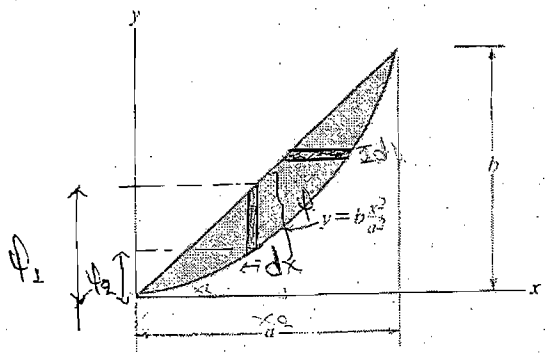
Υπολογίστε την επιφανειακή ροπή πρώτης τάξης της επιφάνειας OABCDO ως προς το σύστημα αναφοράς του Σχ. 2 και προσδιορίστε το γεωμετρικό του κέντρο.
Σημείωση: Το τμήμα AB είναι τεταρτοκύκλιο.



Σχήμα 2

Άσκηση 3

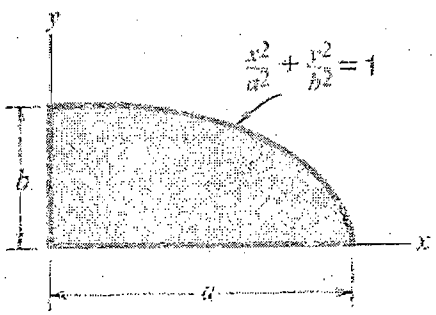
Προσδιορίστε το γεωμετρικό κέντρο της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας του Σχ. 3.



Σχήμα 3

Άσκηση 4

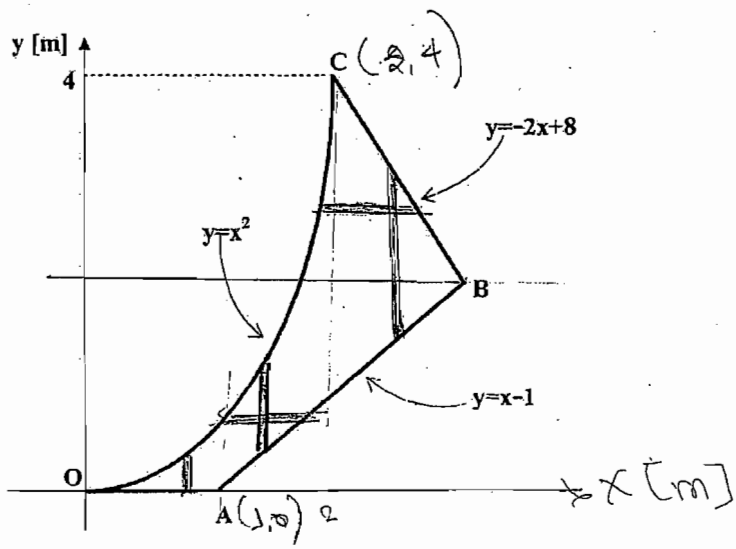
Προσδιορίστε το γεωμετρικό κέντρο της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας του Σχ. 4.



Σχήμα 4

Άσκηση 5

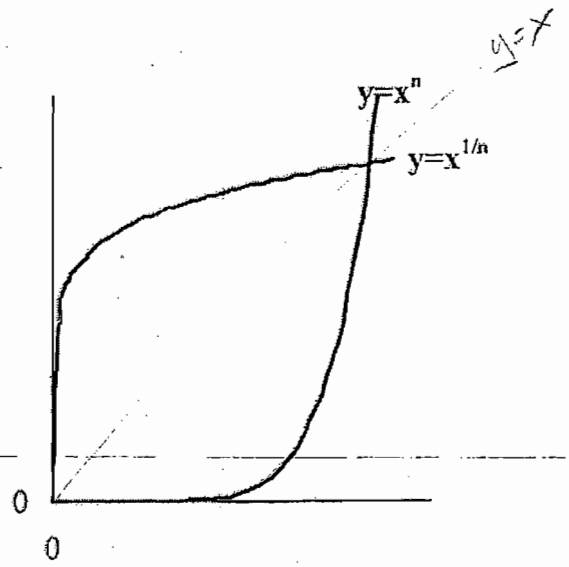
Υπολογίστε την επιφανειακή ροπή πρώτης τάξης της επιφάνειας OABCO ως προς το σύστημα αναφοράς που απεικονίζεται στο Σχ. 5 και προσδιορίστε το γεωμετρικό του κέντρο.



Σχήμα 5

Άσκηση 6

Να προσδιορισθεί το γεωμετρικό κέντρο της επιφάνειας του Σχ. 6 που περικλείεται μεταξύ των καμπύλων $y=x^n$ και $y=x^{1/n}$, όπου n φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1, συναρτήσει της παραμέτρου n. Τι συμβαίνει όταν $n\to\infty$ και τι συμβαίνει για $n\to 1$;



Σχήμα 6

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ
Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου
Δρ Σ. Κ. Κουρκουλής, Αναπληρωτής Καθηγητής Μηχανικής ΕΜΠ
Τηλέφωνο γραφείου: 210-7721313, 7721263, Τηλέφωνα εργαστηρίων: 7724025, 7724235, 7721317
Τηλεομοιότυπο: 2107721302, Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου: stakkour@central.ntua.gr

ΕΜΠ.
Σ. Εφ.
Τ Μηχ.

ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι.

Ημερ. Αναφ. 30
Ημερ. Παρασ. 24 Νοεμβ.

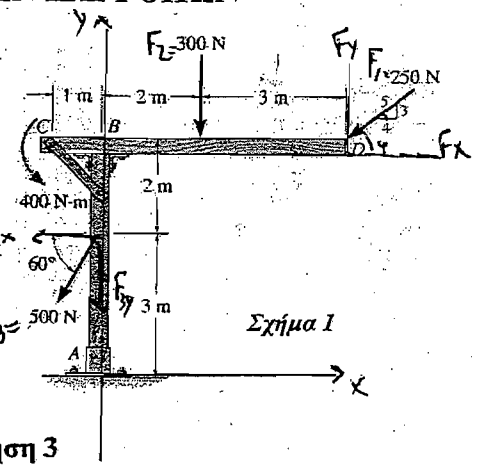
ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι (ΣΤΑΤΙΚΗ)

3η Σειρά ασκήσεων ενισχυτικής διδασκαλίας

ΑΝΑΓΩΓΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΚΑΙ ΡΟΠΩΝ

Άσκηση 1 ✓

Αντικαταστήστε τη φόρτιση του πλαισίου του Σχ.1 με μια συνισταμένη δύναμη και προσδιορίστε το σημείο που τέμνει η γραμμή εφαρμογής της το μέλος CD.



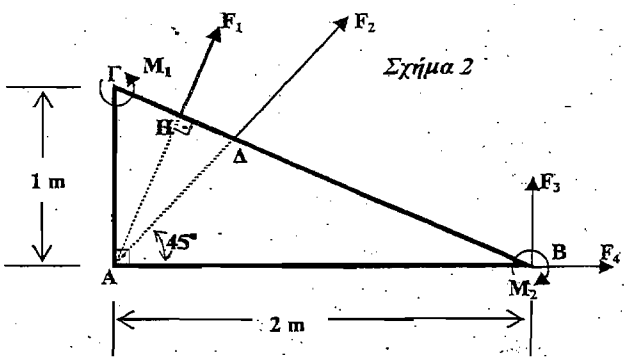
Σχήμα 1

Άσκηση 2

(Θέμα Ενδιάμεσης Εξέτασης Ακ. Έτους 2002-3)

Να αναχθεί το σύστημα δυνάμεων και ροπών του Σχ.2 στο απλούστερο δυνατό. Τα μέτρα των δυνάμεων είναι F_1=α N, F_2=β N, F_3=(α-β+2)/2 N και F_4=(α+β)/2 N. Τα μέτρα των ροπών είναι M_1=2 Nm και M_2=4 Nm.

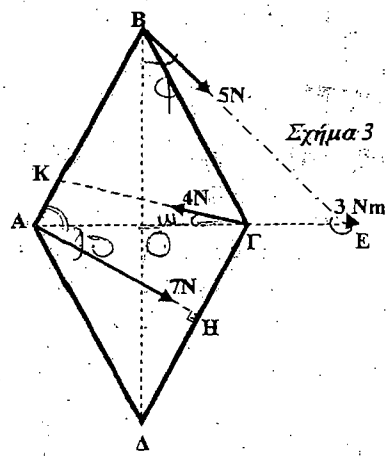
α = ο αριθμός γραμμάτων του ονόματός σας
β = ο αριθμός γραμμάτων του επωνύμου σας



Σχήμα 2

Άσκηση 3

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του Σχ.3 είναι ρόμβος με ημιδιαγωνίους (ΟΒ)=2(ΟΑ)=4m. Ισχύει ότι (ΑΚ)=(ΑΒ)/4 και ότι (ΓΕ)=(ΟΓ). Να αναχθεί το σύστημα δυνάμεων και ροπών στο απλούστερο δυνατό.

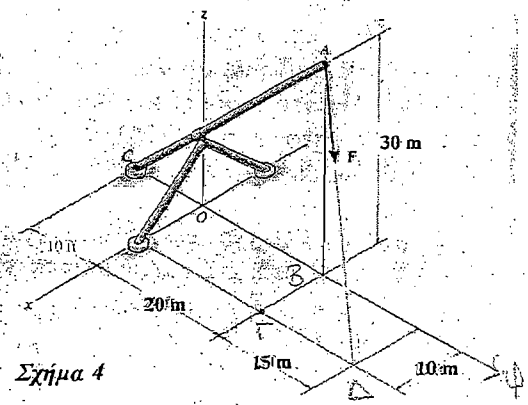


Σχήμα 3

Άσκηση 4

Αντικαταστήστε τη δύναμη **F** του Σχ.4, που έχει μέτρο (α) N και δρα στο σημείο A, με μια ισοδύναμη δύναμη και μια ροπή στο σημείο C.

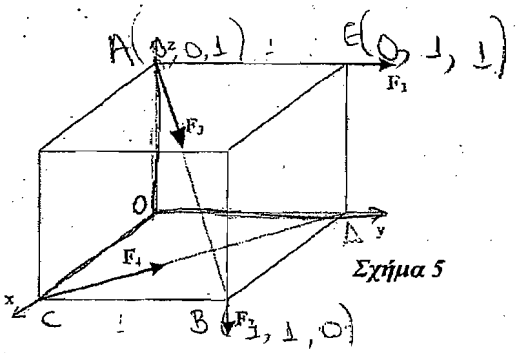
α = ο αριθμός γραμμάτων του επωνύμου σας



Σχήμα 4

Άσκηση 5
(Θέμα επαναληπτικής εξέτασης Ακαδ. Έτους 2000-01)

Στις κορυφές κύβου ακμής 1 m ασκούνται οι τέσσερεις δυνάμεις που φαίνονται στο Σχ. 4. Τα μέτρα τους είναι F_1=400 N, F_2=400 N, F_3=400$\sqrt{3}$ N και F_4=400$\sqrt{2}$ N. Να αναχθεί το σύστημα στο απλούστερο δυνατό.



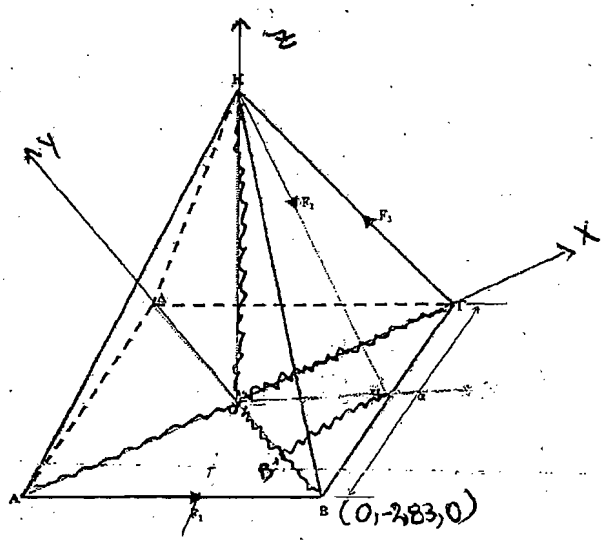
Σχήμα 5

Άσκηση 6
(Θέμα επαναληπτικής εξέτασης Ακαδ. Έτους 2008-09)

Η τετραγωνικής βάσης (α=4 m) κανονική πυραμίδα ΚΑΒΓΔ του Σχ.6 έχει ύψος ΟΚ=6 m. Στην πυραμίδα δρουν τρεις δυνάμεις. Η $\mathbf{F_1}$ μέτρου 4 N κατά μήκος της ακμής ΑΒ, η $\mathbf{F_2}$ μέτρου 3 N κατά μήκος της διαμέσου ΚΗ του τριγώνου ΚΒΓ και η $\mathbf{F_3}$ μέτρου 3 N κατά μήκος της ακμής ΓΚ.

1. Να αναχθεί το σύστημα των τριών δυνάμεων {$\mathbf{F_1}$,$\mathbf{F_2}$, $\mathbf{F_3}$} σε σύστημα μίας δύναμης και μίας ροπής {**R**, **ΣΜ**} στο σημείο Κ.
2. Να υπολογισθεί η γωνία μεταξύ των **R** και **ΣΜ**.
3. Να υπολογισθούν οι συνιστώσες $\mathbf{R_n}$ και $\mathbf{R_t}$ της **R** που είναι αντίστοιχα κάθετη και εφαπτομενική στο επίπεδο (ΑΔΚ).
4. Να υπολογισθεί η ροπή της **R** ως προς την ευθεία ΑΜ (Μ το μέσο του ύψους ΚΟ της πυραμίδας).

$M_R \cdot \vec{e}_{AM} = M_R^{AM} = (M_R^A \cdot \vec{e}_{AM}) \cdot \vec{e}_{AM}$

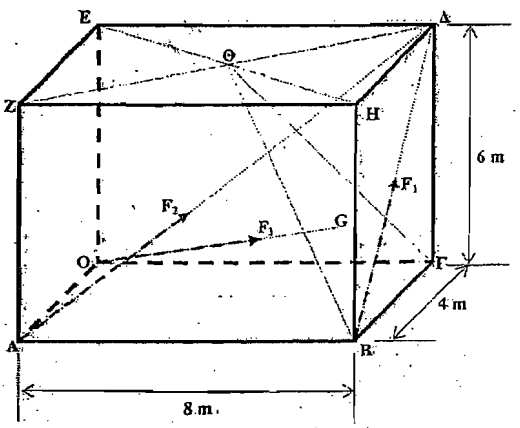


Σχήμα 6

Άσκηση 7
(Θέμα τελικής εξέτασης Ακαδημαϊκού Έτους 2008 - 2009)

Στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο του Σχ.7 δρουν τρεις δυνάμεις. Η $\mathbf{F_1}$ μέτρου (α) N κατά μήκος της διαγωνίου ΒΔ, η $\mathbf{F_2}$ μέτρου (β) N κατά μήκος της κυρίας διαγωνίου ΑΔ και η $\mathbf{F_3}$ μέτρου (α+β)/2 N κατά μήκος της ΟG (G το γεωμετρικό κέντρο του τριγώνου ΘΒΓ).

1. Να αναχθεί το σύστημα των δυνάμεων {$\mathbf{F_1}$,$\mathbf{F_2}$,$\mathbf{F_3}$} σε σύστημα δύναμης και ροπής {**R**,**ΣΜ**} στο Ο.
2. Να υπολογισθεί η γωνί α μεταξύ των **R** και **ΣΜ**.
3. Να υπολογισθεί η συνιστώσα της **ΣΜ** που είναι παράλληλη με την **R**.
4. Να υπολογισθεί η συνιστώσα της **R** που είναι κάθετη στο επίπεδο (ΟΔΗ).
5. Να υπολογισθεί η ροπή της **R** ως προς της ευθεία ΒG



Σχήμα 7

α = ο αριθμός γραμμάτων του ονόματός σας
β = ο αριθμός γραμμάτων του επωνύμου σας

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ
Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου
Δρ Σ. Κ. Κουρκουλής, Αναπληρωτής Καθηγητής Μηχανικής ΕΜΠ
Τηλέφωνο γραφείου: 210-7721313, 7721263, Τηλέφωνα εργαστηρίων: 7724025, 7724235, 7721317
Τηλεομοιότυπο: 2107721302, Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου: stakkour@central.ntua.gr

ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι (ΣΤΑΤΙΚΗ)

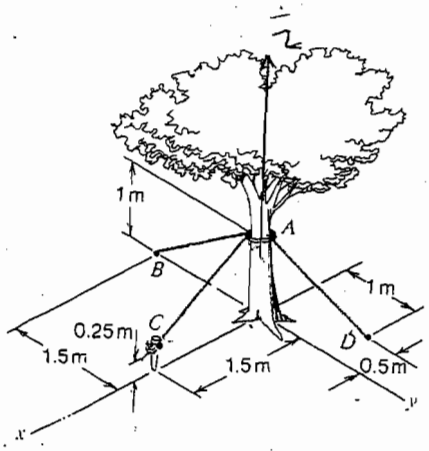
2η Σειρά ασκήσεων ενισχυτικής διδασκαλίας

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΚΑΙ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Άσκηση 1

Το δέντρο του Σχ.1 στηρίζεται με τη βοήθεια τριών καλωδίων και κάθε ένα από αυτά εφελκύεται με μία δύναμη 250 N.

1. Υπολογίστε τη συνιστώσα της δύναμης που ασκείται στο δέντρο από το καλώδιο AB στη διεύθυνση του καλωδίου AC και εκφράστε την ως καρτεσιανό διάνυσμα.
2. Υπολογίστε τη γωνία μεταξύ των καλωδίων AC και AD.
3. Υπολογίστε τη συνιστώσα της συνισταμένης δύναμης που ασκείται στο δέντρο από όλα τα καλώδια στη διεύθυνση του καλωδίου AD και εκφράστε την διανυσματικά.

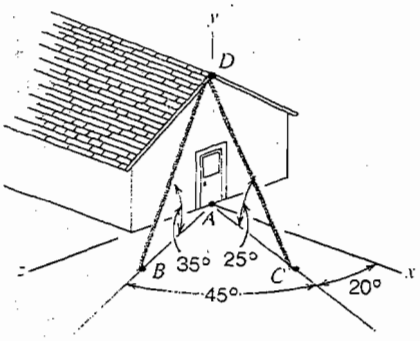


Σχήμα 1

Άσκηση 2

Μέσω των συρματόσχοινων BD και CD ασκούνται στο σημείο D του κτηρίου που φαίνεται στο Σχ.2 δύο δυνάμεις.

1. Υπολογίστε τη γωνία μεταξύ των συρματόσχοινων BD και CD.
2. Αν το μέτρο της δύναμης που ασκεί το συρματόσχοινο CD έχει μέτρο 500 N, υπολογίστε τη συνιστώσα της δύναμης αυτής στη διεύθυνση του καλωδίου DB.
3. Αν το συρματόχοινο BD εφελκύεται με δύναμη 200 N και το συρματόσχοινο CD με δύναμη 100 N, υπολογίστε τη συνιστώσα της συνισταμένης δύναμης που είναι παράλληλη στη γραμμή CD και εκφράστε την ως καρτεσιανό διάνυσμα.

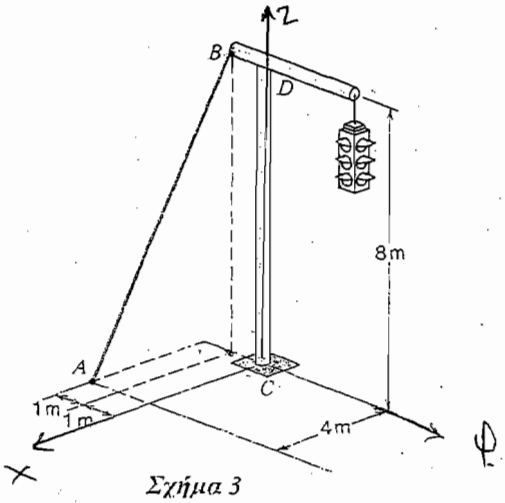


Σχήμα 2

Άσκηση 3

Ο σηματοδότης κυκλοφοριακής ρύθμισης του Σχ. 3 σταθεροποιείται στο έδαφος μέσω του συρματόσχοινου AB που εφελκύεται με δύναμη 4 kN. Υπολογίστε τη ροπή της δύναμης αυτής:

1. Ως προς το σημείο D,
2. Ως προς το σημείο C.

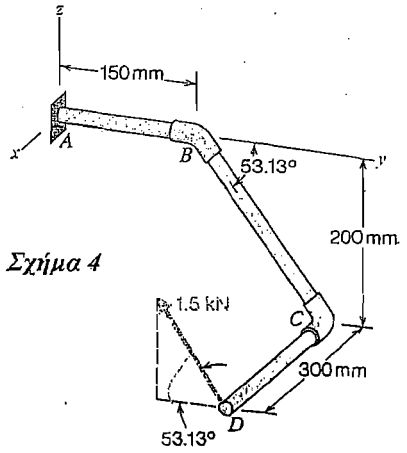


Σχήμα 3

Άσκηση 4

Μια δύναμη μέτρου 1.5 kN ασκείται στο σύστημα των σωληνώσεων όπως φαίνεται στο Σχ. 4. Υπολογίστε τη ροπή της δύναμης αυτής:

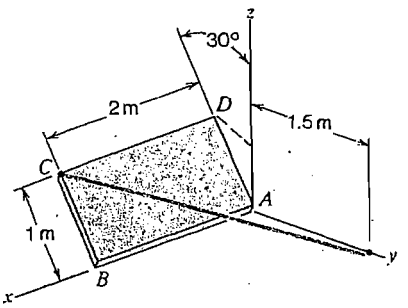
1. Ως προς το σημείο C;
2. Ως προς το σημείο A.



Σχήμα 4

Άσκηση 5

Το ορθογώνιο φύλλο κοντραπλακέ του Σχ. 5 παραμένει στη θέση του με τη βοήθεια ενός συρματόσχοινου όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν το συρματόσχοινο εφελκύεται με μια δύναμη 150 N, υπολογίστε τη ροπή της δύναμης αυτής ως προς το σημείο A.



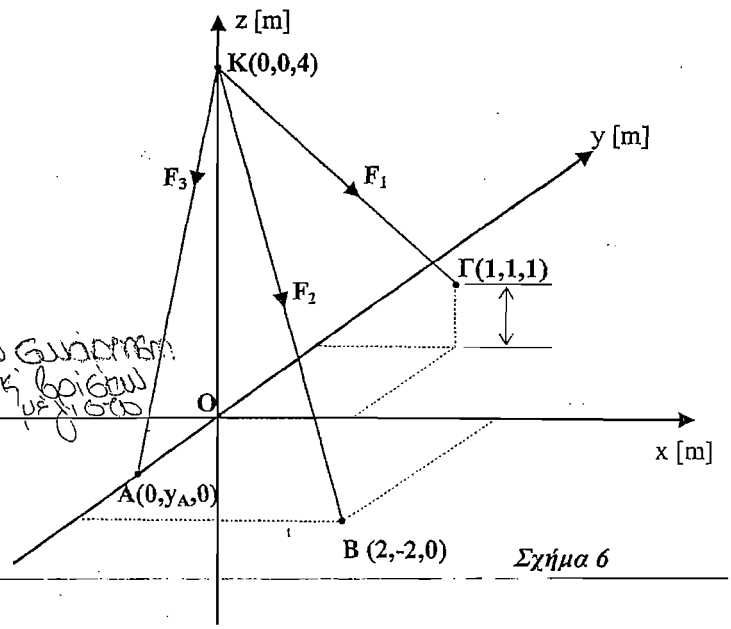
Σχήμα 5

Άσκηση 6

(Θέμα εξετάσεων επαναληπτικής περιόδου Ακαδημαϊκού Έτους 2006 - 2007)

Τρεις συντρέχουσες δυνάμεις, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, μέτρων 2 kN, 3 kN και 1kN αντιστοίχως, εφαρμόζονται στο σημείο K όπως φαίνεται στο Σχ.6.

1. Να υπολογισθεί η τιμή της συντεταγμένης y_A του σημείου A έτσι ώστε το μέτρο της συνισταμένης των τριών δυνάμεων να λάβει τη μέγιστη δυνατή τιμή. → Θαμπω συνισταμ. κ' βρίσκω υψιστο
2. Για τη συγκεκριμένη θέση του A, όπως αυτή προέκυψε από το προηγούμενο ερώτημα, να ευρεθεί η ροπή της συνισταμένης δύναμης ως προς την ευθεία ΑΓ.
3. Να υπολογισθεί η προβολή της ροπής του προηγουμένου ερωτήματος επί της ευθείας ΒΓ.



Σχήμα 6

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ
Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου
Δρ Σ. Κ. Κουρκουλής, Αναπληρωτής Καθηγητής Μηχανικής ΕΜΠ
Τηλέφωνο γραφείου: 210-7721313, 7721263, Τηλέφωνα εργαστηρίων: 7724025, 7724235
Τηλεομοιότυπο: 2107721302, Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου: stakkour@central.ntua.gr

ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι (ΣΤΑΤΙΚΗ)

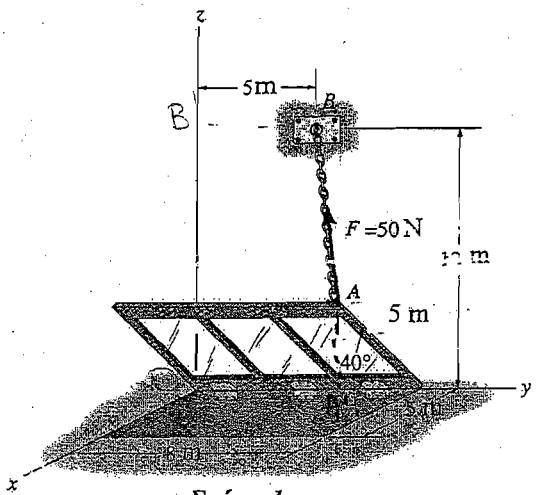
1η Σειρά ασκήσεων ενισχυτικής διδασκαλίας

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ ΤΗΣ ΔΥΝΑΜΗΣ
ΑΝΑΛΥΣΗ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΣΗ ΔΥΝΑΜΕΩΝ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

Άσκηση 1

Το παράθυρο του Σχ. 1 μένει ανοιχτό με τη βοήθεια της αλυσίδας AB.

1. Υπολογίστε το μήκος της αλυσίδας.
2. Εκφράστε τη δύναμη F=50 N της αλυσίδας που ασκείται στο σημείο A ως Καρτεσιανό διάνυσμα.



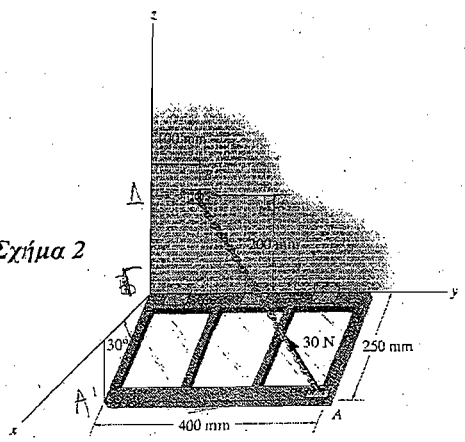
Σχήμα 1

Άσκηση 2

Το παράθυρο του Σχ. 2 μένει ανοιχτό με τη βοήθεια της αλυσίδας AB.

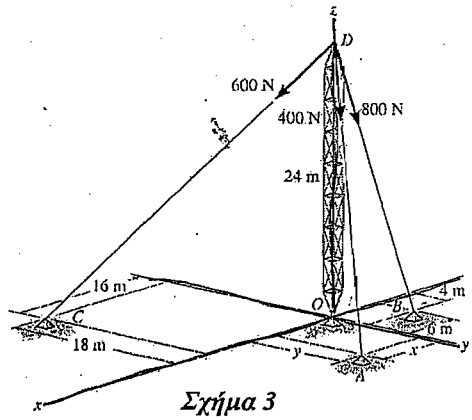
1. Υπολογίστε το μήκος της αλυσίδας.
2. Εκφράστε τη δύναμη F=30 N της αλυσίδας που ασκείται στο σημείο A ως Καρτεσιανό διάνυσμα.

Σχήμα 2



Άσκηση 3

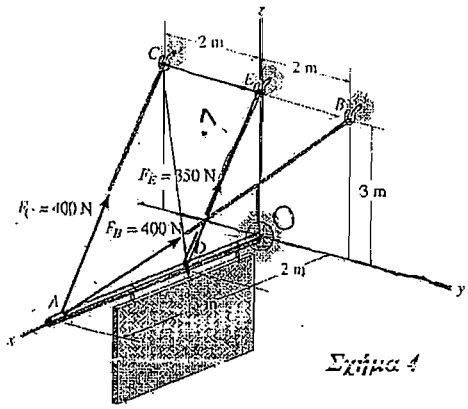
Ο ιστός OD κρατιέται στη θέση του με τη βοήθεια τριών καλωδίων όπως φαίνεται στο Σχ. 3. Θεωρώντας x=20 m και y=15 m, υπολογίστε τη συνισταμένη δύναμη που ασκούν τα καλώδια στον πύργο.



Σχήμα 3

Άσκηση 4

1. Εκφράστε τις τρεις δυνάμεις του Σχ. 4 ως Καρτεσιανά διανύσματα.
2. Υπολογίστε τη συνισταμένη δύναμη των F_B και F_C που δρουν στο σημείο A.



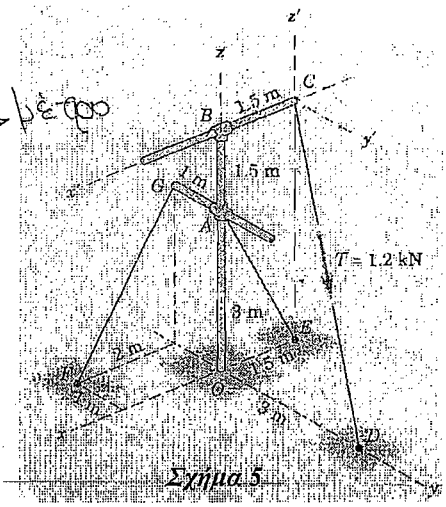
Σχήμα 4

5. Να υπολογιστεί η ροπή της προβολής του ερωτ. 3 ως προς το σημείο B.

Άσκηση 5

Η κατασκευή του Σχ. 5 στηρίζεται μέσω τριών καλωδίων. Ένας σφικτήρας επιβάλλει στο καλώδιο CD εφελκυστική δύναμη T=1.2 kN. → βε-τρο

1. Εκφράστε τη δύναμη T ως διάνυσμα χρησιμοποιώντας το σύστημα xyz.
2. Εκφράστε τη δύναμη T ως διάνυσμα χρησιμοποιώντας το σύστημα x′y′z′. Επηρεάζει το σύστημα αναφοράς το αποτέλεσμα;



Σχήμα 5

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ
Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου
Δρ Σ. Κ. Κουρκουλής, Αναπληρωτής Καθηγητής Μηχανικής ΕΜΠ
Τηλέφωνο γραφείου: 210-7721313, 7721263, Τηλέφωνα εργαστηρίων: 7724025, 7724235, 7721317
Τηλεομοιότυπο: 2107721302, Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου: stakkour@central.ntua.gr

ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι (ΣΤΑΤΙΚΗ)

6η Σειρά ασκήσεων ενισχυτικής διδασκαλίας

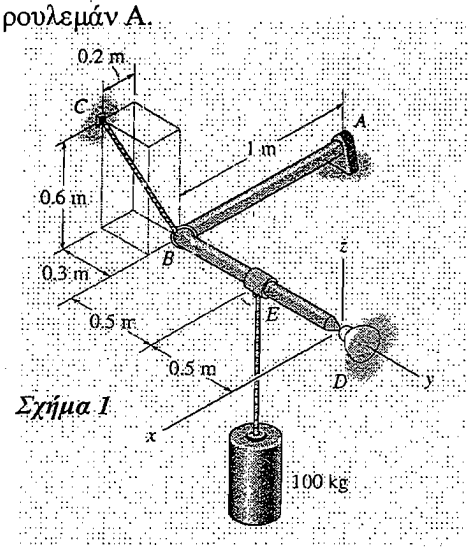
ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

Άσκηση 1

Η οριζόντια δοκός ABD ($\sphericalangle$(ΑΒΔ)=90°) του Σχ.1 στηρίζεται με χωρική άρθρωση στο D, συρματόσχοινο BC και ένσφαιρο τριβέα (ρουλεμάν) στο A. Το συγκεκριμένο ρουλεμάν ασκεί αποκλειστικά και μόνο δυνάμεις κατά τους άξονες z και y.

α. Υπολογίστε τη δύναμη που ασκεί το συρματόσχοινο BC.

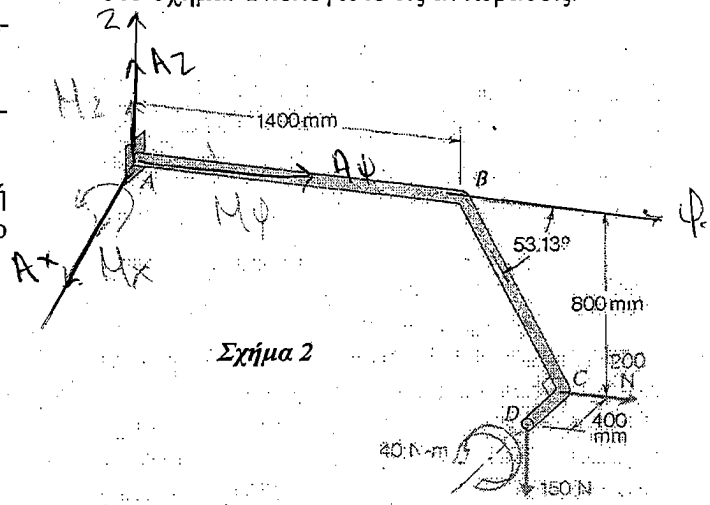
β. Υπολογίστε τη συνολική δύναμη στη χωρική άρθρωση στο D και τη συνολική δύναμη στο ρουλεμάν A.



Σχήμα 1

Άσκηση 2

Η ράβδος ABCD του Σχ.2 στηρίζεται με πάκτωση στο σημείο A και φέρει τη φόρτιση που φαίνεται στο σχήμα. Υπολογίστε τις αντιδράσεις.



Σχήμα 2

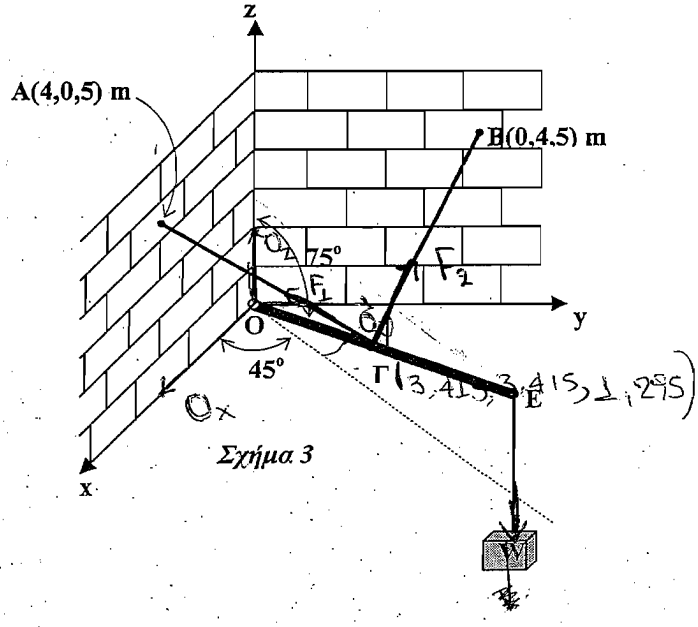
Άσκηση 3

(Θέμα εξετάσεων Ακαδημαϊκού Έτους 2008-09)

Ο αβαρής ιστός OE μήκους L=10m (Σχ.3) στηρίζεται με χωρική άρθρωση στο O και τα σχοινιά ΓA και ΓB (OΓ= L/2). Από το σημείο E αναρτάται βάρος W=2 kN.

α. Υπολογίστε τις δυνάμεις στα σχοινιά ΓA καιΓB.

β. Υπολογίστε την αντίδραση στην άρθρωση στο O.



Σχήμα 3

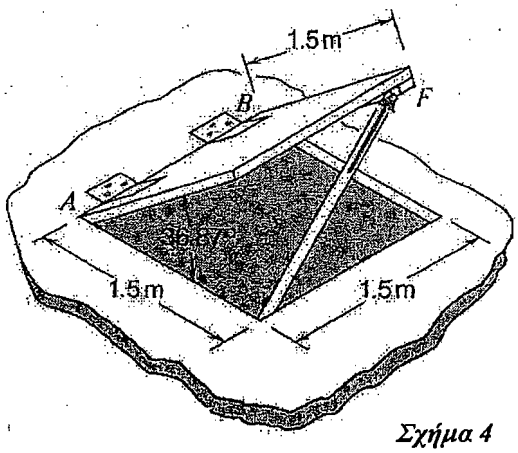
Άσκηση 4

Τετραγωνική καταπακτή, μάζας 250 kg, κρατιέται ανοιχτή με τη βοήθεια μιας ράβδου όπως φαίνεται στο Σχ.4. Υπολογίστε:

α. Το μέγεθος της δύναμης F που ασκεί η ράβδος στην καταπακτή.

β. Τις αντιδράσεις που ασκούνται στην καταπακτή από τους μεντεσέδες στα σημεία A και B.

Οι μεντεσέδες δεν ασκούν ροπές στην πλάκα και επιπλέον ο μεντεσές A δεν ασκεί δύναμη κατά τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής της καταπακτής.



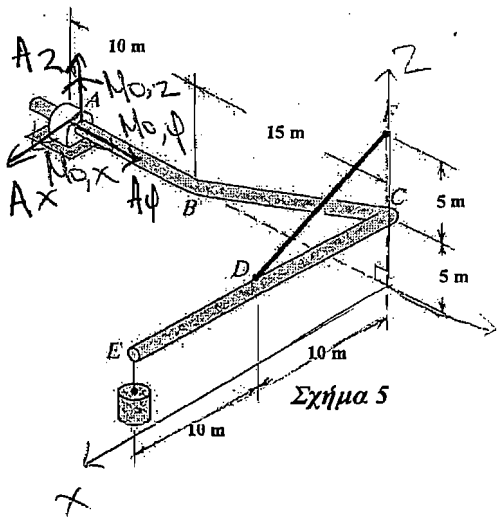
Σχήμα 4

Άσκηση 5

Ένα σώμα μάζας 20 kg είναι αναρτημένο από το φορέα ABCE όπως φαίνεται στο Σχ. 5. Η ράβδος στηρίζεται με έναν ένσφαιρο τριβέα (ρουλεμάν) στο σημείο A και ένα συρματόσχοινο. Ο τριβέας είναι κατασκευασμένος με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτρέπει στο φορέα μόνο να περιστρέφεται γύρω από τον άξονα AB. Υπολογίστε:

α. Την τάση που αναπτύσσεται στο συρματόσχοινο.

β. Τις αντιδράσεις στον τριβέα.



Σχήμα 5

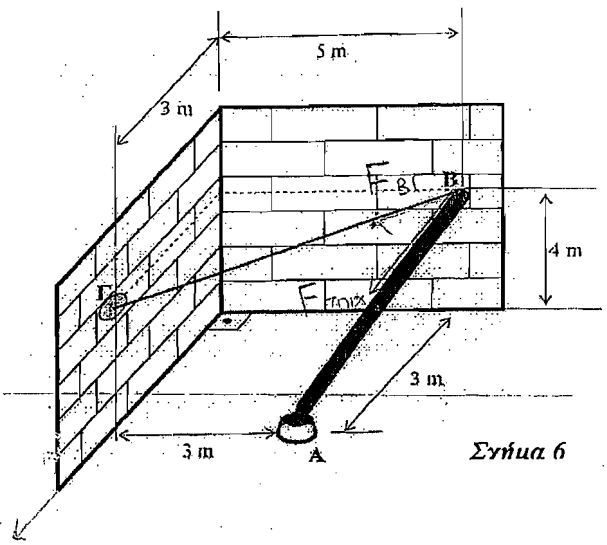
Άσκηση 6
(Θέμα εξετάσεων Ακαδημαϊκού Έτους 2006-07)

Η ομογενής ράβδος AB του Σχ. 6 έχει βάρος 80 N. Η ράβδος στηρίζεται με χωρική άρθρωση (ball-and-socket) στο έδαφος στο σημείο A και ακουμπά σε λείο κατακόρυφο τοίχο στο σημείο B. Η ράβδος στηρίζεται και με το συρματοσχοινο BΓ από το σημείο Γ επίσης κατακόρυφου τοίχου κάθετου στον προηγούμενο τοίχο. Υπολογίστε:

α. Τη δύναμη που ασκείται στο συρματόσχοινο.

β. Την αντίδραση του τοίχου στο σημείο B.

γ. Την αντίδραση στήριξης στη χωρική άρθρωση στο σημείο A.



Σχήμα 6

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ

Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου

Δρ Σ. Κ. Κουρκουλής, Αναπληρωτής Καθηγητής Μηχανικής ΕΜΠ

Τηλέφωνο γραφείου: 210-7721313, 7721263, Τηλέφωνα εργαστηρίων: 7724025, 7724235, 7721317
Τηλεομοιότυπο: 2107721302, Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου: stakkour@central.ntua.gr

ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι (ΣΤΑΤΙΚΗ)

7η Σειρά ασκήσεων ενισχυτικής διδασκαλίας

ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΗ ΡΟΠΗ 2ης ΤΑΞΗΣ

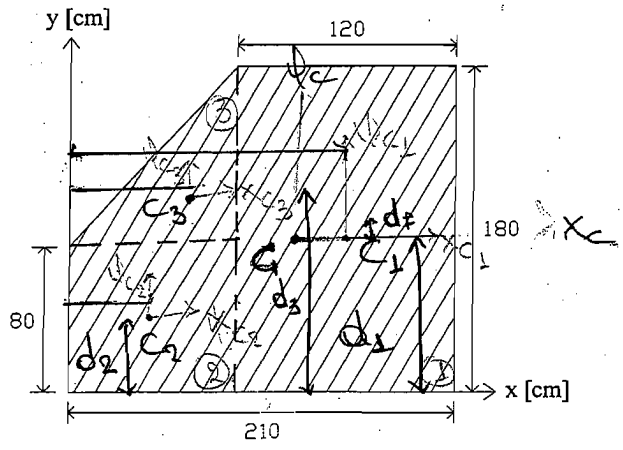
Άσκηση 1

Για τη γραμμοσκιασμένη επιφάνεια του Σχ. 1 υπολογίστε:

α. Τις επιφανειακές ροπές 2ης τάξης I_{xx} και I_{yy}.

β. Τις επιφανειακές ροπές 2ης τάξης $I_{x_cx_c}$ και $I_{y_cy_c}$, όπου x_c και y_c άξονες διερχόμενοι από το γεωμετρικό κέντρο C του σχήματος παράλληλοι με τους άξονες x και y αντίστοιχα.

Οι διαστάσεις του σχήματος είναι σε cm.



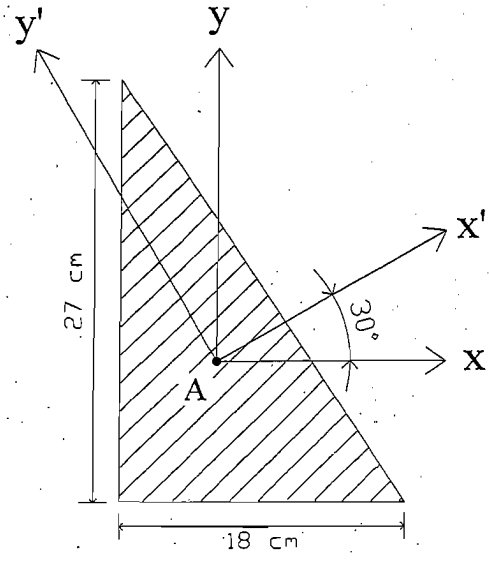
Σχήμα 1

Άσκηση 2

Υπολογίστε τις επιφανειακές ροπές 2ης τάξης $I_{x'x'}$ και $I_{y'y'}$ της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας του Σχ. 2.

Το σημείο Α είναι το γεωμετρικό κέντρο της επιφάνειας.

Δίνεται: $I_{xy}=-(ab)^2/72$, *όπου a, b οι κάθετες πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου*



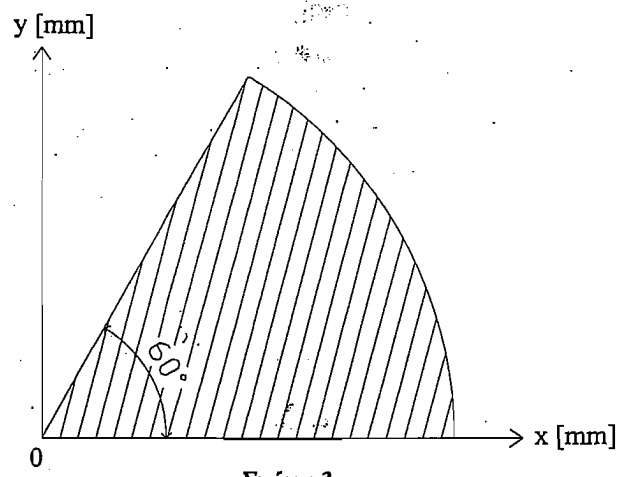
Σχήμα 2

Άσκηση 3

Η γραμμοσκιασμένη επιφάνεια του Σχ.3 είναι κυκλικός τομέας ακτίνας 200 mm. Υπολογίστε:

α. Τις επιφανειακές ροπές $2^{ης}$ τάξης I_{xx} και I_{yy}.

β. Τις επιφανειακές ροπές $2^{ης}$ τάξης I_{xcxc} και I_{ycyc} όπου x_c και y_c άξονες διερχόμενοι από το γεωμετρικό κέντρο C του σχήματος παράλληλοι με τους άξονες x και y αντίστοιχα.

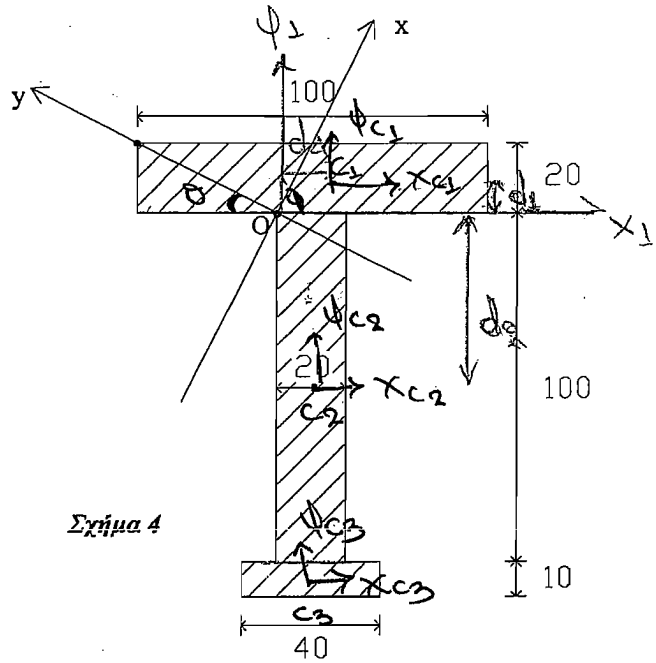


Σχήμα 3

Άσκηση 4

Υπολογίστε τον τανυστή των επιφανειακών ροπών $2^{ης}$ τάξης I_{ij}, i,j=x,y της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας του Σχ. 4.

Οι διαστάσεις του σχήματος είναι σε cm.



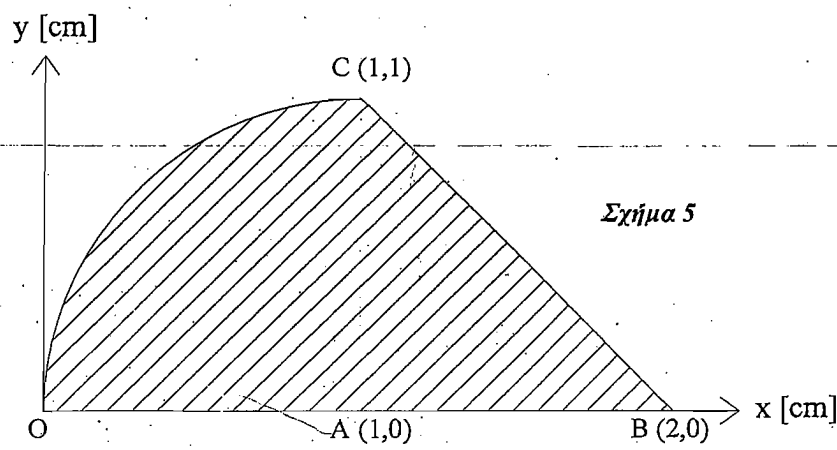
Σχήμα 4

Άσκηση 5

Για τη γραμμοσκιασμένη επιφάνεια του Σχ. 5 (η καμπύλη OC είναι τεταρτοκύκλιο) υπολογίστε:

α. Τις επιφανειακές ροπές $2^{ης}$ τάξης I_{xx} και I_{yy}.

β. Τις επιφανειακές ροπές $2^{ης}$ τάξης I_{xGxG} και I_{yGyG} όπου x_c και y_c άξονες διερχόμενοι από το γεωμετρικό κέντρο G του σχήματος παράλληλοι με τους άξονες x και y αντίστοιχα.



Σχήμα 5

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ
Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου
Δρ Σ. Κ. Κουρκουλής, Αναπληρωτής Καθηγητής Μηχανικής ΕΜΠ
Τηλέφωνο γραφείου: 210-7721313, 7721263, Τηλέφωνα εργαστηρίων: 7724025, 7724235, 7721317
Τηλεομοιότυπο: 2107721302, Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου: stakkour@central.ntua.gr

ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι (ΣΤΑΤΙΚΗ)

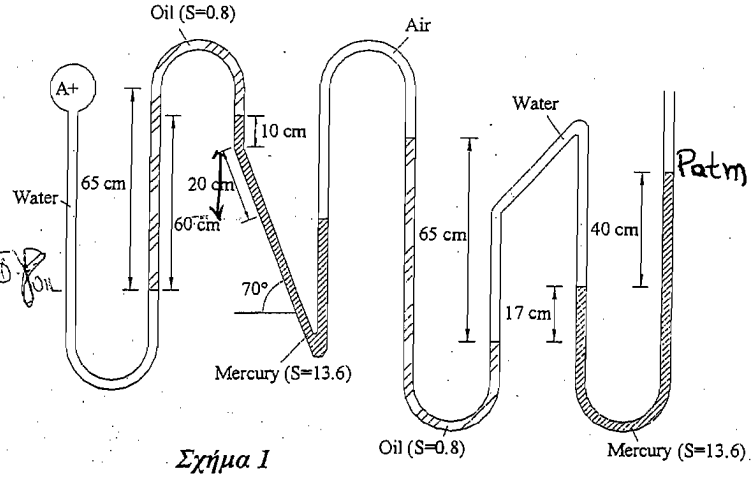
8η Σειρά ασκήσεων ενισχυτικής διδασκαλίας

ΥΔΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

Άσκηση 1

Να ευρεθεί η πίεση στο σημείο Α. Η ατμοσφαιρική πίεση είναι 101.33 kPa και το ειδικό βάρος του νερού είναι $\gamma_{\text{νερού}} = 10^4$ N/m^3.

$P_A = P_{atm} + 0{,}40\,\gamma_{water} + 0{,}17\,\gamma_{Hg} - 0{,}65\,\gamma_{oil}$

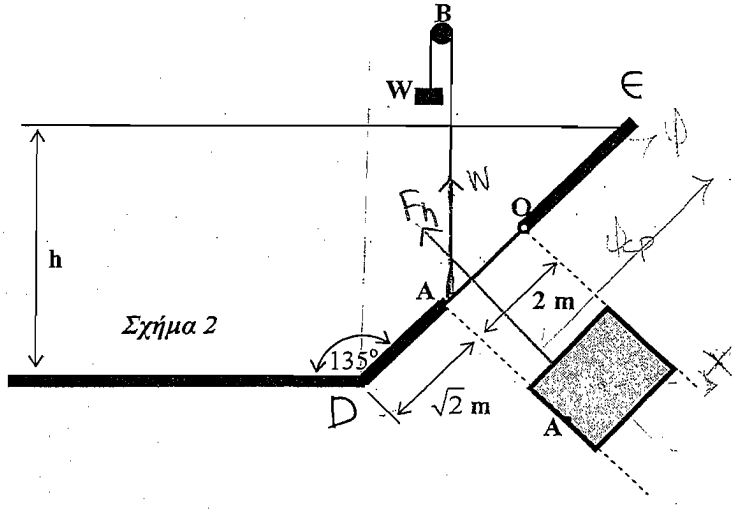


Σχήμα 1

Άσκηση 2

(Θέμα προόδου Ακαδημαϊκού Έτους 2007 - 2008)

Η τετραγωνική φραγματοθυρίδα του Σχ.2 δύναται να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα στο Ο. Για να διατηρείται κλειστή στηρίζεται με κατακόρυφο σχοινί από το Α με τη βοήθεια ιδανικής τροχαλίας Β. Να ευρεθεί το βάρος W έτσι ώστε η θυρίδα να ανοίγει μόλις η στάθμη του νερού h φθάνει τα 6 m. Το ειδικό βάρος του νερού είναι 10^4 N/m^3. (Να αγνοηθεί η ατμοσφαιρική πίεση).

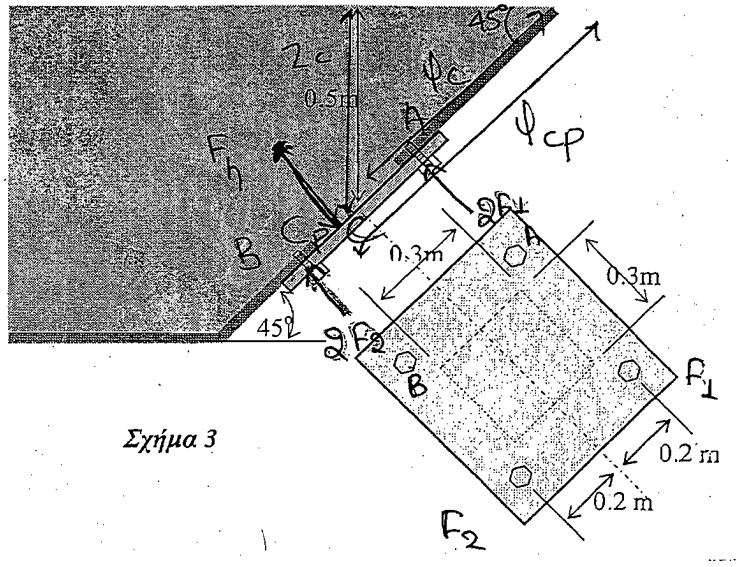


Σχήμα 2

Άσκηση 3

(Θέμα εξετάσεων κανονικής εξεταστικής Ακαδημαϊκού Έτους 2007 - 2008)

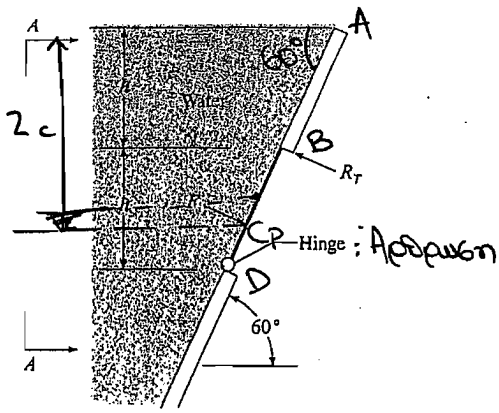
Το αβαρές κάλυμμα του ανοίγματος προσπέλασης της δεξαμενής πόσιμου νερού του Σχ.3 στερεώνεται με τέσσερεις κοχλίες καθένας από τους οποίους έχει εφελκυστική προένταση 100 N. Στη συνέχεια η δεξαμενή πληρούται μέχρι τη στάθμη του σχήματος. Να υπολογισθεί η τελική δύναμη σε κάθε κοχλία. (Το ειδικό βάρος του νερού είναι $\gamma=10^4$ N/m^3).



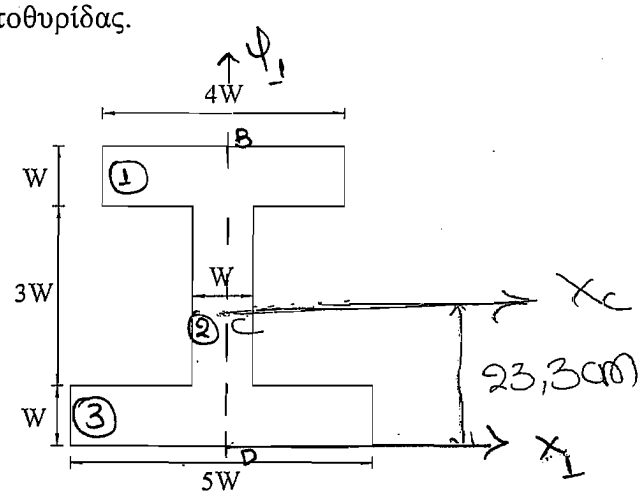
Σχήμα 3

Άσκηση 4

Υπολογίστε την υδροστατική δύναμη F στην φραγματοθυρίδα του Σχ.4α, της οποίας η διατομή φαίνεται στο Σχ. 4β. Δίνεται ότι w=10 cm και για το ειδικό βάρος του νερού $\gamma_{\text{νερού}} = 10^4$ N/m^3. Να υπολογισθεί επίσης το πηλίκο R_T/F. Αγνοήστε το βάρος της φραγματοθυρίδας.



Σχήμα 4α



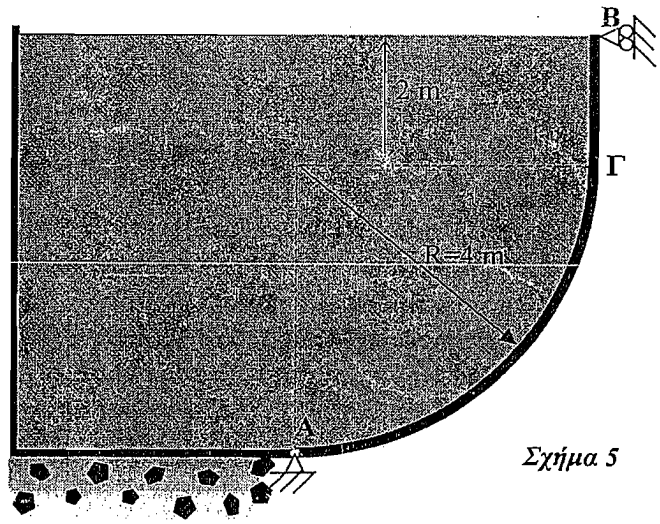
Σχήμα 4β

Άσκηση 5

(Θέμα εξετάσεων κανονικής εξεταστικής Ακαδημαϊκού Έτους 2007 - 2008)

Η φραγματοθυρίδα του Σχ.5, βάθους 1m αποτελείται από το τμήμα ΑΓ σχήματος τεταρτοκυκλίου και το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ. Η φραγματοθυρίδα στηρίζεται με άρθρωση στο Α και κύλιση στο Β. Γνωρίζοντας ότι το ειδικό βάρος του νερού είναι $\gamma=10^4$ N/m^3 και αγνοώντας την ατμοσφαιρική πίεση να υπολογισθούν:

α. Το διάνυσμα της υδροσατικής δύναμης που ασκείται στην φραγματοθυρίδα.
β. Ο φορέας της υδροστατικής δύναμης.
γ. Οι αντιδράσεις στηρίξεως στα Α και Β.

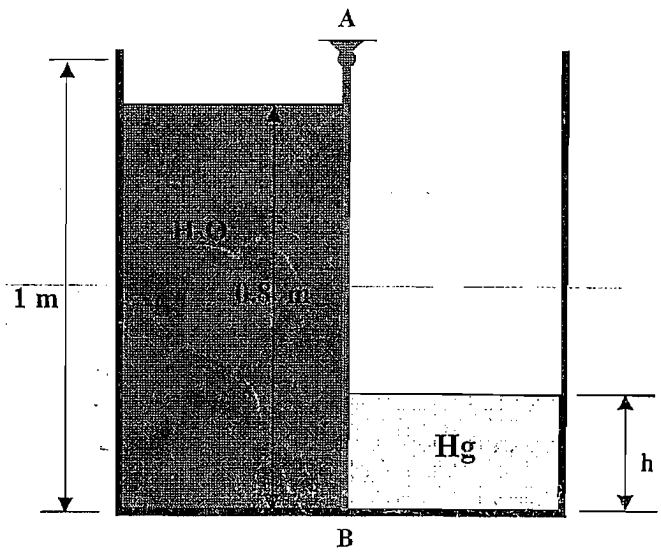


Σχήμα 5

Άσκηση 6

(Θέμα εξετάσεων κανονικής εξεταστικής Ακαδημαϊκού Έτους 2006 - 2007)

Το κυβικό δοχείο του Σχ.6 χωρίζεται σε δύο ίσους χώρους με τη βοήθεια κατακορύφου ελάσματος ΑΒ που εφάπτεται στον πυθμένα και δύναται να περιστρέφεται χωρίς τριβή περί οριζοντίου άξονος διερχομένου από το Α. Αν το ειδικό βάρος του νερού είναι $\gamma=10^4$ N/m^3 και η ειδική βαρύτητα του υδραργύρου είναι $s_{Hg}=13.6$ να υπολογισθεί το ύψος h της στάθμης του υδραργύρου ώστε να μην αναμειχθούν τα δύο υγρά.



Σχήμα 6

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ
Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου
Δρ Σ. Κ. Κουρκουλής, Αναπληρωτής Καθηγητής Μηχανικής ΕΜΠ
Τηλέφωνο γραφείου: 210-7721313, 7721263, Τηλέφωνα εργαστηρίων: 7724025, 7724235, 7721317
Τηλεομοιότυπο: 2107721302, Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου: stakkour@central.ntua.gr

ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι (ΣΤΑΤΙΚΗ)

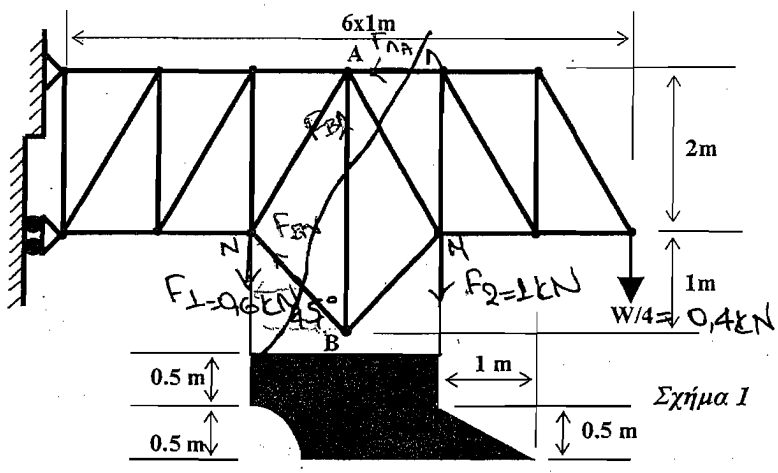
9η Σειρά ασκήσεων ενισχυτικής διδασκαλίας

ΔΙΚΤΥΩΜΑΤΑ

Άσκηση 1

(Θέμα κανονικής εξεταστικής Ακ. Έτους 2003-04)

Αφού ελεγχθεί η στερεότητα και η στατικότητα του παραπλεύρως φορέα να ευρεθεί η δύναμη στη ράβδο ΑΒ αν το αναρτημένο σώμα, συνολικού βάρους W, έχει πάχος 10 mm και είναι κατασκευασμένο από υλικό με ειδικό βάρος γ ίσο με 78 kN/m^3.
(Το καμπύλο τμήμα είναι τεταρτοκύκλιο)



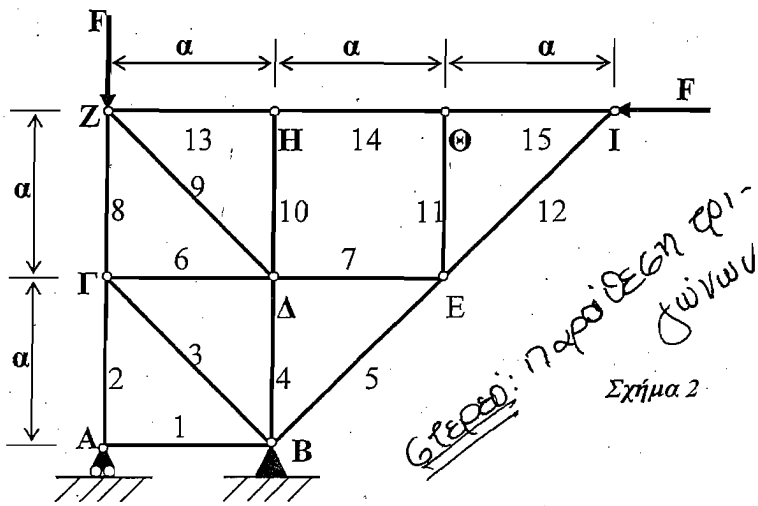
Σχήμα 1

Άσκηση 2

(Θέμα επαναληπτικής εξεταστικής Ακ. Έτους 2004-05)

Για τον επίπεδο φορέα του σχήματος:

α. Δείξτε ότι είναι στερεός και ισοστατικός (εσωτερικά και εξωτερικά).
β. Υπολογίστε τις δυνάμεις των ράβδων 5, 7 και 14 και τις αντιδράσεις στηρίξεως.
γ. Υπολογίστε τις δυνάμεις και των υπολοίπων ράβδων και παρουσιάστε τα αποτελέσματα σε μορφή πίνακα συναρτήσει του F.



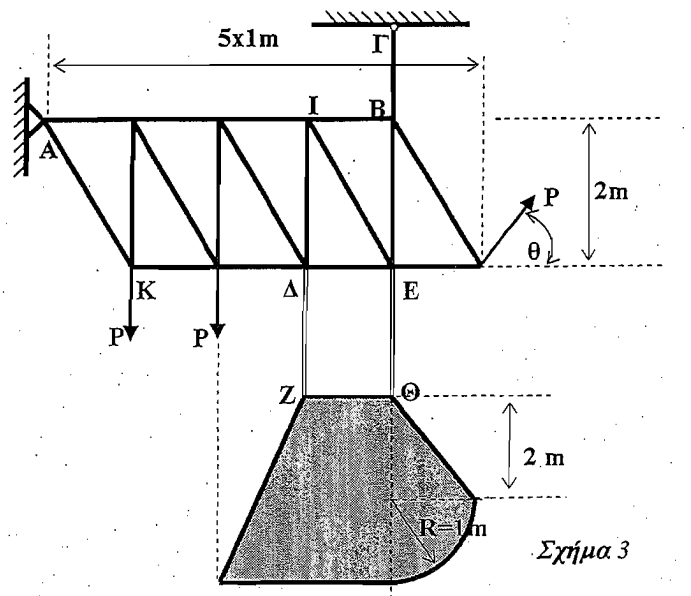
Σχήμα 2

Άσκηση 3

(Θέμα κανονικής εξεταστικής Ακ. Έτους 2006-07)

Ο επίπεδος δικτυωτός φορέας του Σχ.3 στηρίζεται με τη βοήθεια αρθρώσεως στο Α και της κατακορύφου δεσμικής ράβδου ΒΓ. Από τους κόμβους Δ και Ε αναρτάται με κατακόρυφα σχοινιά ΔΖ και ΕΘ ομογενής πλάκα πάχους 5 mm από μέταλλο ειδικού βάρους Px10^5 N/m^3.

α. Να υπολογισθεί η γωνία θ έτσι ώστε η δύναμη στη δεσμική ράβδο ΒΓ να είναι η ελάχιστη δυνατή (0<θ<90).
β. Για την ανωτέρω τιμή της γωνίας θ να υπολογισθεί η μέγιστη επιτρεπτή τιμή της δύναμης P έτσι ώστε η δύναμη στη ράβδο ΑΚ να μην υπερβαίνει τα 20 kN.
γ. Για τις ως άνω τιμές των θ και P να προσδιορισθούν οι δυνάμεις στις ράβδους ΙΔ και ΙΕ.



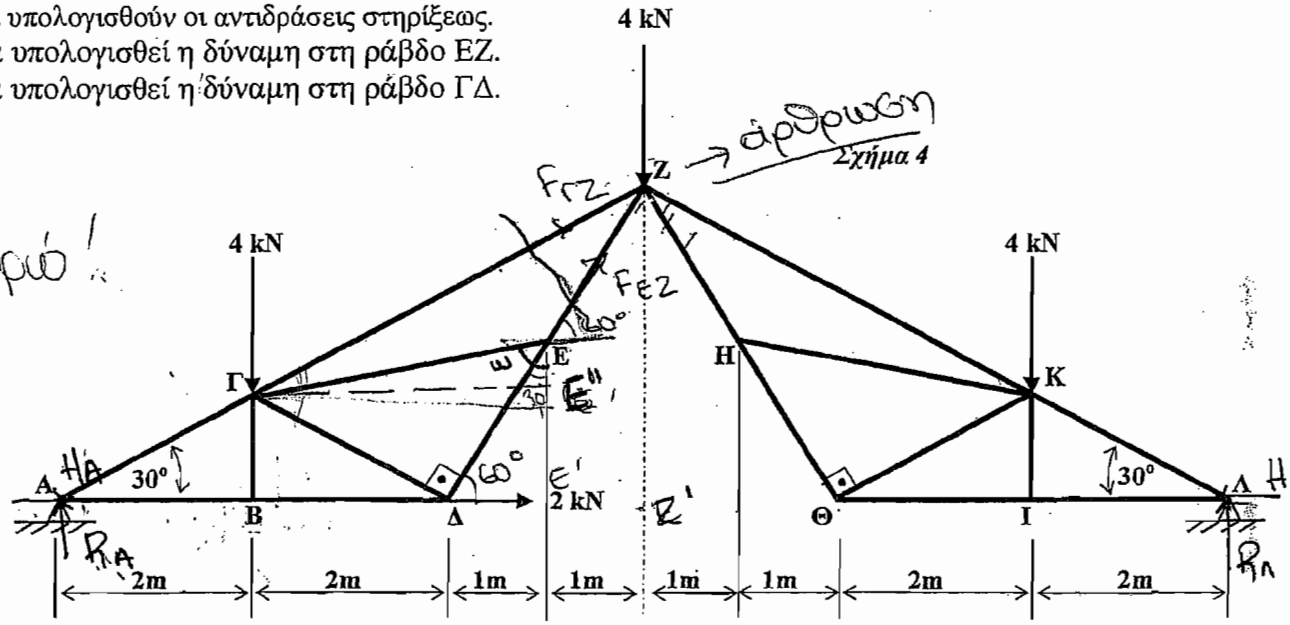
Σχήμα 3

Άσκηση 4

(Θέμα επαναληπτικής εξεταστικής Ακ. Έτους 2006-07)

Για τον γεωμετρικώς συμμετρικό δικτυωτό φορέα του Σχ.4, ο οποίος στηρίζεται με αρθρώσεις στα σημεία Α και Λ και φορτίζεται με τέσσερεις δυνάμεις στους κόμβους Γ, Δ, Ζ και Κ:

α. Να ελεγχθεί η στερεότητα και η στατικότητα.
β. Να υπολογισθούν οι αντιδράσεις στηρίξεως.
γ. Να υπολογισθεί η δύναμη στη ράβδο ΕΖ.
δ. Να υπολογισθεί η δύναμη στη ράβδο ΓΔ.



Σχήμα 4

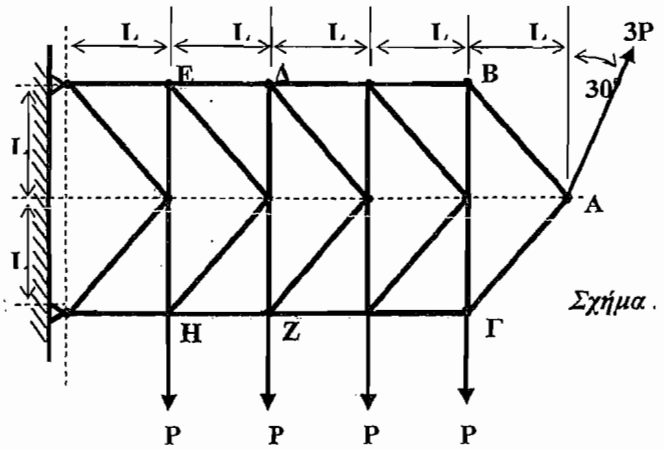
Άσκηση 5

(Θέμα επαναληπτικής εξεταστικής Ακ. Έτους 2006-07)

Για τον αμφιαρθρωτό ραβδωτό φορέα του Σχ.5:

α. Να ελέγξετε την στερεότητα και την στατικότητα.
β. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις στις ράβδους ΑΒ και ΑΓ.
γ. Να υπολογίσετε τις δυνάμεις στις ράβδους ΔΕ και ΖΗ.

Δίνεται P=2kN



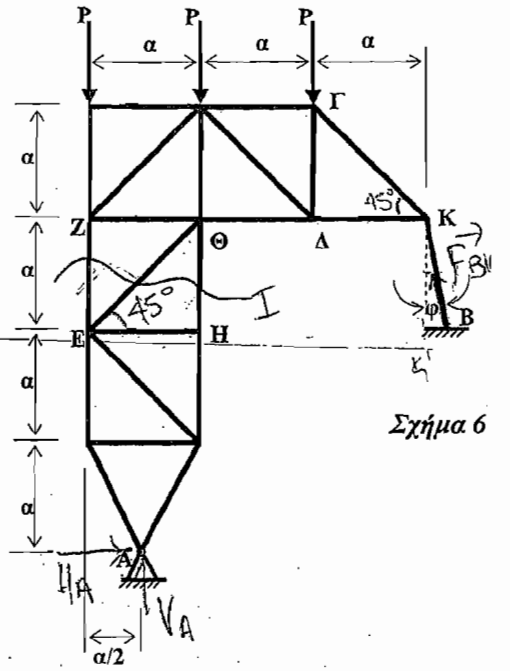
Σχήμα

Άσκηση 6

(Θέμα κανονικής εξεταστικής Ακ. Έτους 2008-09)

Ο δικτυωτός φορέας του Σχ.6 στηρίζεται με άρθρωση στο Α και με τη ράβδο ΚΒ. Για P=2kN:

α. Να ελεγχθεί η στερεότητα και η ισοστατικότητα του φορέα.
β. Για φ=30° να υπολογισθούν οι δυνάμεις στις ράβδους ΚΓ, ΚΔ, ΕΖ, ΕΘ και ΗΘ.
γ. Να προσδιορισθεί η γωνία φ (0≤φ<90°) για την οποία η δύναμη στη ράβδο ΚΒ γίνεται ελάχιστη.



Σχήμα 6

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ
Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου
Δρ Σ. Κ. Κουρκουλής, Αναπληρωτής Καθηγητής Μηχανικής ΕΜΠ
Τηλέφωνο γραφείου: 210-7721313, 7721263, Τηλέφωνα εργαστηρίων: 7724025, 7724235, 7721317
Τηλεομοιότυπο: 2107721302, Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου: stakkour@central.ntua.gr

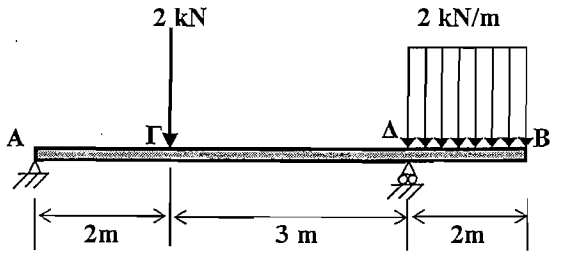
ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι (ΣΤΑΤΙΚΗ)

10η Σειρά ασκήσεων ενισχυτικής διδασκαλίας

ΟΛΟΣΩΜΟΙ ΦΟΡΕΙΣ

Άσκηση 1

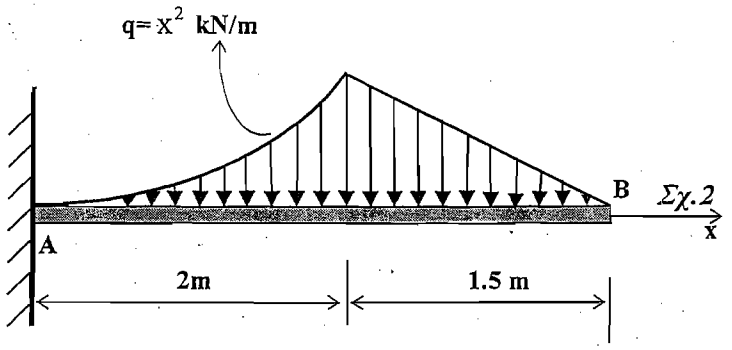
Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων και ροπών κάμψεως για την αβαρή μονοπροέχουσα δοκό ΑΓΔΒ του Σχ.1 (υπό κατάλληλη κλίμακα).



Σχ.1

Άσκηση 2

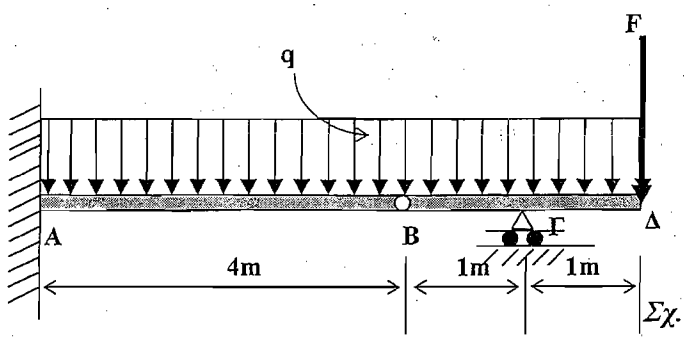
Η αβαρής μονόπακτη δοκός ΑΒ φέρει κατανεμημένο φορτίο όπως φαίνεται στο Σχ.2. Να σχεδιασθούν τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων και ροπών κάμψεως υπό κατάλληλες κλίμακες.



Σχ.2

Άσκηση 3
(Θέμα κανονικής εξεταστικής Ακ. Έτους 2003-04)

Η αβαρής δοκός του Σχ.3 στηρίζεται με πάκτωση στο Α και κύλιση στο Γ, φέρει δε εσωτερική άρθρωση στο Β. Για τη δεδομένη στο σχήμα φόρτιση να υπολογισθούν οι αντιδράσεις στηρίξεως και να σχεδιασθούν τα διαγράμματα τεμνουσών δυνάμεων και ροπών κάμψεως υπό κατάλληλες κλίμακες.
Δίνεται: q=10 kN/m και F=50 kN.



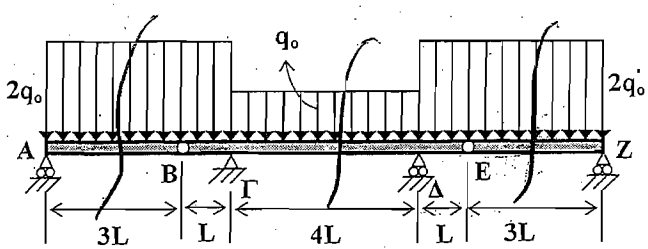
Σχ.3

Άσκηση 4
(Θέμα κανονικής εξεταστικής Ακ. Έτους 2007-08)

Ο ολόσωμος φορέας του Σχ.4 στηρίζεται με άρθρωση στο Γ και κυλίσεις στα Α, Δ και Ζ, φέρει δε εσωτερικές αρθρώσεις στα σημεία Β και Ε.

α. Να υπολογισθούν οι αντιδράσεις στις στηρίξεις Α, Γ, Δ και Ζ.
β. Να σχεδιασθεί το διάγραμμα των τεμνουσών δυνάμεων.
γ. Να σχεδιασθεί το διάγραμμα των καμπτικών ροπών.

Δίνεται ότι L=1 m και q_o=20 kN/m.



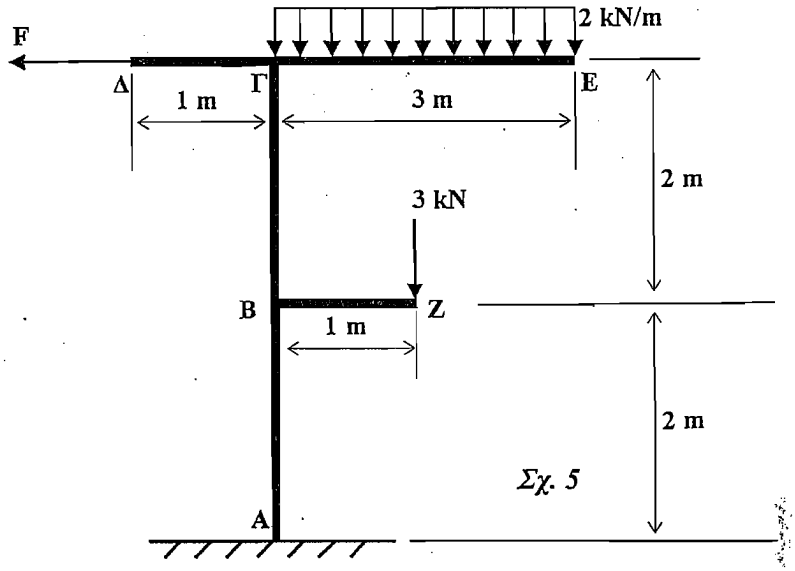
Σχ.4

Άσκηση 5

Για το αβαρές πλαίσιο του Σχ.5, το οποίο είναι πακτωμένο στο σημείο Α:

α. Να υπολογισθεί η τιμή της οριζόντιας δύναμης F έτσι ώστε η ροπή πακτώσεως να είναι μηδενική.

β. Για την τιμή αυτή της F να σχεδιασθούν τα διαγράμματα αξονικών δυνάμεων, τεμνουσών δυνάμεων και καμπτικών ροπών.

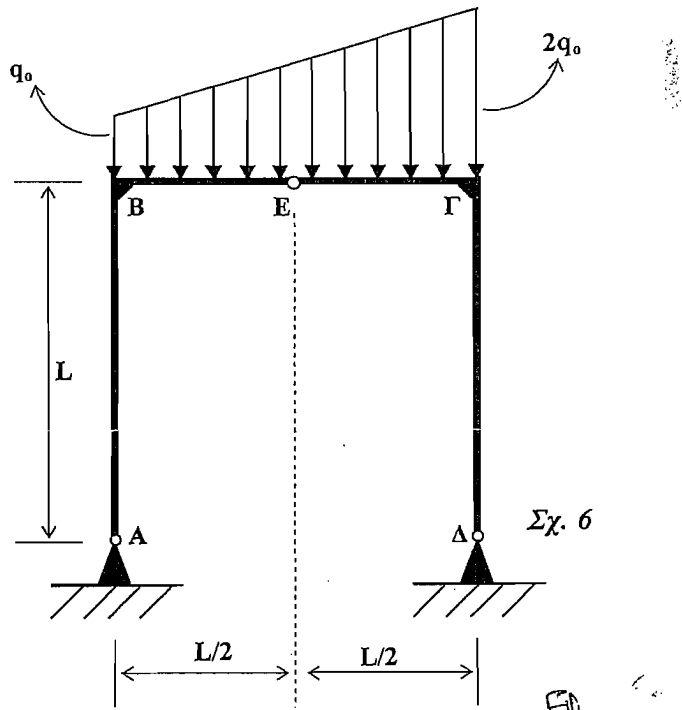


Σχ. 5

Άσκηση 6

(Θέμα κανονικής εξεταστικής Ακ. Έτους 2006-07)

Το πλαίσιο του Σχ.6 οποίο στηρίζεται με αρθρώσεις στα Α και Δ και φέρει εσωτερική άρθρωση στο Ε. Το πλαίσιο φορτίζεται με τραπεζοειδές φορτίο στο οριζόντιο τμήμα του. Να υπολογισθούν οι αντιδράσεις στηρίξεως συναρτήσει των μεγεθών q_o και L και στη συνέχεια να σχεδιασθούν τα διαγράμματα αξονικών και τεμνουσών δυνάμεων και ροπών κάμψεως .

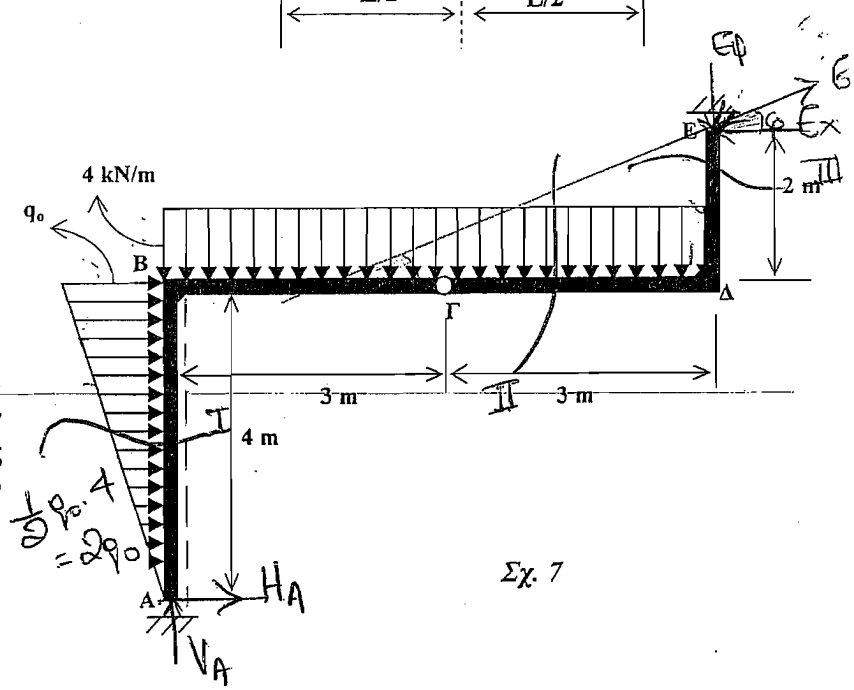


Σχ. 6

Άσκηση 7

(Θέμα ενδιάμεσης εξεταστικής Ακ. Έτους 2007-08)

Για το τριαρθρωτό πλαίσιο του Σχ.7 να σχεδιάσετε τα διαγράμματα αξονικών και τεμνουσων δυνάμεων καθώς και ροπών κάψεως, γνωρίζοντας ότι η αντίδραση στην άρθρωση Ε διέρχεται από το μέσον του τμήματος ΒΓ.



Σχ. 7

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ, ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΤΟΧΗΣ ΚΑΙ ΥΛΙΚΩΝ
Ηρώων Πολυτεχνείου 5, Κτίριο Θεοχάρη
Πολυτεχνειούπολη Ζωγράφου, 157 73 Ζωγράφου
Δρ Σ. Κ. Κουρκουλής, Αναπληρωτής Καθηγητής Μηχανικής ΕΜΠ
Τηλέφωνο γραφείου: 210-7721313, 7721263, Τηλέφωνα εργαστηρίων: 7724025, 7724235, 7721317
Τηλεομοιότυπο: 2107721302, Διεύθυνση ηλεκτρονικού ταχυδρομείου: stakkour@central.ntua.gr

ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι (ΣΤΑΤΙΚΗ)

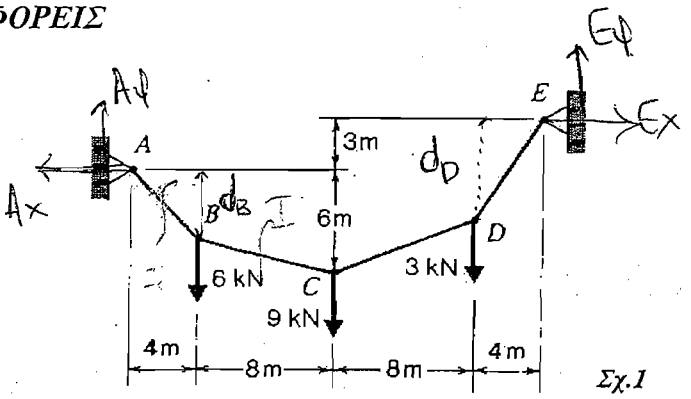
11η Σειρά ασκήσεων ενισχυτικής διδασκαλίας

ΕΥΚΑΜΠΤΟΙ ΦΟΡΕΙΣ

Άσκηση 1

Το καλώδιο ΑΕ φέρει τρία κατακόρυφα φορτία όπως φαίνεται στο Σχ.1. Να προσδιορισθεί:

α. Η θέση των σημείων Β και D
β. Η μέγιστη δύναμη στο καλώδιο
γ. Η μέγιστη γωνία ανύψωσης

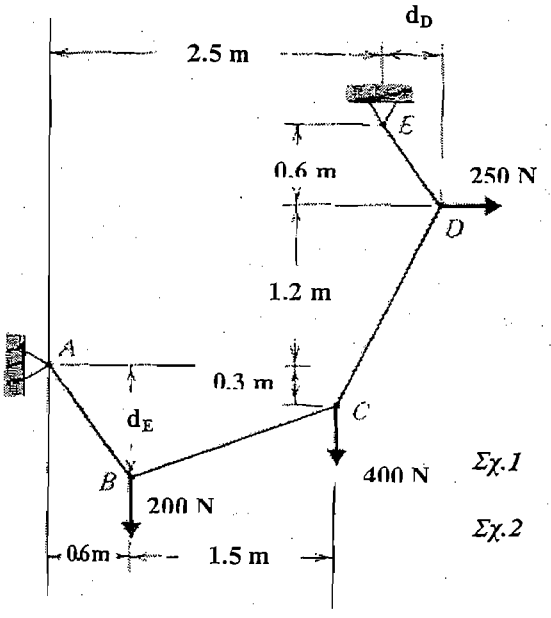


Σχ.1

Άσκηση 2

Το καλώδιο ABCDE φέρει δύο κατακόρυφα και ένα οριζόντιο φορτίο όπως φαίνεται στο Σχ.2. Να προσδιορισθούν:

α. Οι αποστάσεις d_B και d_D.
β. Η μέγιστη δύναμη στο καλώδιο.
γ. Η μέγιστη γωνία ανύψωσης



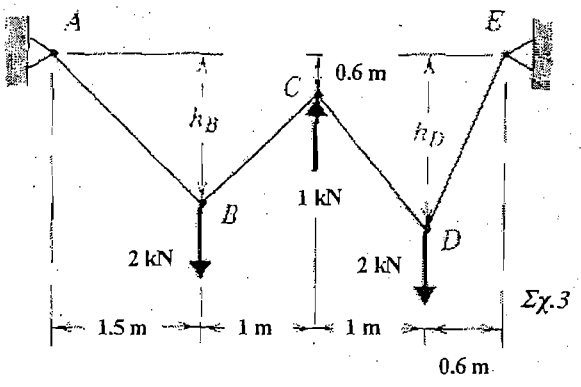
Σχ.1

Σχ.2

Άσκηση 3

Το καλώδιο ΑΕ φέρει τρία κατακόρυφα φορτία όπως φαίνεται στο Σχ.3. Να προσδιορισθούν:

α. Η μέγιστη δύναμη στο καλώδιο.
β. Τα ύψη h_B και h_D.
γ. Το μήκος του καλωδίου.



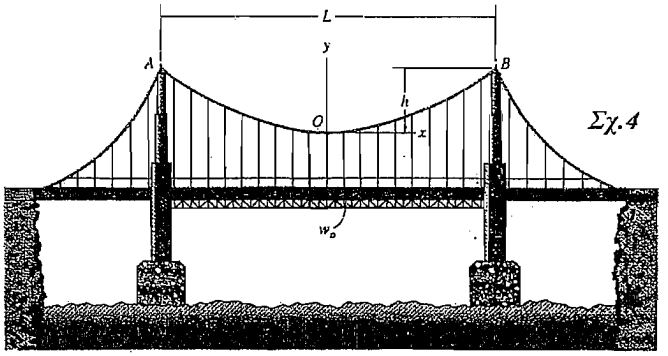
Σχ.3

Άσκηση 4

Το καλώδιο της κρεμαστής γέφυρας στηρίζει το μισό βάρος του ασφαλτόδρομου μεταξύ των πυλώνων A και B, όπως φαίνεται στο Σχ.4. Θεωρώντας το βάρος αυτό ομοιόμορφα κατανεμημένο και ίσο με w_o=200 kN/m, και γνωρίζοντας ότι L=50 m και h=15 m, να προσδιορισθεί:

α. Η μέγιστη δύναμη που αναπτύσσεται στο καλώδιο.

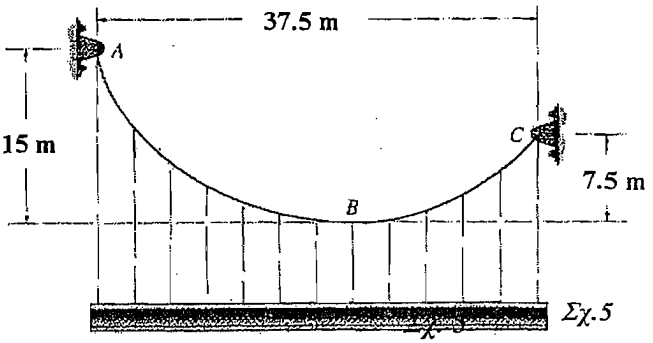
β. Το αναγκαίο μήκος του καλωδίου.



Σχ.4

Άσκηση 5

Από το καλώδιο του Σχ.5 αναρτάται οριζόντια κοιλοδοκός βάρους 15 kN/m. Να προσδιορισθούν οι δυνάμεις του καλωδίου στα σημεία A, B και C.



Σχ.5

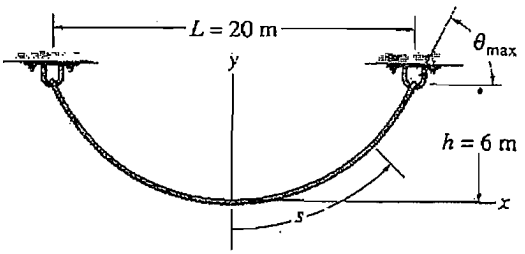
Άσκηση 6

Για το καλώδιο του Σχ.6, βάρους 5 N/m, να προσδιορισθούν

α. Η καμπύλη του καλωδίου

β. Το μήκος του καλωδίου

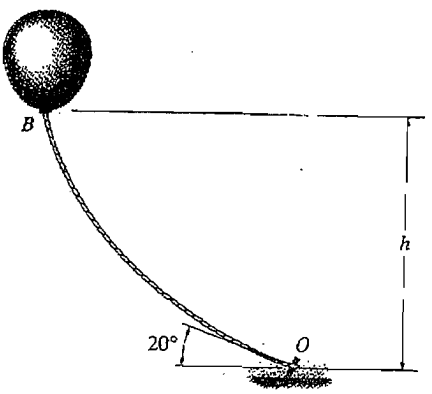
β. Η μέγιστη δύναμη που αναπτύσσεται στο καλώδιο.



Σχ.6

Άσκηση 7

Η κατακόρυφη δύναμη (άνωση) που δρα στο μπαλόνι του Σχ.7 είναι 600 N. Το καλώδιο OB έχει μήκος 70 m και μάζα 500 g/m. Να προσδιορισθεί το ύψος h.



Σχ.7