

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1.

α) Εφ' όσον η αριστερή πλάκα έχει συνολικό φορτίο Q και στην δεξιά της πλευρά εμφανίζεται φορτίο q , στην αριστερή πλευρά της υπάρχει φορτίο $Q - q$.

'Όπως σε κάθε πυκνωτή, στην αριστερή πλευρά της δεξιάς πλάκας υπάρχει φορτίο $-q$. Αυτό μπορεί να δειχτεί αν πάρουμε επιφάνεια Gauss σε σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου (στο Σχ.1 με χοντρή διακεκομένη γραμμή), με τις δύο παράλληλες έδρες μέσα στις αγώγιμες πλάκες. Από αυτήν την κλειστή επιφάνεια έχουμε ροή μηδέν γιατί μέσα στο αγωγό το πεδίο είναι μηδέν και οι άλλες 4 έδρες του παραλληλεπίπεδου είναι παράλληλες με το πεδίο. Άρα, στο εσωτερικό της επιφάνειας υπάρχει φορτίο = 0, άρα στην εσωτερική πλευρά της δεξιάς πλάκας υπάρχει φορτίο $-q$.

Οπότε, στην εξωτερική πλευρά της δεξιάς πλάκας υπάρχει φορτίο $Q' + q$, μιας και το ολικό φορτίο της είναι Q' .

Το ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια του αγωγού είναι $E = \sigma/\epsilon_0$, όπου σ η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου. Όπότε,

$$E_I = \frac{(Q - q)/A}{\epsilon_0}, \quad E_{II} = \frac{q/A}{\epsilon_0}, \quad E_{III} = \frac{(Q' + q)/A}{\epsilon_0}$$

Επειδή το πεδίο είναι ομογενές παντού αυτές είναι και οι τιμές στους αντίστοιχους χώρους.

β) Γνωρίζουμε ότι η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου δίνεται από την

$$\mathcal{E} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V \mathbf{E}^2 dv$$

όπου dv ο στοιχειώδης όγκος και V ο συνολικός όγκος. Επειδή στην περίπτωσή μας το ηλεκτρικό πεδίο είναι σταθερό για κάθε χώρο, το \mathbf{E}^2 βγαίνει εκτός του ολοκληρώματος το οποίο υπάρχει απλά τον συνολικό όγκο: V για τις περιοχές I και III και $A \cdot d$ για τον χώρο II.

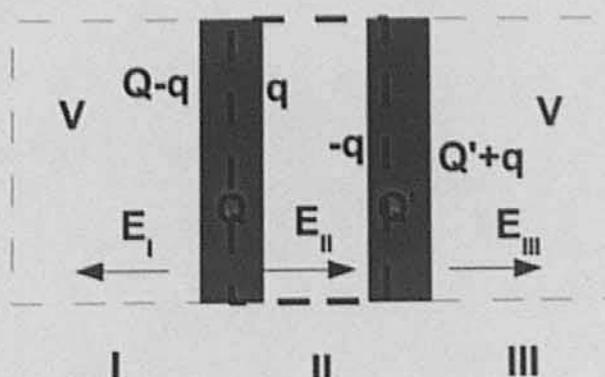
$$\begin{aligned} \mathcal{E}_I &= \frac{\epsilon_0}{2} E_I^2 V = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{(Q - q)/A}{\epsilon_0} \right)^2 V, \quad \mathcal{E}_{III} = \frac{\epsilon_0}{2} E_{III}^2 V = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{(Q' + q)/A}{\epsilon_0} \right)^2 V \\ \mathcal{E}_{II} &= \frac{\epsilon_0}{2} E_{II}^2 V = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{q/A}{\epsilon_0} \right)^2 (A \cdot d) \end{aligned}$$

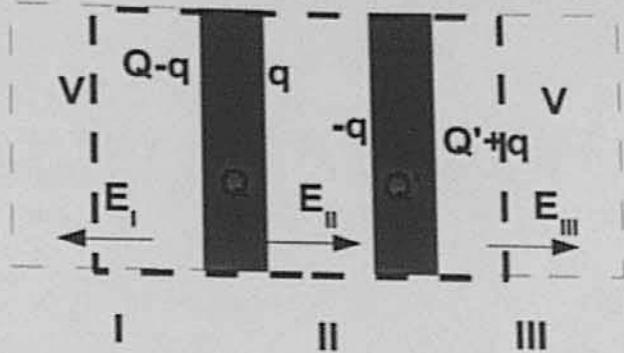
Αθροίζοντας

$$\mathcal{E}_{total} = \frac{1}{2\epsilon_0 A^2} (V(Q - q)^2 + (A \cdot d)q^2 + V(Q' + q)^2)$$

γ) Διαφορίζοντας ως προς q , και μηδενίζοντας την παράγωγο, έχουμε

$$\frac{d\mathcal{E}_{total}}{dq} = \frac{1}{\epsilon_0 A^2} (V(2q - Q + Q') + (A \cdot d)q) = 0 \rightarrow q = \frac{Q - Q'}{2 + \frac{(A \cdot d)}{V}}$$





Σχήμα 2:

- δ) Για $V \gg (A \cdot d)$, $(2 + (A \cdot d)/V) \rightarrow 2$ οπότε $q = \frac{Q-Q'}{2}$
 ε) Οπότε

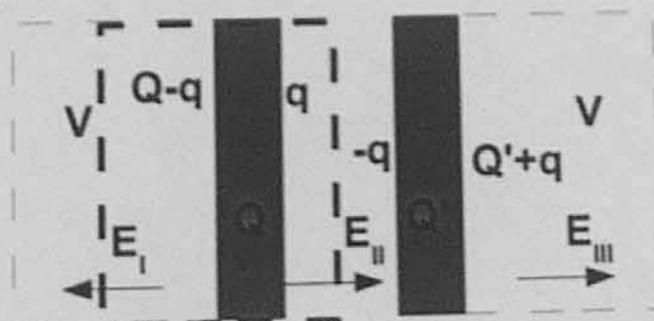
$$E_I = \frac{(Q+Q')/A}{2\epsilon_0} = E_{III}, \quad E_{II} = \frac{(Q-Q')/A}{2\epsilon_0},$$

Άλλος τρόπος λύσης: Τα πεδία θα μπορούσαν να βρεθούν όμως ωρώντας τέσσερεις επιφανειακές κατανομές φορτίου: $(Q-q)/A$, q/A , $-q/A$ και $(Q'+q)/A$ από αριστερά προς τα δεξιά. Λόγω συμμετρίας $E_I = E_{III}$ και με το νόμο του Gauss (η επιφάνεια του παραληλεπιπέδου φαίνεται στο Σχ.2) θα έχουμε

$$(E_I + E_{III})A = \frac{(Q-q+q-q+Q'+q)}{\epsilon_0} \rightarrow E_I = E_{III} = \frac{(Q+Q')/A}{2\epsilon_0}$$

και, γνωρίζοντας τώρα το πεδίο στον χώρο I, με τον νόμο του Gauss (η επιφάνεια του παραληλεπιπέδου φαίνεται στο Σχ.3) θα έχουμε

$$(E_I + E_{II})A = \frac{Q}{\epsilon_0} \rightarrow E_{II} = \frac{(Q-Q')/A}{2\epsilon_0}$$



ΘΕΜΑ 2.

α) Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του πεδίου από τον εσωτερικό κύλινδρικό αγωγό προς τον εξωτερικό θα δίνει την διαφορά δυναμικού V . Ακολουθούμε ακτινική διαδρομή (στην διατομή του σχήματος), οπότε $E \cdot dl = E dl$, και εφ' όσον το ήλεκτρικό πεδίο είναι και αυτό ακτινικό, και βέβαια το dl είναι στην περίπτωσή μας dr , έχουμε (θεωρώντας απόλυτες τιμές)

$$V = \int_a^b E \cdot dr = \int_a^b \frac{k}{r} dr = k \log \frac{b}{a} \rightarrow k = \frac{V}{\ln \frac{b}{a}}$$

Έπειδή ο μέσα κύλινδρος είναι σε μεγαλύτερο δυναμικό, το πεδίο έχει φορά προς τα έξω.

β) Για το μαγνητικό πεδίο, έχουμε την περίπτωση ενός ομοαξονικού καλωδίου. Λόγω κυλινδρικής συμμετρίας περιμένουμε οι δυναμικές γραμμές του πεδίου να είναι κύκλοι κάθετοι στον άξονα (δηλαδή οι δυναμικές γραμμές είναι στο επίπεδο της διατομής του σχ.). Από το νόμο του Ampere, για μια κυκλική διαδρομή C με ακτίνα $a < r < b$ (εστιγμένη γραμμή στο σχ.), έχουμε

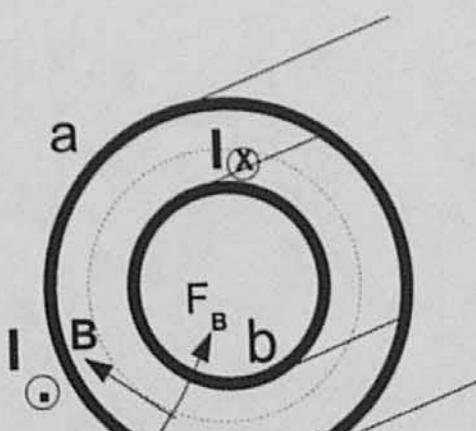
$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I \rightarrow B 2\pi r = \mu_0 I \rightarrow B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$$

για $a < r < b$. Επομένως, το μαγνητικό πεδίο είναι εφαπτομενικό, με φορά που δίνεται από τον κανόνα της βίδας.

γ) Ας υποθέσουμε ότι το φορτίο q εισέρχεται στο χώρο ανάμεσα στους κυλίνδρους σε απόσταση r από τον άξονα. Η δύναμη από το ηλεκτρικό πεδίο στο φορτίο q είναι $\mathbf{F}_E = q\mathbf{E}$ και από το μαγνητικό $\mathbf{F}_B = qv \times \mathbf{B}$. Από το σχήμα βλέπουμε ότι έχουν αντίθετη φορά, οπότε για να συνεχίσει το φορτίο σε ευθύγραμμη ομαλή κίνηση θα πρέπει οι δυνάμεις να είναι κατά μέτρο (σες

$$qvB = qe \rightarrow vB = E \rightarrow v\mu_0 \frac{I}{2\pi r} = \frac{V}{\ln \frac{b}{a}} \frac{1}{r} \rightarrow v = \frac{V}{\ln \frac{b}{a}} \frac{2\pi}{\mu_0 I}$$

Παρατηρήστε ότι η απόσταση r από τον άξονα δεν επηρεάζει την σχέση της ταχύτητας.



ΘΕΜΑ 3.

Θεωρούμε λεπτή ταινία κατά μήκος του αγωγού με πάχος $Rd\theta$ (βλέπε σχ.). Η θέση της ταινίας καθορίζεται από τη γωνία θ που σχηματίζει η τοπική ακτίνα R με τον άξονα των x . Το ρεύμα που την διαπερνά είναι

$$dI = I \frac{Rd\theta}{\pi R} = \frac{Id\theta}{\pi}$$

εφ' όσον το ρεύμα I είναι ομοιόμορφα κατανευμημένο σε όλη την ημιπεριφέρεια πR . Το μαγνητικό πεδίο από ευθύγραμμο αγωγό απείρου μήκους με ρεύμα dI στο σημείο O (που απέχει απόσταση R από τον αγωγό) έχει μέτρο

$$dB = \mu_0 \frac{dI}{2\pi R} = \mu_0 \frac{Id\theta}{2\pi^2 R}$$

με συνιστώσες (βλέπε σχ.)

$$dB_x = dB \sin \theta, \quad \text{και} \quad dB_y = -dB \cos \theta, \quad dB_z = 0$$

Για να καλύψουμε όλο τον αγωγό με τις λεπτές ταινίες θα πρέπει η γωνία θ να πηγαίνει από $-\pi/2$ έως $\pi/2$. Άρα

$$B_x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dB \sin \theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \theta d\theta = 0$$

$$\text{και} \\ B_y = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dB \cos \theta = - \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = - \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \sin \theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = - \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

Επομένως το μαγνητικό πεδίο στο σημείο O είναι

$$\mathbf{B} = \left(0, -\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}, 0 \right)$$

