

## Φύλαο 1

**Άσκηση 0.1.** Έστω  $E$  μερικά διατεταγμένος γραμμικός χώρος. Αν  $x, y \in E$ , δώστε τον ορισμό του  $\sup\{x, y\}$ . Πότε ο  $E$  είναι γραμμικός σύνδεσμος; Αν  $E = \mathbb{R}^2$ , διατεταγμένος με την συνήθη διάταξη,  $x = (-5, 2)$  και  $y = (3, -4)$ , προσδιορίστε τα

$$x^+, x^-, y^+, y^-, x \vee y, x \wedge y$$

και διαπιστώστε ότι  $x + y = x \vee y + x \wedge y$ . Δείξτε ότι ο  $E$  είναι γραμμικός σύνδεσμος.

**Άσκηση 0.2.** Έστω  $E = C[0, 1]$  διατεταγμένος με την σημειακή διάταξη. Αν  $x, y \in E$  και  $z(t) = \max\{x(t), y(t)\}$  για κάθε  $t \in [0, 1]$ , δείξτε ότι  $z = x \vee y$  και διαπιστώστε ότι ο  $E$  είναι γραμμικός σύνδεσμος. Δώστε τον ορισμό της διατακτικής μονάδας και δείξτε ότι η σταθερή συνάρτηση  $\mathbf{1}(t) = 1$  για κάθε  $t \in [0, 1]$ , είναι διατακτική μονάδα του  $E$ .

**Άσκηση 0.3.** Δείξτε ότι ο  $E = C[0, 1]$  διατεταγμένος με την σημειακή διάταξη είναι Banach lattice.

**Άσκηση 0.4.** Άν  $X = \{x \in C[0, 1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$  δείξτε ότι ο  $X$  είναι sublattice του  $E$ .

**Άσκηση 0.5.** Άν  $X = \{at + b \mid t \in [0, 1], a, b \in \mathbb{R}\}$ , δείξτε ότι ο  $X$  διατεταγμένος με την επαγόμενη διάταξη είναι lattice-subspace όχι όμως sublattice του  $C[0, 1]$ .

**Άσκηση 0.6.** Έστω  $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, 0 \leq y \leq x\}$ .

- (i) Να παρασταθεί γραφικά ο  $P$  και να δείξετε ότι είναι οξύς κώνος.
- (ii) Άν  $\succeq$  είναι η σχέση μερικής διάταξης που ορίζεται από τον  $P$ , δώστε τον τύπο της  $\succeq$ . Άν  $x = (-2, 1)$ ,  $y = (1, -1)$ , προσδιορίστε το  $\sup\{x, y\}$ , ως προς τη  $\succeq$ .
- (iii) Δείξτε ότι ο  $\mathbb{R}^2$ , διατεταγμένος από τον  $P$  είναι γραμμικός σύνδεσμος.

**Άσκηση 0.7.** Αν  $E = C[0, 1]$  διατεταγμένος με την σημειακή διάταξη και  $A \subseteq E$  δώστε τον ορισμό του supremum του  $A$ . Αν

$$A = \{x \in E_+ \mid x(t) = 0, \forall t \in [0, \frac{1}{2}] \text{ και } x(t) \leq 1, \forall t \in [\frac{1}{2}, 1] \},$$

δείξτε ότι το  $A$  δεν έχει supremum.