

# ΑΛΓΕΒΡΑ - ΕΡΓΑΣΙΑ 3

ΣΕΜΦΕ, 5ο Εξάμηνο, ακ. έτος 2007-8

~~1.~~ Θεωρήστε την προσθετική ομάδα  $\mathbb{R}$  και την υποομάδα της  $\mathbb{Z}$ .

α) Περιγράψτε γεωμετρικά ένα σύμπλοκο  $t + \mathbb{Z}$ .

β) Δείξτε ότι το σύνολο όλων των συμπλόκων της  $\mathbb{Z}$  στην  $\mathbb{R}$  είναι

$$\{t + \mathbb{Z} : 0 \leq t < 1\}.$$

~~2.~~ Χρησιμοποιώντας το Θεμελιώδες Θεώρημα Ομομορφισμού περιγράψτε την ομάδα-πηλίκο  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  και δώστε γεωμετρική της ερμηνεία.

β) Ποιά είναι τα ανάλογα αποτελέσματα για την ομάδα  $\mathbb{R}^2$  και την υποομάδα της  $\mathbb{Z}^2$ .

~~2.~~ α) Περιγράψτε γεωμετρίκα τις υποομάδες  $\langle (3, 3) \rangle$  και  $\langle 3 \rangle \times \langle 3 \rangle$  της ομάδας  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

β) Εκφράστε τις ομάδες - πηλίκα  $\frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{\langle (3, 3) \rangle}$  και  $\frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{\langle 3 \rangle \times \langle 3 \rangle}$  σύμφωνα με την ταξινόμηση των πεπερασμένα παραγόμενων αβελιανών ομάδων, και δώστε τη γεωμετρική τους ερμηνεία. (Χρησιμοποιείστε ότι  $\langle (3, 3) \rangle \cong 3\mathbb{Z} \times \{0\}$ .)

γ) Σε κάθε μία από τις παραπάνω ομάδες - πηλίκα δώστε το σύμπλοκο του στοιχείου  $(1, 2)$  και περιγράψτε το γεωμετρικά.

δ) Σε κάθε μία από τις παραπάνω ομάδες - πηλίκα δώστε ελάχιστους εκπροσώπους των συμπλόκων τους.

~~3.~~ Ορίστε την  $f : \{0, 1, 2, \dots, 10\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 10\}$  μέσω της σχέσης:  $f(n) =$  το υπόλοιπο της διαιρεσης του  $4n^2 - 3n^7$  δια 11.

α) Δείξτε ότι η  $f$  είναι μετάθεση.

β) Βρείτε αν η  $f$  είναι άρτια ή περιττή.

γ) Υπολογίστε την  $f^{-1}$ .

~~4.~~ Εστω  $\sigma = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_r) \in S_n$  ένας κύκλος μήκους  $r$  ( $r \leq n$ ).

α) Δείξτε ότι  $\forall \xi \in S_n$  είναι:  $\xi \sigma \xi^{-1} = (\xi(a_1) \ \xi(a_2) \ \dots \ \xi(a_r))$ , δηλαδή πάλι κύκλος μήκους  $r$ .

β) Δείξτε ότι για τον κύκλο  $\sigma$  υπάρχει μετάθεση  $\xi \in S_n$  τέτοια ώστε  $\sigma = \xi(1 \ 2 \ \dots \ r)\xi^{-1}$ .

γ) Αν  $1 \leq r \leq n$ , δείξτε ότι υπάρχουν  $\frac{1}{r}[n(n-1) \cdots (n-r+1)]$  κύκλοι μήκους  $r$  στην  $S_n$ .

δ) Αν  $a$  είναι  $r$ -κύκλος, είναι και το  $a^k$   $r$ -κύκλος. (Δείτε και Ασκήσεις 23, 24, σελ. 96 του βιβλίου σας.)

5. Μία στοιχειώδης αντιμετάθεση είναι μία αντιμετάθεση της μορφής  $s_i = (i \ i+1)$  για  $i < n$ .
- α) Αν  $i < j$ , δείξτε ότι  $(i \ j)$  είναι γινόμενο περιττών στοιχειωδών αντιμεταθέσεων.
- β) Δείξτε ότι οι  $n - 1$  στοιχειώδεις αντιμεταθέσεις  $s_1, s_2, \dots, s_{n-1}$  είναι γεννήτορες της ομάδας  $S_n$ .
- γ) Δείξτε ότι μεταξύ των στοιχειωδών αντιμεταθέσεων ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{aligned} s_i s_{i+1} s_i &= s_{i+1} s_i s_{i+1} \\ s_i s_j &= s_j s_i, \quad |i - j| > 1 \end{aligned}, \quad i, j \in \{1, \dots, n - 1\}.$$

6. Δείξτε ότι η  $S_n$  παράγεται από τις μεταθέσεις  $(12)$  και  $(1, 2, \dots, n)$ . (Για υποδείξεις δείτε Ασκ. 51, σελ. 134 του βιβλίου σας.)

7. Δείξτε ότι για κάθε υποομάδα  $H$  της  $S_n$ , με  $n \geq 2$ , είτε όλες οι μεταθέσεις στην  $H$  είναι άρτιες είτε ακριβώς οι μισές από αυτές είναι άρτιες.

8. α) Εστω  $(A, +, \cdot)$  και  $(B, +, \cdot)$  δακτύλιοι. Δείξτε ότι το καρτεσιανό γινόμενο  $A \times B$  εφοδιασμένο με τις κάτωθι πράξεις είναι επίσης δακτύλιος:

$$\begin{aligned} + : (a_1, b_1) + (a_2, b_2) &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\ \cdot : (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) &= (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2) \end{aligned}$$

β) Εστω  $(A, +, \cdot)$  ένας δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Δείξτε ότι το σύνολο  $A^*$  των αντιστρέψιμων στοιχείων του αποτελεί ομάδα με πρόζη τον πολλαπλασιασμό.

γ) Εστω  $(A, +, \cdot)$  και  $(B, +, \cdot)$  δακτύλιοι με μοναδιαία στοιχεία. Δείξτε ότι ο δακτύλιος  $(A \times B, +, \cdot)$  έχει μοναδιαίο στοιχείο και ισχύει  $(A \times B)^* = A^* \times B^*$ .

δ) Δείξτε ότι οι δακτύλιοι  $(Z_m \times Z_n, +, \cdot)$   $(Z_{mn}, +, \cdot)$  είναι ισομορφικοί αν και μόνον αν  $(m, n) = 1$ .

ε) Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία του δακτυλίου  $Z_{15}$ .  
(Υπόδειξη:  $Z_{15} \cong Z_3 \times Z_5$ .)

Παράδοση: Παρασκευή 8 Φεβρουαρίου 2008 στο μάθημα.

Σ. Λαμπροπούλου