

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ
Λύσεις ορισμένων Ασκήσεων

1)

(α) Έχουμε συνολικά $2^N = 2^4 = 16$ καταστάσεις.

	A	A'			M	M'	M*	E	E'	E*
1	+	+	+	+	$2\mu_0$	$3\mu_0$	$5\mu_0$	$-2\mu_0 B$	$-3\mu_0 B$	$-5\mu_0 B$
2	+	+	+	-	$2\mu_0$	μ_0	$3\mu_0$	$-2\mu_0 B$	$-\mu_0 B$	$-3\mu_0 B$
3	+	+	-	+	$2\mu_0$	μ_0	$3\mu_0$	$-2\mu_0 B$	$-\mu_0 B$	$-3\mu_0 B$
4	+	-	+	+	$2\mu_0$	μ_0	$3\mu_0$	$-2\mu_0 B$	$-\mu_0 B$	$-3\mu_0 B$
5	+	+	-	-	$2\mu_0$	$-\mu_0$	μ_0	$-2\mu_0 B$	$\mu_0 B$	$-\mu_0 B$
6	+	-	+	-	$2\mu_0$	$-\mu_0$	μ_0	$-2\mu_0 B$	$\mu_0 B$	$-\mu_0 B$
7	+	-	-	+	$2\mu_0$	$-\mu_0$	μ_0	$-2\mu_0 B$	$\mu_0 B$	$-\mu_0 B$
8	+	-	-	-	$2\mu_0$	$-3\mu_0$	$-\mu_0$	$-2\mu_0 B$	$3\mu_0 B$	$\mu_0 B$
9	-	+	+	+	$-2\mu_0$	$3\mu_0$	μ_0	$2\mu_0 B$	$-3\mu_0 B$	$-\mu_0 B$
10	-	+	+	-	$-2\mu_0$	μ_0	$-\mu_0$	$2\mu_0 B$	$-\mu_0 B$	$\mu_0 B$
11	-	+	-	+	$-2\mu_0$	μ_0	$-\mu_0$	$2\mu_0 B$	$-\mu_0 B$	$\mu_0 B$
12	-	-	+	+	$-2\mu_0$	μ_0	$-\mu_0$	$2\mu_0 B$	$-\mu_0 B$	$\mu_0 B$
13	-	+	-	-	$-2\mu_0$	$-\mu_0$	$-3\mu_0$	$2\mu_0 B$	$\mu_0 B$	$3\mu_0 B$
14	-	-	+	-	$-2\mu_0$	$-\mu_0$	$-3\mu_0$	$2\mu_0 B$	$\mu_0 B$	$3\mu_0 B$
15	-	-	-	+	$-2\mu_0$	$-\mu_0$	$-3\mu_0$	$2\mu_0 B$	$\mu_0 B$	$3\mu_0 B$
16	-	-	-	-	$-2\mu_0$	$-3\mu_0$	$-5\mu_0$	$2\mu_0 B$	$3\mu_0 B$	$5\mu_0 B$

το + ισοδυναμεί με σπιν \uparrow , δηλ. μαγνητική ροπή παράλληλη με το B ,
το - ισοδυναμεί με σπιν \downarrow , δηλ. μαγνητική ροπή παράλληλη με το $-B$

(β) Αρχικά, προτού έρθουν σε θερμική επαφή τα δύο συστήματα, A και A' , το σύστημα A^* , βρίσκεται στην κατάσταση # 9:

	A	A'			M	M'	M*	E	E'	E*
9	-	+	+	+	$-2\mu_0$	$3\mu_0$	μ_0	$2\mu_0 B$	$-3\mu_0 B$	$-\mu_0 B$

Αφού έρθουν σε επαφή τα δύο συστήματα, A και A' , το A^* μπορεί να βρίσκεται, με ίση πιθανότητα, σε κάθε μία από τις καταστάσεις με ίδια ολική μαγνήτιση $M^* = \mu_0$ και άρα ολική ενέργεια $E^* = -\mu_0 B$.

Σύμφωνα με τον πίνακα οι καταστάσεις αυτές είναι οι εξής τέσσερις:

	A	A'			M	M'	M*	E	E'	E*
5	+	+	-	-	$2\mu_0$	$-\mu_0$	μ_0	$-2\mu_0 B$	$\mu_0 B$	$-\mu_0 B$
6	+	-	+	-	$2\mu_0$	$-\mu_0$	μ_0	$-2\mu_0 B$	$\mu_0 B$	$-\mu_0 B$
7	+	-	-	+	$2\mu_0$	$-\mu_0$	μ_0	$-2\mu_0 B$	$\mu_0 B$	$-\mu_0 B$
9	-	+	+	+	$-2\mu_0$	$3\mu_0$	μ_0	$2\mu_0 B$	$-3\mu_0 B$	$-\mu_0 B$

(βi&ii) Παρατηρούμε ότι η μαγνήτιση, M, του A και η μαγνήτιση, M' , του A' παίρνουν τις τιμές

$M = -2\mu_0$ και $M' = 3\mu_0$ μία φορά (στην κατάσταση # 9),

$M = 2\mu_0$ και $M' = -\mu_0$ τρεις φορές (στις καταστάσεις # 5, 6, 7)

Άρα,

$P(M=-2\mu_0) = 1/4$, $P(M=2\mu_0) = 3/4$, και $\langle M \rangle = (-2\mu_0)P(M=-2\mu_0) + (2\mu_0)P(M=2\mu_0) = (-2\mu_0)(1/4) + (2\mu_0)(3/4) = \mu_0$

Αντιστοίχως,

$P(M'=3\mu_0) = 1/4$, $P(M'=-\mu_0) = 3/4$ και $\langle M' \rangle = (3\mu_0)P(M'=3\mu_0) + (-\mu_0)P(M'=-\mu_0) = (3\mu_0)(1/4) + (-\mu_0)(3/4) = 0$

Συνεπώς, $\langle M \rangle = \mu_0$ και $\langle M' \rangle = 0$ και βέβαια, $\langle M^* \rangle = \langle M \rangle + \langle M' \rangle = \mu_0$.

(β iii) Στην περίπτωση που τα συστήματα A και A' χωρίζονται ξανά, ώστε να μη μπορούν να ανταλλάξουν ενέργεια μεταξύ τους, οι τιμές της πιθανότητας $P(M)$, καθώς και η μέση μαγνήτιση $\langle M \rangle$, δεν θα αλλάξουν.

2) (a) Ο αριθμός των καταστάσεων που είναι προσιτές στο σύστημα $A^* = (A + A')$ όταν η μαγνητική ροπή του A δείχνει επάνω (+, δηλαδή με φορά παράλληλη στο μαγνητικό πεδίο B) (και άρα η μαγνητικές ροπές του A' δείχνουν επάνω (+) και οι υπόλοιπες N-n μαγνητικές ροπές του A' δείχνουν προς τα κάτω (-)), είναι $N_+ = N!/[n!(N-n)!]$

(β) Η μαγνητική ροπή του A δείχνει τώρα προς τα κάτω (-), δηλαδή με φορά αντιπαράλληλη στο μαγνητικό πεδίο B), ενώ τα A και A' συνεχίζουν να βρίσκονται σε θερμική επαφή. Η ενέργεια E^* του A^* παραμένει σταθερή. Εφόσον η μαγνητική ροπή του A δείχνει προς τα κάτω (-), τότε, για να παραμείνει η ολική ενέργεια E^* σταθερή, ($n+1$) μαγνητικές ροπές του A' πρέπει να δείχνουν προς τα επάνω (+) και [$N-(n+1)$] μαγνητικές ροπές του A' πρέπει να δείχνουν προς τα κάτω (-).

Άρα, ο αριθμός των καταστάσεων που είναι προσιτές στο σύστημα $A' = (A + A')$ όταν η μαγνητική ροπή του A δείχνει προς τα κάτω είναι

$$N_+ = N! / [(n+1)!(N-(n+1))!]$$

Ο ολικός αριθμός των προσιτών καταστάσεων στο σύστημα A^* με ενέργεια E^* είναι τότε:

$$N_+ + N_- = N! / [n!(N-n)!] + N! / [(n+1)!(N-(n+1))!] =$$

$$N!(n+1)/[(n+1)!(N-n)!] + N!(N-n)/[(n+1)!(N-n)!] =$$

$$(n+1+N-n)N! / [(n+1)!(N-n)!] = (N+1)N! / [(n+1)!(N-n)!] =$$

$$(N+1)! / [(n+1)!(N-n)!]$$

Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι το σύστημα $A^* = (A+A')$ με $N+1$ σωματίδια, οποιαδήποτε $(n+1)$ από αυτά μαγνητική ροπή προς τα επάνω και τα υπόλοιπα $[N-(n+1)]$ έχουν μαγνητική ροπή προς τα κάτω.

$$(\gamma) P_+ \propto N_+, P_- \propto N_-$$

$$P_+ / P_- = N_+ / N_- = \{N! / [n!(N-n)!]\} / \{N! / [(n+1)!(N-(n+1))!]\} \\ = (n+1) / (N-n) = (n+1) / n'$$

$$P_+ / P_- = n' / (n+1) \approx (n'/n)(1+1/n)^{-1} \approx (n'/n) (1-1/n + \dots)$$

Άρα, για $n >> 1$ και για $n' >> 1$, $P_+ / P_- \approx (n'/n)$.

Αντό δηλώνει ότι αν η ολική μαγνητική ροπή ενός συστήματος $A^* = (A+A')$ δείχνει προς τα επάνω, τότε το κάθε ένα σπιν του συστήματος έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να δείχνει προς τα επάνω (δηλαδή παράλληλα προς το μαγνητικό πεδίο B) παρά προς τα κάτω.

5) Η ενέργεια της κβαντικής κατάστασης l του συστήματος A είναι $E_{A,l}$, όπου $l = 1, 2, 3, \dots$

Η συνάρτηση επιμερισμού του συστήματος A είναι $Z_A = \sum \exp(-\beta E_{A,l})$.

Αντιστοίχως για το σύστημα B : $E_{B,m}$, όπου $m = 1, 2, 3, \dots$

Η συνάρτηση επιμερισμού του συστήματος B είναι $Z_B = \sum \exp(-\beta E_{B,m})$.

Τα συστήματα A, B, C, D, \dots είναι σε επαφή με δεξαμενή θερμότητας σε θερμοκρασία T .

Επειδή τα συστήματα A, B, C, D, \dots είναι σχεδόν ανεξάρτητα, η κβαντική κατάσταση του συστήματος $\{A + B + C + D + \dots\}$ καθορίζεται από τον προσδιορισμό των κβαντικών καταστάσεων του κάθε υποσυστήματος A, B, C, D, \dots , δηλαδή (l, m, \dots) όπου τα l, m, \dots παίρνουν τις τιμές $1, 2, \dots$, ανεξάρτητα το ένα από τα άλλα.

$$\text{Tότε, } E \approx E_{A,l} + E_{B,m} + E_{C,n} + \dots$$

Συνεπώς,

$$Z_{A+B+C+\dots} = \sum \sum \sum \dots \exp(-\beta[E_{A,l} + E_{B,m} + E_{C,n} + \dots]) = \\ = (\sum \exp(-\beta E_{A,l})) (\sum \exp(-\beta E_{B,m})) (\sum \exp(-\beta E_{C,n})) \dots$$

Άρα,

$$\boxed{\dots = Z_A Z_B Z_C \dots}$$

Η ελεύθερη ενέργεια Helmholtz είναι $F = -k_B \ln Z$.

$$F_{A+B+C+\dots} = -k_B \ln Z_{A+B+C+\dots} = -k_B (\ln Z_A + \ln Z_B + \ln Z_C + \dots) = \\ = -k_B \ln Z_A - k_B \ln Z_B - k_B \ln Z_C - \dots = \\ = F_A + F_B + F_C + \dots$$

6) Η συνάρτηση επιμερισμού για το ένα σωματίδιο, όταν έχουμε δύο προσιτές καταστάσεις, είναι

$$\zeta = \exp(-\beta \varepsilon_1) + \exp(-\beta \varepsilon_2)$$

Η πιθανότητα να βρίσκεται ένα σωματίδιο σε κάθε μία από τις προσιτές του καταστάσεις είναι:

$$P_1 = [\exp(-\beta \varepsilon_1)] / \zeta, \quad P_2 = [\exp(-\beta \varepsilon_2)] / \zeta$$

$$(P_1 + P_2 = 1)$$

Επειδή τα σωματίδια έχουν αμελητέα αλληλεπίδραση, η συνάρτηση επιμερισμού του συστήματος των N σωματιδίων, Z είναι $Z = \zeta^N = [\exp(-\beta \varepsilon_1) + \exp(-\beta \varepsilon_2)]^N$

Μέση ενέργεια του συστήματος:

Για το ένα σωματίδιο,

$$\langle \varepsilon \rangle = \{\varepsilon_1 \exp(-\beta \varepsilon_1) + \varepsilon_2 \exp(-\beta \varepsilon_2)\} / \zeta = \{\varepsilon_1 \exp(-\beta \varepsilon_1) + \varepsilon_2 \exp(-\beta \varepsilon_2)\} / \{\exp(-\beta \varepsilon_1) + \exp(-\beta \varepsilon_2)\}$$

Για τα N σωματίδια, $\langle E \rangle = N \langle \varepsilon \rangle = N \{\varepsilon_1 \exp(-\beta \varepsilon_1) + \varepsilon_2 \exp(-\beta \varepsilon_2)\} / \zeta$

Άλλος τρόπος: $\langle E \rangle = -\partial \ln Z / \partial \beta = - (1/Z) \partial Z / \partial \beta = - [1/\zeta^N] N \zeta^{N-1} (-\varepsilon_1 \exp(-\beta \varepsilon_1) - \varepsilon_2 \exp(-\beta \varepsilon_2)) = N (\varepsilon_1 \exp(-\beta \varepsilon_1) + \varepsilon_2 \exp(-\beta \varepsilon_2)) / \zeta = N \langle \varepsilon \rangle$

Καθώς $T \rightarrow 0$, ($\beta \rightarrow \infty$), $\langle E \rangle \rightarrow N\epsilon_1$

Και για $T \rightarrow \infty$, ($\beta \rightarrow 0$), $e^{-\beta\epsilon} \rightarrow 1$ και $\langle E \rangle \rightarrow N(\epsilon_1 + \epsilon_2)/2$.

$$(\gamma) C(T) = \partial \langle E \rangle / \partial T = (\partial \langle E \rangle / \partial \beta)(\partial \beta / \partial T) = \dots = Nk_B \beta^2 \{(\epsilon_2 - \epsilon_1)^2 \exp(-\beta(\epsilon_2 - \epsilon_1))\} / \{1 + \exp(-\beta(\epsilon_2 - \epsilon_1))\}^2$$

(όπου $\beta = (k_B T)$)

Καθώς $T \rightarrow 0$, ($\beta \rightarrow \infty$),

$$C(T \rightarrow 0) = C(\beta \rightarrow \infty) \approx Nk_B [\beta(\epsilon_2 - \epsilon_1)]^2 \exp(-\beta(\epsilon_2 - \epsilon_1)) \rightarrow 0.$$

Καθώς $T \rightarrow \infty$, ($\beta \rightarrow 0$), $\exp(-\beta(\epsilon_2 - \epsilon_1)) \rightarrow 1$

$$C(T \rightarrow \infty) = C(\beta \rightarrow 0) \approx Nk_B [\beta(\epsilon_2 - \epsilon_1)]^2 / 2 \rightarrow 0.$$

9) (a) $\epsilon = -\mu_0 \cdot \mathbf{B} = -\mu_0 B \cos \theta$, ($\theta = -30^\circ, 90^\circ, +30^\circ$) και άρα

$$\epsilon_1 = \epsilon(\theta = -30^\circ) = -\mu_0 B \cos(-30^\circ) = -\mu_0 B (-\sqrt{3}/2) = (\sqrt{3}/2) \mu_0 B,$$

$$\epsilon_2 = \epsilon(\theta = 90^\circ) = -\mu_0 B \cos(90^\circ) = -\mu_0 B (0) = 0,$$

$$\epsilon_3 = \epsilon(\theta = +30^\circ) = -\mu_0 B \cos(+30^\circ) = -\mu_0 B (\sqrt{3}/2) = -(\sqrt{3}/2) \mu_0 B.$$

(β) Για ένα άτομο, η συνάρτηση επιμερισμού ζ είναι:

$$\zeta = \exp(-\beta \epsilon_1) + \exp(-\beta \epsilon_2) + \exp(-\beta \epsilon_3)$$

$$= 1 + \exp(-[\sqrt{3}/2] \beta \mu_0 B) + \exp([\sqrt{3}/2] \beta \mu_0 B).$$

Για N άτομα, με αμελητέα αλληλεπίδραση, η συνάρτηση επιμερισμού Z είναι:

$$Z = \zeta^N = \{1 + \exp(-[\sqrt{3}/2] \beta \mu_0 B) + \exp([\sqrt{3}/2] \beta \mu_0 B)\}^N$$

Πιθανότητες κατάληψης: $P_i = \exp(-\beta \epsilon_i) / \zeta$.

$$(\gamma) \mu_i = \mu_{ix} \mathbf{x} + \mu_{iy} \mathbf{y}$$

$$\langle m \rangle_x = \mu_{1x} P_1 + \mu_{2x} P_2 + \mu_{3x} P_3 = \{\cosh([\sqrt{3}/2] \beta \mu_0 B) - 1\} / \zeta \mu_0$$

$$\langle m \rangle_y = \mu_{1y} P_1 + \mu_{2y} P_2 + \mu_{3y} P_3 = \sqrt{3} \{\sinh([\sqrt{3}/2] \beta \mu_0 B) / \zeta\} \mu_0$$

Μέση μαγνήτιση ανά άτομο: $\langle m \rangle_x \hat{\mathbf{x}} + \langle m \rangle_y \hat{\mathbf{y}}$

Μέση ενέργεια ανά άτομο:

$$\langle \epsilon \rangle = -\partial \ln \zeta / \partial \beta = -\partial \ln [1 + \exp(-[\sqrt{3}/2] \beta \mu_0 B) + \exp([\sqrt{3}/2] \beta \mu_0 B)] / \partial \beta =$$

$$= -\sqrt{3} \mu_0 B [\{\sinh([\sqrt{3}/2] \beta \mu_0 B) / \zeta\}]$$

Παρατηρούμε ότι $\langle \epsilon \rangle = -\langle m \rangle \cdot \mathbf{B}$

10) (a) Για να αυξηθεί η θερμοκρασία του πάγου από τους -5°C , στους 0°C θα απορροφήσει θερμότητα:

$$Q_{\text{πάγου} (-5 \rightarrow 0)} = m_{\text{πάγου}} c_{\text{πάγου}} \Delta T_{\text{πάγου}} = (500 \text{ gram}) (2,13 \text{ joule/gram K}) (5 \text{ K}) = 5325 \text{ J.}$$

Για να λυώσει ο πάγος, που βρίσκεται στους 0°C , απαιτείται ποσό θερμότητας

$$Q_{\text{πήξης πάγου}} = (500 \text{ gram}) (333 \text{ joules/gram}) = 166500 \text{ joules.}$$

Για να μειωθεί η θερμοκρασία του χαλκού (Cu) από τους 50°C στους 0°C θα εκλυθεί ποσό θερμότητας:

$$Q_{\text{Cu} (50 \rightarrow 0)} = m_{\text{Cu}} c_{\text{Cu}} \Delta T_{\text{Cu}} = (1000 \text{ gram}) (0,418 \text{ joule/gram K}) (-50 \text{ K}) =$$

$$-20900 \text{ J.}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι όταν ο πάγος φτάσει στη θερμοκρασία 0°C , η θερμοκρασία του χαλκού θα έχει φτάσει στην τιμή T_{f1} :

$$Q_{\text{πάγου} (-5 \rightarrow 0)} + m_{\text{Cu}} c_{\text{Cu}} (T_{f1} - 50^\circ\text{C}) = 5325 + (500 \text{ gram}) (0,418 \text{ joule/gram K}) (T_{f1} - 50^\circ\text{C}) = 0$$

$$5325 + 418 T_{f1} - 20900 = 0 \rightarrow T_{f1} = (20900 - 5325) / 418 = 37,26^\circ\text{C}.$$

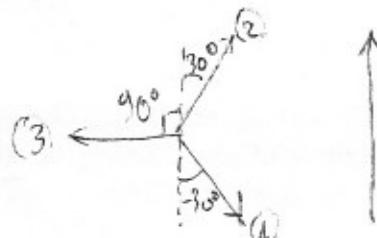
Τώρα έχουμε 500 gram πάγου στους 0°C και 1000 gram χαλκού στους $37,26^\circ\text{C}$.

Ο χαλκός στους $37,26^\circ\text{C}$ μπορεί να δώσει $(20900 - 5325) = 15575 \text{ joules}$ για να μειώσει τη θερμοκρασία του στους 0°C και να λύσει m γραμμάρια πάγου:

$$(m \text{ gram πάγου που γίνεται νερό}) (333 \text{ joules/gram}) = 15575 \text{ joules}$$

$$\text{και άρα } m \text{ πάγου που γίνεται νερό} = 15575 / 333 = 46,77 \text{ gram.}$$

Παραμένουν $500 - 46,77 = 453,23 \text{ gram πάγου στους } 0^\circ\text{C}$.



Έχουν λυώσει 46,77 gram πάγου που έγιναν νερό στους 0 °C, έχουν μείνει 453,23 gram πάγου στους 0 °C και 1000gram χαλκού στους 0 °C.

$$(\beta) \Delta S = \Delta S_{Cu(50 \rightarrow 0)} + \Delta S_{πάγου (-5 \rightarrow 0)} + \Delta S_{πήξης πάγου}$$

$$\Delta S_{Cu(50 \rightarrow 0)} = \int [(1000)(0,418)/T] dT = 418 \ln(273/323) = -70,299 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{πάγου (-5 \rightarrow 0)} = \int [(500)(2,13)/T] dT = 1065 \ln(273/268) = 19,686 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{πήξης πάγου} = [15575]/[273] = 57,051 \text{ J/K}$$

Άρα,

$$\Delta S = \Delta S_{Cu(50 \rightarrow 0)} + \Delta S_{πάγου (-5 \rightarrow 0)} + \Delta S_{πήξης πάγου} = \\ = (-70,299 + 19,686 + 57,051) \text{ J/K} = 6,438 \text{ J/K.}$$

11)

Αρχικά Pb (200 °C)



Τελικά Pb και νερό στους 0 °C



(α) Θερμότητα που θα εκλυθεί από τον μόλυβδο καθώς ψύχεται (από τους 200 °C στους 0 °C): $Q_{Pb} = m_{Pb} C_{Pb} \Delta T = (300 \text{ gram})(0,126 \text{ J/gram K})(200 \text{ K}) = 7560 \text{ J}$

Για να λυώσει ένα γραμμάριο πάγου απαιτούνται 333 J. Άρα, ο μόλυβδος, κατά τη διαδικασία της ψύξης του θα λυώσει: $m_{λυωμένου πάγου} = Q_{Pb}/333 = 22,70 \text{ gram}$.

Επειδή δε θα λυώσει όλος ο πάγος, η τελική θερμοκρασία του συστήματος θα είναι: $T_f = 0 \text{ °C} = 273 \text{ K}$. Εκτός από τον πάγο που δεν έλυσε θα έχουμε τα 300 gram Pb και 22,70 gram νερού, όλα στους 0 °C.

$$(\beta) \Delta S = \Delta S_{Pb} + \Delta S_{πάγου που έλυσε}$$

$$\Delta S_{Pb} = \int dQ/T = \int m_{Pb} C_{Pb} dT/T = (300)(0,126) \ln(273/473) = -20,78 \text{ J/K}$$

$$\Delta S_{πάγου που έλυσε} = (Q_{πάγου} / T_f) = (7560 / 273) = 27,69 \text{ J/K}$$

$$\text{Άρα, } \Delta S = -20,78 \text{ J/K} + 27,69 \text{ J/K} = 6,91 \text{ J/K}$$

12) Η ολική ενέργεια $E_A + E_B$ είναι σταθερή. $\Delta E_A + \Delta E_B = 0$

$$S_{νερού}^{(i)} - S_{νερού}^{(f)} = \Delta S_{νερού} = \int dQ/T = \int m_{νερού} C_{νερού} dT/T = m_{νερού} C_{νερού} \ln(T_f/T_i) =$$

$$= (1000 \text{ gram})(4,18 \text{ J/gram K}) \ln(373/273) = 1304,6 \text{ J/K}$$

$$\text{Το νερό απορρόφησε θερμότητα } \Delta Q = m_{νερού} C_{νερού} \Delta T = 4,18 \times 10^5 \text{ J}$$

Η δεξαμενή έχασε αυτή την ποσότητα θερμότητας σε σταθερή θερμοκρασία T .

$$\text{Άρα, } \Delta S_{δεξαμενής} = -\Delta Q/T = -4,18 \times 10^5 \text{ J/373 K} = -1120,6 \text{ J/K}$$

$$\text{Άρα, } \Delta S_{συστήματος} = \Delta S_{νερού} + \Delta S_{δεξαμενής} = 1304,6 \text{ J/K} - 1120,6 \text{ J/K} = 184 \text{ J/K}$$

(β) Το νερό έρχεται πρώτα σε επαφή με δεξαμενή θερμότητας στους 50 °C.

To νερό απορροφά ποσό θερμότητας:

$$\Delta Q_{νερού} = m_{νερού} C_{νερού} \Delta T = (1000 \text{ gram})(4,18 \text{ J/gram K})(50 \text{ K}) = 209000 \text{ J}$$

Συνεπώς, η δεξαμενή αυτή χάνει ποσό θερμότητας:

$$\Delta Q_{\text{δεξαμενής στους } 50^{\circ}\text{C}} = -\Delta Q_{\text{νερού}} = -209000 \text{ J}$$

Και η μεταβολή στην εντροπία της δεξαμενής αυτής είναι:

$$\Delta S_{\text{δεξαμενής στους } 50^{\circ}\text{C}} = (\Delta Q_{\text{δεξαμενής στους } 50^{\circ}\text{C}})/T = -209000/323 = -647,06 \text{ J/K.}$$

Το νερό τώρα έρχεται σε επαφή με δεξαμενή στους 100°C .

To νερό απορροφά ποσό θερμότητας:

$$\Delta Q_{\text{νερού}} = m_{\text{νερού}} C_{\text{νερού}} \Delta T = (1000 \text{ gram}) (4,18 \text{ J/gram K}) (50 \text{ K}) = 209000 \text{ J}$$

Συνεπώς, η δεξαμενή αυτή χάνει ποσό θερμότητας:

$$\Delta Q_{\text{δεξαμενής στους } 100^{\circ}\text{C}} = -\Delta Q_{\text{νερού}} = -209000 \text{ J}$$

Και η μεταβολή στην εντροπία της δεξαμενής αυτής είναι:

$$\Delta S_{\text{δεξαμενής στους } 100^{\circ}\text{C}} = \Delta Q_{\text{δεξαμενής στους } 100^{\circ}\text{C}}/T = -209000/373 = -560,32 \text{ J/K.}$$

Συνολικά,

$$\Delta S_{\text{δεξαμενής}} = \Delta S_{\text{δεξαμενής στους } 50^{\circ}\text{C}} + \Delta S_{\text{δεξαμενής στους } 100^{\circ}\text{C}} = -(647,06 + 560,32) \text{ J/K} = \\ = -1207,38 \text{ J/K.}$$

Για το νερό, η $\Delta S_{\text{νερού}}$ παραμένει η ίδια. Άρα, για όλο το σύστημα,

$$\Delta S = \Delta S_{\text{νερού}} + \Delta S_{\text{δεξαμενής}} = (1304,6 - 1207,4) \text{ J/K} = 97,2 \text{ J/K, μικρότερη από την περίπτωση (a).}$$

(γ) Εάν το σύστημα παραμένει σε ισορροπία σε καθε βήμα, δηλαδή εάν το φέρνουμε διαδοχικά σε επαφή με μεγάλο αριθμό δεξαμενών θερμότητας με $T_1 = 0^{\circ}\text{C}$, $T_2, T_3, T_4, \dots, T_N = 100^{\circ}\text{C}$, τότε $\Delta S \rightarrow 0$ ($\Delta S_{\text{δεξαμενών}} \rightarrow \Delta S_{\text{νερού}}$).

13) Στους $T = 0^{\circ}\text{C}$ ($= 273,15 \text{ K}$):

$$(\alpha) \Delta S = S_{\text{νερού}} - S_{\text{πάγου}} = \Delta Q/T = 6000/273,15 = 21,97 \text{ Joules/Kelvin.}$$

$$(\beta) S = k_B \ln \Omega. \text{ Άρα,}$$

$$\Delta S = k_B \ln \Omega_{\text{νερού}} - k_B \ln \Omega_{\text{πάγου}} = k_B \ln (\Omega_{\text{νερού}} / \Omega_{\text{πάγου}}) = 21,97 \text{ Joules/Kelvin.}$$

$$\text{Tότε, } (\Omega_{\text{νερού}} / \Omega_{\text{πάγου}}) = \exp(\Delta S / k_B) = \exp(21,97 / 1,38 \times 10^{-23}) = \exp(15,9 \times 10^{24}) \approx 10^\alpha,$$

$$\text{Οπου } \alpha \approx 6,8 \times 10^{24}.$$

Παρατηρούμε ότι $\Omega_{\text{νερού}} \gg \Omega_{\text{πάγου}}$

15) Συνθήκη ισορροπίας:

$$G = G(N_1, N_2, N_3)$$

Στην κανονική ισορροπία: $\Delta G = 0$

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial N_1} \Delta N_1 + \frac{\partial G}{\partial N_2} \Delta N_2 + \frac{\partial G}{\partial N_3} \Delta N_3 = 0$$

$$\therefore \mu_1 \Delta N_1 + \mu_2 \Delta N_2 + \mu_3 \Delta N_3 = 0$$

Διέρρευση CO_2 γίνονται στο μέρος CO και

ένα μέρος O_2

$$\text{Άρα: } \Delta N_2 = -\Delta N_1, \quad \Delta N_3 = -\frac{\Delta N_1}{2}$$

$$\text{Άρα: } \Delta G = 0 \Rightarrow (\mu_1 - \mu_2 - \frac{\mu_3}{2}) \Delta N_1 = 0$$

$$\Delta N_1 \neq 0 \Rightarrow \mu_1 - \mu_2 - \frac{\mu_3}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{2\mu_1 = 2\mu_2 + \mu_3}$$