ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ, 27 Φεβρουαρίου 2008

ΖΗΤΗΜΑ 1. Διατυπώστε το αξίωμα της επιλογής. Χρησιμοποιήστε το για να αποδείξτε ότι αν το σύνολο A είναι αναπαρίθμητο και αν f είναι συνάρτηση από το A στο $\mathbb{N}$ τότε υπάρχει υποσύνολο B του A ώστε η f είναι σταθερή στο B.

αναπαρίθμητο

Ονομάζουμε *σταυρό* κάθε επίπεδο σχήμα που αποτελείται από τα σημεία των διαγωνίων $A\Gamma$ και ΔB ενός τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$. Δυο σταυροί είναι ξένοι μεταξύ τους εάν δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Έστω $\mathcal{A}$ ένα σύνολο σταυρών στο επίπεδο οι οποίοι ανά δύο είναι ξένοι μεταξύ τους (όχι αναγκαστικά του ιδίου μεγέθους). Αποδείξτε ότι $\mathcal{A}$ είναι απαριθμητό σύνολο.

ΖΗΤΗΜΑ 2. Διατυπώστε το λήμμα του Zorn. Αποδείξτε ότι η υπόθεση της ισχύος του λήμματος του Zorn συνεπάγεται την ισχύ του αξιώματος της επιλογής.

ΖΗΤΗΜΑ 3. Το σύνολο A είναι *διατακτικός* εάν A είναι μεταβατικό σύνολο και εάν η διάταξη $\langle A, \in \rangle$ είναι αυστηρή καλή διάταξη. Εξηγήστε αναλυτικά τί σημαίνει αυτός ο ορισμός. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας μόνον αυτόν τον ορισμό, αποδείξτε ότι (γράφοντας α σημαίνει ότι α είναι διατακτικός)

1. $\forall \alpha, \alpha \notin \alpha$
2. Αν $x \in \alpha$ τότε x είναι διατακτικός.

ΖΗΤΗΜΑ 4. Διατυπώστε το αξίωμα του απείρου. Ορίστε το σύνολο ω των φυσικών αριθμών. Γιατί, για τον ορισμό του ω, είναι απαραίτητο το αξίωμα του απείρου;

Διατυπώστε για το ω την αρχή της (αριθμητικής) επαγωγής. Αποδείξτε ότι στο ω η αρχή της επαγωγής είναι ισοδύναμη με την αρχή της υπερπεπερασμένης επαγωγής (ΑΥΕ).

ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ 3 ΩΡΕΣ. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!