

## ΘΕΩΡΙΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΩΝ ΚΑΙ ΚΩΔΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1892

1. Ένας μεταδότης έχει ένα αλφάβητο που αποτελείται από πέντε γράμματα  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ , και ο δέκτης έχει ένα αλφάβητο που αποτελείται από τέσσερα γράμματα  $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ . Οι από κοινού πιθανότητες για την επικοινωνία, δίνονται παρακάτω.

	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
$x_1$	0.25	0	0	0
$x_2$	0.10	0.30	0	0
$x_3$	0	0.05	0.10	0
$x_4$	0	0	0.05	0.10
$x_5$	0	0	0.05	0

1892

Να υπολογιστούν τα  $H(X)$ ,  $H(Y)$ ,  $H(X, Y)$ ,  $H(Y|X)$  και  $H(X|Y)$ .

2. Η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας, που αντιστοιχεί σε έναν δίαυλο με δυαδική είσοδο ( $X$ ) και έξοδο ( $Y$ ), δίνεται παρακάτω.

	$y_1$	$y_2$
$x_1$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$x_2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Να υπολογιστούν τα  $H(X)$ ,  $H(Y)$ ,  $H(X, Y)$  και  $I(X, Y)$ :

1892

3. Δίνεται ο δυαδικός κώδικας  $C = \{c_1 = 0, c_2 = 10, c_3 = 11\}$ . Έστω ότι  $N(k)$  είναι ο συνολικός αριθμός των ακολουθιών κωδικών λέξεων που περιέχουν ακριβώς  $k$  bits. Να προσδιορίσετε τα  $N(1)$ ,  $N(2)$ , και  $N(3)$ . Να δείξετε ότι  $N(k) = N(k-1) + 2N(k-2)$ , για  $k \geq 3$ . Να επιλύσετε την προηγούμενη αναδρομική σχέση.

1892

4. Να εξετάσετε αν υπάρχει ένας στιγμιαίος κώδικας για τις παρακάτω περιπτώσεις. Αν ναι, τότε να κατασκευάσετε τον αντίστοιχο κώδικα.

(i)  $r = 2$ , μήκη κωδικών λέξεων: 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5

(ii)  $r = 5$ , μήκη κωδικών λέξεων: 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4.

1892

5. Έστω ότι θέλουμε έναν στιγμιαίο δυαδικό κώδικα που να περιέχει τις κωδικές λέξεις 0, 10 και 1100. Πόσες το πολύ επιπλέον κωδικές λέξεις μήκους 6 μπορούμε να προσθέσουμε στον κώδικα αυτόν; Να κατασκευάσετε έναν κώδικα με αυτές τις επιπλέον κωδικές λέξεις.

1892

6. Προσδιορίστε τον τριαδικό κώδικα σύμφωνα με τη μέθοδο του Fano για τα παρακάτω σύμβολα μίας πηγής.

$u_i$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	$u_6$
$p(u_i)$	3/8	1/6	1/8	1/8	1/8	1/12
	1	2	2	2	2	2

Προσδιορίστε επίσης τον αντίστοιχο τριαδικό κώδικα με τη μέθοδο του Shannon. Να βρείτε τις αποδοτικότητες των δύο κωδίκων και να τις συγκρίνετε.

1699/7. Μία πηγή πληροφορίας παράγει έξη διαφορετικά σύμβολα ( $u_1, u_2, \dots, u_6$ ) με αντίστοιχες πιθανότητες 0.35, 0.10, 0.19, 0.25, 0.06, 0.05. Να βρεθεί ο αντίστοιχος δυαδικός κώδικας με τη μέθοδο του Huffman, καθώς επίσης και η αποδοτικότητά του.

1699/8. Προσδιορίστε τον δυαδικό κώδικα σύμφωνα με τη μέθοδο Gilbert-Moore για τα παρακάτω σύμβολα μίας πηγής.

$u_i$	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$
$p(u_i)$	0.1	0.3	0.2	0.4

Προσδιορίστε επίσης τον αντίστοιχο δυαδικό κώδικα με τη μέθοδο του Shannon και με τη μέθοδο του Huffman. Να βρείτε τις αποδοτικότητες των τριών κωδίκων και να τις συγκρίνετε.

1699/9. Να δείξετε ότι  $A_2(6, 3) = 8$ .

1699/10. Να δείξετε ότι για  $m \geq 1$ , ο κώδικας Reed-Muller πρώτης τάξης  $C(1, m)$  είναι ένας  $(2^m, 2^{m+1}, 2^{m-1})$  δυαδικός κώδικας.

1699/11. Να δείξετε ότι για  $m \geq r$ , ο κώδικας Reed-Muller  $r$ -τάξης  $C(r, m)$  είναι ένας  $(2^m, 2^a, 2^{m-r})$  δυαδικός κώδικας, όπου  $a = 1 + \binom{m}{1} + \dots + \binom{m}{r}$  και  $a = 1$  για  $r = 0$ .

1699/12. Να κατασκευάσετε τον δυαδικό κώδικα Hadamard με παραμέτρους  $(8, 16, 4)$ , και να δείξετε ότι αυτός είναι βέλτιστος.  $\rightarrow$  ισχύει η ιδιότητα στο Hamming

1699/13. Να δείξετε ότι για  $m \geq 1$ , ο κώδικας Reed-Muller πρώτης τάξης  $C(1, m)$  είναι ένας γραμμικός  $(2^m, 2^{m+1}, 2^{m-1})$  κώδικας.

1699/14. Να δείξετε ότι ο κώδικας Reed-Muller  $r$ -τάξης  $C(r, m)$  έχει παραμέτρους

$$(2^m, 1 + \binom{m}{1} + \dots + \binom{m}{r}, 2^{m-r})$$

όπου το άθροισμα για τη διάσταση του κώδικα θεωρείται 1 αν  $r = 0$ .

1699/15. Υποθέτοντας ότι χρησιμοποιήθηκε ο κώδικας Reed-Muller  $C(1, 3)$ , να αποκωδικοποιήσετε το διάνυσμα 11000001.

1699/16. Να προσδιορίσετε τον αριθμό των κωδικών λέξεων βάρους 3, του δυαδικού κώδικα Hamming  $Ham(r, 2)$ .

1699/17. Να χρησιμοποιήσετε τον πίνακα ελέγχου της ισοτιμίας του κώδικα Hamming  $Ham(2, 7)$ , για να αποκωδικοποιήσετε τα διανύσματα 35234106 και 10521360.

1699/18. Να βρείτε όλους τους δυαδικούς κυκλικούς κώδικες μήκους 5 και 7 και να γράψετε τον γεννητήρα πίνακα του καθενός.

1699/19. Να βρείτε τον αριθμό των κωδικών λέξεων για κάθε ένα από τα βάρη 0, 1, 2, 3 και 4 στον δυαδικό κώδικα Hamming  $Ham(4, 2)$ .