

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ  
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**

**ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ/2<sup>ο</sup> Εξάμηνο  
Επαναληπτική εξέταση**

26-10-2007

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

(A) Να αποδείξετε ότι δύο όμοιοι πίνακες έχουν ίσα ίχνη και ίσες ορίζουσες.

**Μονάδες 1**

(B) Αν ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος και έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\chi_A(t) = |tI - A| = \begin{vmatrix} t-4 & 0 & -1 \\ 0 & t+1 & 0 \\ -1 & 0 & t-4 \end{vmatrix},$$

να βρείτε τις ιδιοτιμές του, χωρίς τον υπολογισμό του χαρακτηριστικού πολυωνύμου.

**Μονάδες 1**

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ όπου } \alpha \in \mathbb{R}.$$

(i) Να βρείτε το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο του A για τις διάφορες τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 1**

(ii) Να βρείτε την κανονική μορφή Jordan του πίνακα A για τις διάφορες τιμές του  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 1**

(iii) Για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι:

$$A^{2\kappa} = \kappa A^2 + (1-\kappa)I, \quad \text{για κάθε } \kappa \in \mathbb{N},$$
$$A^{2\kappa+1} = \kappa A^2 + A - \kappa I, \quad \text{για κάθε } \kappa \in \mathbb{N}.$$

**Μονάδες 1,5**

Να εξετάσετε πως γίνονται οι παραπάνω ισότητες για  $\alpha = 0$ .

**Μονάδες 0,5**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Έστω  $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}^T$ ,  $u_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}^T$  μία ορθοκανονική βάση του υπόχωρου  $V$  του  $\mathbb{R}^3$ . Βρείτε την ορθογώνια προβολή του διανύσματος  $w = [1 \ 2 \ -1]^T$  επί του  $V$  και την απόσταση του  $w$  από τον υπόχωρο  $V$ .

**Μονάδες 2****ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

- (A) Αν ο πραγματικός  $n \times n$  πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος, να αποδείξετε ότι ο πίνακας  $A^T A$  είναι θετικά ορισμένος.

**Μονάδες 1**

- (B) Αν  $u, v, w$  είναι ορθοκανονικά διανύσματα ενός διανυσματικού χώρου  $V$ , να βρείτε το μέτρο του διανύσματος  $u + v + w$ .

**Μονάδες 1***Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες**Καλή επιτυχία*