

ΣΕΜΦΕ Μαθηματική Ανάλυση III
Κανονική Εξέταση (Ιανουάριος 2010)

Όνοματεπώνυμο:

ΟΜΑΔΑ Β

ΘΕΜΑ 1: Α) Να υπολογισθεί το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_D xy^2 dx dy$ όπου $D = \{(x, y) : y \geq 0, x \leq 2 - y, y \leq x\}$.

Β) Δίνεται το διανυσματικό πεδίο $F(x, y, z) = (2x + 2y, 2x - z^2, -2yz)$. Ναδειχθεί ότι είναι αστρόβιλο και να βρεθεί η συνάρτηση δυναμικού $f(x, y, z)$ για την οποία $f(1, 2, 0) = -1$.

(Μονάδες 2,5)

ΘΕΜΑ 2: Α) Διατυπώστε το θεώρημα Stokes κάνοντας σχετικό σχήμα στο οποίο να εμφανίζονται όλες οι έννοιες που αναφέρονται στη διατύπωση του θεωρήματος.

Β) Να επαληθευθεί το θεώρημα Stokes (ζητείται η σχεδίαση της επιφάνειας και η πλήρης εξήγηση της επιλογής των προσανατολισμών) για την επιφάνεια $S : \mathbf{r}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ με

$(u, v) \in D = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 4\}$ και το διανυσματικό πεδίο $F(x, y, z) = (z - 1, x + y, x - 1)$.

(Μονάδες 2,5)

ΘΕΜΑ 3: Α) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Gauss κάνοντας σχετικό σχήμα στο οποίο να εμφανίζονται όλες οι έννοιες που αναφέρονται στη διατύπωση του θεωρήματος.

Β) Να βρεθεί το σύνορο του χωρίου $G = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 6, x^2 + y^2 \leq 4\}$ και να υπολογισθεί η ροή του διανυσματικού πεδίου $F(x, y, z) = (x^2, y^2 - y, z)$ μέσω του συνόρου προς το εσωτερικό του χωρίου. Να γίνει σχετικό σχήμα.

Γ) Για το διανυσματικό πεδίο $F(x, y, z) = (-y^2, x, z^2)$ να υπολογισθεί με τη βοήθεια κατάλληλου επιφανειακού ολοκληρώματος το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα: $\oint_c F \cdot dr$ όπου c είναι η τομή του κυλίνδρου

$x^2 + y^2 = 1$ με το επίπεδο $x + z = 2$ και προσανατολισμό που εσείς πρέπει πρώτα να επιλέξετε.

(Μονάδες 2,5)

ΘΕΜΑ 4: Α) Αν c είναι μια κλειστή καμπύλη σύνορο ενός χωρίου του \mathbb{R}^2 στο οποίο εφαρμόζεται το θεώρημα Green και $F(x, y) = (-y^3, x^3 + 2x + y)$, να δείξετε ότι $\oint_c F \cdot dr > 0$.

Β) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Gauss, ναδειχθεί ότι το διανυσματικό πεδίο $G = \nabla \times F$ (όπου F είναι διαφορίσιμο C^2), έχει την ίδια ροή δια μέσου των παρακάτω επιφανειών προσανατολισμένων με μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα n ώστε $n \cdot k \geq 0$: $S_1 = \{(x, y, z) : z = 9 - x^2 - y^2, z \geq 0\}$,

$S_2 = \{(x, y, z) : z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, z \geq 0\}$, $S_3 = \{(x, y, z) : z = 0, x^2 + y^2 \leq 9\}$ (να γίνει σχήμα).

Γ) Να αποδειχθεί το προηγούμενο ερώτημα χρησιμοποιώντας το θεώρημα Stokes.

(Μονάδες 2,5)

Λιάρκεια εξέτασης 2+30'