

$$n = 2^k$$

$$k = \log_2(n)$$

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Μαθηματικών

Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα
10 Φεβρουαρίου 2016

- Διάρκεια: 2 ½ ώρες.
- Καλή επιτυχία.

Θέμα 1°

Να υπολογιστεί ο βέλτιστος κώδικας Huffman που αντιστοιχεί στο παρακάτω σύνολο συχνοτήτων:

a:1, b:3, c:5, d:10, e:21, f:42, g:85, h:170, i:400

Να παρουσιάσετε την δουλειά σας λεπτομερειακά.

Θέμα 2°

Έστω ένα ταξινομημένο διάνυσμα A από ακεραίους το οποίο έχει «κυκλικά περιστραφεί» k θέσεις προς τα δεξιά. Για παράδειγμα, το διάνυσμα $[35, 42, 5, 15, 27, 29]$ είναι ένα ταξινομημένο διάνυσμα που έχει περιστραφεί 2 θέσεις προς τα δεξιά, ενώ το διάνυσμα $[27, 29, 35, 42, 5, 15]$ έχει περιστραφεί κατά 4 θέσεις.

Έστω ότι δεν γνωρίζεται το k . Να σχεδιάσετε έναν $O(\log n)$ αλγόριθμο ο οποίος υπολογίζει το μέγιστο στοιχείο του διανύσματος A . Για την «μισή άσκηση» δώστε έναν $O(n)$ αλγόριθμο.

Να επιχειρηματολογήσετε ως προς την ορθότητα του αλγορίθμου σας και την πολυπλοκότητα του.

Θέμα 3°

Έστω ένα διάνυσμα με n ακεραίους αριθμούς. Ζητείται αλγόριθμος ο οποίος υπολογίζει το υποδιάνυσμα μέγιστου αθροίσματος.

Για παράδειγμα, στο διάνυσμα

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
31	-41	59	26	-53	58	97	-93	-23	84

το μέγιστο επιτυγχάνεται αθροίζοντας από το 3° ως και το 7° στοιχείο, όπου $59 + 26 + (-53) + 58 + 97 = 187$. Όταν όλοι οι αριθμοί είναι θετικοί, η απάντηση είναι ολόκληρο το διάνυσμα, ενώ όταν όλοι οι αριθμοί είναι αρνητικοί, το «άδειο» υποδιάνυσμα με άθροισμα 0 (μηδέν) είναι το ζητούμενο.

Σχεδιάστε έναν αλγόριθμο για το πρόβλημα εύρεσης του υποδιανύσματος μέγιστου αθροίσματος. Να αναλύσετε την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου σας και να επιχειρηματολογήσετε ως προς την ορθότητα του.

Θέμα 4°

Μια ακμή (u, v) ενός κατευθυνόμενου γραφήματος G ονομάζεται μεταβατική (transitive) όταν στο G υπάρχει (επιπλέον της (u, v)) ένα ακόμη απλό μονοπάτι που οδηγεί από την u προς την v .

Δοθέντος ενός κατευθυνόμενου γραφήματος G χωρίς κύκλους, να δοθεί αλγόριθμος ο οποίος κατασκευάζει υπογράφημα G' του G το οποίο δεν περιέχει μεταβατικές ακμές.

Να επιχειρηματολογήσετε ως προς την ορθότητα του αλγορίθμου σας και να αναλύσετε την πολυπλοκότητα του.

Θέμα 5°

Το πρόβλημα *subgraph isomorphism* δέχεται ως είσοδο δύο γραφήματα G_1 και G_2 και ρωτά εάν το γράφημα G_1 είναι υπογράφημα του G_2 . Να δειχθεί ότι το *subgraph isomorphism* πρόβλημα είναι NP-complete.