

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ (ΣΕΠΤ. 2009)

Θέμα 1. (α) Έστω $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, ολόμορφη. Αν η $\overline{f(z)}$ είναι επίσης ολόμορφη δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

(β) Έστω $a = a_1 + ia_2$, $b = b_1 + ib_2$, $c = c_1 + ic_2$ σταθεροί μιγαδικοί αριθμοί και $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ με $f(x+iy) = ax^2 + bxy + cy^2$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι ολόμορφη στο \mathbb{C} , δείξτε ότι $b = 2ia$, $c = -a$ και $f(z) = az^2$.

Θέμα 2. Έστω $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, ολόμορφη συνάρτηση. Για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ και για κάθε $R > 0$ με $R \neq |z_1|, |z_2|$ θέτουμε

$$I(R, z_1, z_2) = \int_{C_R} \frac{f(z)}{(z - z_1)(z - z_2)} dz$$

όπου C_R ο κύκλος κέντρου 0 και ακτίνας R .

(i) Δείξτε ότι

$$|I(R, z_1, z_2)| \leq 2\pi R \frac{\max\{|f(z)| : z \in C_R\}}{(R - |z_1|)(R - |z_2|)}$$

(ii) Δείξτε ότι αν $R > \max\{|z_1|, |z_2|\}$ τότε

$$I(R, z_1, z_2) = 2\pi i \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}$$

(iii) Δείξτε ότι αν υπάρχει $M \in \mathbb{R}$ ώστε $\sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{C}\} \leq M$, τότε για σταθερά z_1, z_2 ισχύει ότι $\lim_{R \rightarrow \infty} I(R, z_1, z_2) = 0$. (Τυποδ: Χρησιμοποιήστε το (i)).

(iv) Δείξτε ότι κάθε φραγμένη ακέραια συνάρτηση τότε είναι σταθερή. (Τυποδ: Χρησιμοποιήστε το (ii) και το (iii)).

(v) Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$ και $(z_n)_n$ ακολουθία με $z_n \rightarrow z_0$. Δείξτε ότι για $R > 0$ σταθερό αρκετά μεγάλο

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(R, z_n, z_0) = \int_{C_R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz = 2\pi i f'(z_0)$$

(vi) Ποιές είναι οι τιμές του $I(R, z_1, z_2)$ αν (α) $R < \min\{|z_1|, |z_2|\}$ και αν (β) $|z_1| < R < |z_2|$;

(Ζ) ↗

Θέμα 3. (α) Αναπτύξτε σε σειρά Taylor με κέντρο το 0 την συνάρτηση $f(z) = \frac{z}{1+z^2}$. Κατόπιν υπολογίστε τις παραγώγους $f^{(2n)}(0)$ και $f^{(2n+1)}(0)$ για κάθε n .

(β) Αναπτύξτε σε σειρά Laurent την συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$$

σε καθένα από τους δακτύλιους (i) $1 < |z| < 2$ και (ii) $|z| > 2$.

Θέμα 4. (α) Έστω $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα. (i) Η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ 2. (ii) Υπάρχουν σταθερές $a, b > 0$ ώστε $|f(z)| \leq a + b|z|^2$ (Τυποδ: Για την συνεπαγωγή (i) \Rightarrow (ii) αποδείξτε (διαχωρίζοντας τις περιπτώσεις $|z| \leq 1$ και $|z| > 1$) ότι $|a_0 + a_1z + a_2z^2| \leq a + b|z|^2$, όπου $a = |a_0| + |a_1|$ και $b = |a_1| + |a_2|$.

(β) Δίνονται δύο ολόμορφες συναρτήσεις f, g ορισμένες στον ανοικτό δίσκο $D_0 = D(0, 1)$ κέντρου 0 και ακτίνας 1. Τυποθέτουμε ότι για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $f(1/n)g(1/2n) = 0$. Δείξτε ότι είτε $f = 0$ ή $g = 0$.