

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ, ΦΥΛΑΟ 3

Άσκηση 1. Έστω η επιφάνεια $S : r(u, v) = (u + v, u - v, 2u^2 + 2v^2)$, $u, v \in \mathbb{R}$. Προσδιορίστε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της S στο τυχαίο σημείο $r(u, v)$ και εξετάστε αν οι παραμετρικές καμπύλες $u = 0$, $v = 0$ είναι γεωδαισιακές καμπύλες της S .

Άσκηση 2. Προσδιορίστε τη γεωδαισιακή καμπυλότητα στο τυχαίο σημείο των παραμετρικών καμπύλων: $\phi = \frac{\pi}{3}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ της επιφάνειας της σφαίρας

$$S : r(\phi, \theta) = (R \cos \phi \cos \theta, R \cos \phi \sin \theta, R \sin \phi), (\phi, \theta) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times [0, 2\pi].$$

Άσκηση 3. Προσδιορίστε την γεωδαισιακή καμπύλη της κυλινδρικής επιφάνειας

$$S : r(\theta, t) = (R \cos \theta, R \sin \theta, 3t), (\theta, t) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R},$$

που περνά από το σημείο $r(\frac{\pi}{2}, 1)$ και έχει κλίση $(1, 1)$.

Άσκηση 4. Έστω η επιφάνεια του κώνου

$$S : r(t, \theta) = (t \cos \theta, t \sin \theta, 4t), t \geq 0, \theta \in [0, 2\pi].$$

Προσδιορίστε τη γεωδαισιακή διαφορική εξίσωση της επιφάνειας και εξετάστε αν οι καμπύλες της S , $t = 2\theta$, $t = 2$ και $\theta = \frac{\pi}{4}$, είναι γεωδαισιακές καμπύλες της S . Να σχεδιαστεί η επιφάνεια S και οι παραπάνω καμπύλες. Δίνονται: $\Gamma_{22}^1(t, \theta) = -\frac{t}{17}$, $\Gamma_{12}^2(t) = \Gamma_{21}^2(t, \theta) = \frac{1}{t}$ και $\Gamma_{jk}^i(t, \theta) = 0$, στις υπόλοιπες περιπτώσεις.

Άσκηση 5. Προσδιορίστε την κάθετη καμπυλότητα και την γεωδαισιακή καμπυλότητα στο τυχαίο σημείο των παραμετρικών καμπύλων $\phi = 0$, $\phi = \frac{\pi}{4}$ της επιφάνειας της σαμπρέλλας (σπείρα ή τόρος):

$$S : r(\phi, \theta) = ((b + \rho \sin \phi) \cos \theta, (b + \rho \sin \phi) \sin \theta, b + \rho \cos \phi),$$

$\phi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, και $b > \rho > 0$. Σχεδιάστε την επιφάνεια και τις καμπύλες και εξηγήστε την γεωμετρική σημασία του προσήμου αυτών των ποσοτήτων.

Άσκηση 6. Προσδιορίστε τις κορυφές και τις γωνίες του καμπυλόγραμμου τετραπλεύρου της επιφάνειας της σφαίρας:

$$r(\phi, \theta) = (\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, \sin \phi), (\phi, \theta) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times [0, 2\pi]$$

που ορίζεται από τις καμπύλες: $\phi = \frac{\pi}{4}$, $\phi = \frac{\pi}{3}$, $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Στη συνέχεια προσδιορίστε την γεωδαισιακή καμπυλότητα στο τυχαίο σημείο των καμπύλων. Στη συνέχεια εφαρμόστε το Θεώρημα των Gauss-Bonnet για το καμπυλόγραμμο τετράπλευρο.

Άσκηση 7. Έστω η απεικόνιση $f : S \rightarrow \overline{S}$, όπου

$$S : r(\phi, \theta) = (R \cos \phi \cos \theta, R \cos \phi \sin \theta, R \sin \phi), \phi \in (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}), \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$$

και \overline{S} η επιφάνεια του κυλίνδρου με άξονα τον άξονα των z , και ακτίνα R .

Αν $f(\phi, \theta) = (R \cos \theta, R \sin \theta, R \tan \phi)$, προσδιορίστε την εικόνα $S^* = f(S)$ της S στην \overline{S} .

Επίσης, προσδιορίστε την εικόνα $c_1^* = f(c_1), c_2^* = f(c_2)$ των καμπύλων $c_1 : \phi = \frac{\pi}{4}$, $c_2 : \phi = \frac{\pi}{3}$, και προσδιορίστε την γωνία τομής των c_1^*, c_2^* .

Εξετάστε αν η απεικόνιση f είναι ισομετρική και αν είναι σύμμορφη.