

## ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

### ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ, ΦΥΛΛΟ 1

Άσκηση 1. Έστω η στοιχειώδης επιφάνεια

$$S : \mathbf{r}(u, v), (u, v) \in \Omega = (0, 1) \times (0, 1),$$

και έστω ο μετασχηματισμός

$$\ell : D \longrightarrow \Omega \quad \text{όστε } \ell(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta), (\rho, \theta) \in D.$$

Προσδιορίστε το  $D$  ώστε ο μετασχηματισμός να είναι επί και δείξτε ότι ο μετασχηματισμός είναι επιτρεπτή αλλαγή παραμέτρων. Στην συνέχεια εξετάστε αν ο μετασχηματισμός διατηρεί τον προσανατολισμό της επιφάνειας δηλαδή αν το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της  $S$  και το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της  $S^* : \mathbf{w}(\rho, \theta) = r(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ , έχουν την ίδια φορά.

Άσκηση 2. Δείξτε ότι η εξίσωση  $x + y + z - \cos(x) - \cos(y) - \cos(z) - \frac{3\pi}{2} = 0$ , τοπικά στο σημείο  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  παριστάνει στοιχειώδη επιφάνεια της μορφής  $S : \mathbf{r}(x, y) = (x, y, z(x, y))$  και επίσης στοιχειώδη επιφάνεια της μορφής  $S^* : \mathbf{w}(x, z) = (x, y(x, z), z)$ . Προσδιορίστε (i) το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα και το εφαπτόμενο επίπεδο της  $S$  στο σημείο  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , και (ii) τα θεμελειώδη μεγέθη πρώτης τάξης των  $S$  και  $S^*$  στο ίδιο σημείο.

Άσκηση 3. Αν η  $F$ , τοπικά στο σημείο  $(x_0, y_0, z_0)$  είναι κλάσης 1,  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$  και  $\text{grad}F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ , δείξτε ότι η εξίσωση  $F(x, y, z) = 0$ , τοπικά στο σημείο  $(x_0, y_0, z_0)$  παριστάνει στοιχειώδη επιφάνεια και ότι το  $\text{grad}F(x_0, y_0, z_0)$  είναι κάθετο στην επιφάνεια στο σημείο  $(x_0, y_0, z_0)$ .

Άσκηση 4. Έστω η κυλινδρική επιφάνεια

$$S : \mathbf{r}(\theta, t) = (R \cos \theta, R \sin \theta, t), \quad \theta \in [0, 2\pi), t \in \mathbf{R}).$$

- (i) Εξετάστε τη συνέχεια της  $\mathbf{r}^{-1}$  στα σημεία  $(R, 0, 0)$  και  $(0, R, 0)$ .
- (ii) Προσδιορίστε το εφαπτόμενο διάνυσμα και το διάνυσμα καμπυλότητας της τομής  $S$  με το επίπεδο  $x + y + z = 1$ .

Άσκηση 5. Υπολογίστε τις κορυφές, τις γωνίες και το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου της κυλινδρικής επιφάνειας  $\mathbf{r}(\vartheta, t) = (\cos \vartheta, \sin \vartheta, t)$  που ορίζεται από τις καμπύλες  $t = 0$ ,  $\vartheta = \frac{\pi}{4}$  και  $\vartheta = t$ .

**Άσκηση 6.** Προσδιορίστε τη γωνία τομής των παραμετρικών καμπύλων, τα θεμελιώδη μεγέθη πρώτης και δευτερης τάξης και τα σύμβολα Christoffell της επιφάνειας:

$$S : \mathbf{r}(u, v) = (u - v, u + v, u^2).$$

**Άσκηση 7.** Έστω η καμπύλη  $\varphi = 2t$  της κυλινδρικής επιφάνειας  $\mathbf{r}(\varphi, t) = (\cos \varphi, \sin \varphi, t)$ . Προσδιορίστε το διάνυσμα καμπυλότητας  $\mathbf{k}$  της καμπύλης στο σημείο  $P_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$ . Στη συνέχεια αναλύστε το διάνυσμα αυτό σε άθροισμα δύο κάθετων διανυσμάτων  $\mathbf{k}_n$  και  $\mathbf{k}_g$  όπου το  $\mathbf{k}_n$  κάθετο στην επιφάνεια και το  $\mathbf{k}_g$  διάνυσμα του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας στο  $P_0$ .

**Άσκηση 8.** Αν  $E, F, G$  και  $L, M, N$  είναι τα θεμελιώδη μεγέθη πρώτης και δεύτερης τάξης επιφάνειας  $\mathbf{r}(u, v)$ ,  $H$  η διακρίνουσα, και η  $\mathbf{r}$  είναι κλάσης 2, δείξετε ότι:

- (i)  $EE_2 + FE_1 - 2EF_1 = -2\Gamma_{11}^2 H^2$ ,
- (ii)  $[r_1, r_{11}, N] = \Gamma_{11}^2 H$ ,
- (iii)  $[r_2, r_{11}, N] = \Gamma_{11}^1 H$ .