

Εξέταση στην «Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα»

**Θέμα 1.** (2 Βαθμοί) (α) Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 10 \end{pmatrix}$$

Να εκτελεστούν δύο επαναλήψεις για την προσέγγιση της λύσης του συστήματος  $Ax=b$ , με  $b=[8,1,-10]^T$  με βάση την επαναληπτική μέθοδο **Jacobi**.  
(β) Να υπολογίσετε μια προσέγγιση της νόρμας του επαναληπτικού πίνακα  $B_J$  μετά από δύο επαναλήψεις με τη βοήθεια των διαφορών  $\delta_j = \|x^{(j)} - x^{(j-1)}\|$ . Να υπολογίσετε μία a-posteriori εκτίμηση για το σφάλμα με βάση τις διαφορές  $\delta_j$  μετά από δύο επαναλήψεις.

**Θέμα 2.** (2 Βαθμοί) (α) Να ορίσετε τη παραγοντοποίηση Cholesky, για συμμετρικό και θετικά ορισμένο πίνακα  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .  
(β) Να δείξετε ότι ο πίνακας του θέματος 1(α), παραγοντοποιείται σε μορφή Cholesky, και να υπολογίσετε την μορφή αυτή.  
(γ) Να υπολογίσετε το πλήθος των πράξεων οι οποίες χρειάζονται για την μορφοποίηση του αλγορίθμου για τυχαίο συμμετρικό και θετικά ορισμένο πίνακα  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Πόσες θέσεις μνήμης χρειαζόμαστε στην εκτέλεση της παραγοντοποίησης Cholesky;

**Θέμα 3** (3 Βαθμοί)

(α) Για το σύστημα  $Ax=b$  με  $b=[4,5,4]^T$  και πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

να κατασκευάσετε την επαναληπτική μέθοδο χαλάρωσης που αντιστοιχεί στην μέθοδο Jacobi (**JOR**) ως στάσιμη επαναληπτική διαδικασία **Richardson** ( $x^{(k+1)} = x^{(k)} + a_k Q^{-1} r^{(k)}$ , όπου  $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ ,  $a_k = \alpha$ ). Να υπολογιστεί ο επαναληπτικός πίνακας της παραπάνω διαδικασίας και να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου χαλάρωσης  $\alpha$ , για τις οποίες η **JOR** συγκλίνει. Μπορείτε να επιταγχύνεται την επαναληπτική διαδικασία **Jacobi** με κατάλληλη επιλογή της παραμέτρου χαλάρωσης;

(β) Να μελετήσετε τη σύγκλιση της επαναληπτικής μεθόδου χαλάρωσης που αντιστοιχεί την μέθοδο Gauss-Seidel, (**SOR**) για το πρόβλημα του ερωτήματος (α).

**Θέμα 4.** (3 Βαθμοί) (α) Να περιγράψετε τη μέθοδο των κλίσεων ως γενική επαναληπτική διαδικασία τύπου **Richardson**, για το πρόβλημα  $Ax = [5,2,-5]^T$

~~6-2) 1~~  
~~2~~  
~~3~~

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

(β) Να εκτελέσετε δύο επαναλήψεις της μεθόδου.

(γ) Να υπολογίσετε το υπόλοιπο  $r^{(k+1)}$  (της  $(k+1)$ - επανάληψης) ως συνάρτηση του υπολοίπου  $r^{(k)}$  ( $k$ - επανάληψης).

(δ) Να ορίσετε την ενεργειακή νόρμα  $\|\cdot\|_A$  για τον πίνακα του ερωτήματος (α). Για αρχικό διάνυσμα  $x_0 = [0, 0, 0]^T$  να υπολογίσετε το πλήθος των επαναλήψεων ώστε το σφάλμα είναι μικρότερο από  $10^{-5}$ . Δίνεται η πραγματική λύση  $\chi = [1, 1, -1]^T$ .

Υπόδειξη:  $\|e^{(k+1)}\|_A \leq \frac{k_2(A) - 1}{k_2(A) + 1} \|e^{(k)}\|_A$ .

~~6-2) 2~~  
~~3~~

$(6-\lambda)^2 (2-\lambda)$  Διάρκεια εξέτασης: 2 ώρες και 30 λεπτά.