

①

ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ II

5/6/2007

Εσω X χώρος δε νότα.

Φραγμός $\Rightarrow X: \|x_n\| < M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$X^* = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ γραμμικό & ευνεκτός}\}$$

f ευνεκτός $\Rightarrow (x_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow f(x_n) \rightarrow 0) \Leftrightarrow \exists M > 0: |f(x)| \leq M \cdot \|x\| \quad \text{①}$

$$\text{Νότα στο } X^*: \|f\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \left\{ \frac{|f(x)|}{\|x\|} \right\} = \sup_{\|x\| \leq 1} \{|f(x)|\}$$

$(X^*, \|f\|) \rightarrow$ χώρος Banach !!

Υπόρχυ λέγεται ①:

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq M \in \mathbb{R}$$

$f \in X^*$

$G = \{x \in X: f(x) = 0\}$ ιδανούς υπόχωρος

$g: X \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμικό (και δια ευνεκτός)

$E = \{x \in X: g(x) = 0\}$, δια σένα ιδανούς, αλλά πουνοί στο X .

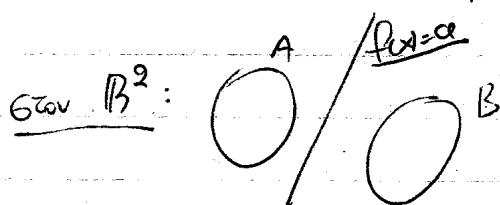
Για $f \in X^*, a \in \mathbb{R}: H = \{x \in X: f(x) = a\}$ ονομάζεται υπερεπίπεδο.

Θεώρημα Hahn-Banach ($1^{\text{η}}$ δειξικότητα πορεία)

Εσω 2 σύνοδα A, B την ^{έχει} και μόνιμη, η οποία, η οποία στο A ανοίγεται.

Ταυτό υπάρχει υπερεπίπεδο H ($\text{δια } \exists f \in X^* \& a \in \mathbb{R}$), οποιού

ωστε $f(x) \leq a \quad \forall x \in A, f(x) \geq a \quad \forall x \in B$.



1/6/2007

→ Εμποδιός, για $c > 0$ (ανεξάρτητος από $i \in I$ & $x \in E$) τις οικείες
 $\|T_i(x)\| \leq c\|x\|, \forall i \in I \text{ & } x \in E$ (δηλ. "Θεωρήστε ότι οι ορθογώνιοι
φραγμένοι). $\sup_{x \in E} \left\{ \frac{\|T_i(x)\|}{\|x\|} \right\} \leq c \Rightarrow \frac{\|T_i(x)\|}{\|x\|} \leq c \Leftrightarrow \|T_i(x)\| \leq c\|x\|$

nx // Αυτοδιδακτικός Τετραγωνός $T_n: E \rightarrow F, T_n \in \mathcal{L}(E, F)$

To $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = T(x)$ (γνωρίζουμε από το θεώρημα στο οποίο παρέχεται)

Απόδειξη

Για κάθε $n \in \mathbb{N}, X_n = \{x \in E : \forall i \in I : \|T_i(x)\| \leq n\}$

Τα X_n είναι σύνολα

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

Άπο τη Διάταξη Baire, επιπεριβαίνουμε ότι $\exists n_0$ το $\text{int } X_{n_0} \neq \emptyset$.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \subset E \quad E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \quad \exists n_0, (x) \quad x \in E, x \in X_{n_0} \Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

$$\text{Έχουμε } B(x_0, r) = x_0 + rB(0, 1) \quad \& \quad \forall x \in B(x_0, r) : \|T_i(x)\| \leq n_0$$

$$\boxed{x = x_0 + rz}, z \in B(0, 1)$$

$$\begin{aligned} &\Downarrow \\ &\|T_i(x)\| = \|T_i(x_0 + rz)\| \leq n_0 \quad (\forall i \in I, \forall z \in B(0, 1)) \leq \\ &\leq \|T_i(x_0)\| + r\|T_i(z)\| \leq n_0 \Rightarrow r\|T_i(z)\| - \|T_i(x_0)\| \leq \|T_i(x_0) + rT_i(z)\| \leq n_0 \Leftrightarrow \\ &r\|T_i(z)\| \leq \|T_i(x_0)\| + n_0 \leq 2n_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|T_i(z)\| \leq \frac{2n_0}{r} \quad \forall i \in I, \forall z \in \bar{B}(0, 1)$$

$$\|T_i\| = \sup_{\|z\|=1} \|T_i(z)\| \leq \frac{2n_0}{r}, \forall i \in I \Rightarrow \sup_{i \in I} \|T_i\| \leq \frac{2n_0}{r} < \infty$$

(4)

Lubnepachia: $T_i: E \rightarrow F$ γραμμικοί & οραγθέντες. $\forall x \in E$
 $\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < \infty$, τότε $\exists c > 0$ ιστορίας! ώστε i , ώστε
 $x), \text{ τότε } \|T_i(x)\| \leq c\|x\|, \forall i \in I \forall x \in E$

Egaphoxis

1) $T_n: E \rightarrow F$, γραμμικοί & οραγθέντες τελεστέντες ώστε $\forall x \in E$,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x) = T(x)$ (Η ειδικήση σημαίνει ότι αν x είναι τελεστής $T(x)$). Τότε,
 $\bullet T \in \mathcal{L}(E, F)$, ώστε $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$

Anóðesim: $\sup_n \|T_n(x)\| < \infty, \forall x \in E$

Apa, $\exists c > 0: \|T_n(x)\| \leq c\|x\|, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E$
 $\text{Για } n \rightarrow \infty, \|T(x)\| \leq c\|x\|$

• Η γραμμικότητα είναι προφανής: $T(x+y) = \lim_n T_n(x+y) =$
 $= \lim_n T_n(x) + \lim_n T_n(y) = T(x) + T(y)$

$$\|T_n(x)\| \leq \|T_n\| \cdot \|x\| \quad (\text{Πρωπ. Σύμβ. του } \|\cdot\|)$$

$$\frac{\liminf \|T_n(x)\|}{\|T(x)\|} \leq \frac{\liminf \|T_n\|}{\|x\|}$$

$$\Rightarrow \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq \frac{\liminf \|T_n\|}{\|x\|} \quad \forall x \in E$$

\sup

$$\boxed{\|T\| \leq \liminf \|T_n\|}$$

2) Εσών E xwpos Banach και $A \subseteq E$. Υποδιάκριση $\forall f \in E^*$, το
 $\sup_{x \in A} |f(x)| < \infty$. Τότε, το A είναι οραγθέντο.

Anóðesim: A οραγθέντο $\Leftrightarrow (\exists M > 0: \|x\| \leq M, \forall x \in A)$

$$\sup_{x \in A} |f(x)| < \infty$$

$$\frac{\|f\|}{M(f)} \quad (\text{Dηλ., το } \sup_{x \in A} |f(x)| \text{ αριθμείται } \|f\|)$$

(5)

Luvixua: Εσω $\mathcal{E} = X^*$, και $\mathcal{F} = \mathbb{B}$ (είναι και οι 2 χώρες Banach)

Απόδειξη: Τώρα, δείχνω την ομοιότητα γραφτών & φραγκένων σε δεξιάν

$T_x: X^* \rightarrow \mathbb{B}, x \in A$, τόσοι ωστε $T_x(f) = f(x), f \in X^*$

$$T_x(f_1 + f_2) = f_1(x) + f_2(x) = T_x(f_1) + T_x(f_2) \Rightarrow T_x \text{ γραφτός}$$

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{B}: T_x(\lambda f) = (\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda T_x(f) \Rightarrow$$

$$|T_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \Rightarrow (T_x) \text{ είναι φραγκένων}$$

→ Από, $\sup_{x \in A} |T_x(f)| = \sup_{x \in A} |f(x)| < \infty$, οπότε μανούσιούνται οι

προϋποθέσεις του Θεωρήματος Banach-Steinhaus, από $\exists C > 0$

$$\text{τόσοι ωστε } |T_x(f)| \leq C \|f\| \quad \forall f \in X^*, \forall x \in A$$

$$|f(x)| \leq C \|f\|, \forall f \in X^*, \forall x \in A$$

$$\sup_{f \in X^*} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \leq C \Leftrightarrow \|x\| \leq C \Leftrightarrow A \text{ φραγκένων!}$$

$$\frac{1}{\|x\|}$$

$$\Rightarrow (X, \|\cdot\|)$$

X_w είναι η αδενής τοπολογία

$$X^* \rightarrow X_w$$

A φραγκένων $\in X_w$, αν X^* φραγκένων

Είναι δικύο, η νόρμα $\|f\|$

ΔΕΝ είναι ανεξάρτητη του x !

$$\text{αφού, } \|f\| = \sup_{x \in X/\{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$$

$$\text{Από } \|x\| = \sup_{f \in X^*} \frac{|f(x)|}{\|f\|}$$

A αγυνεχιστός φραγκένων $\rightarrow A$ φραγκένων

3) Εσω X χώρας Banach, $A \subset X^*$. Υποδίκτυες έχει $\forall x \in X$, το

$\sup_{f \in A} |f(x)| < \infty$, τόσο το A είναι στοιχιός φραγκένων.

$$\frac{1}{M(x)}$$

(Η αντίδική είναι αναλογης της εργ. 2, αλλα με αλλαγής)

Σύνοδο διαστών
της A

Απόδειξη: Εσω $\mathcal{E} = X$, $\mathcal{F} = \mathbb{B}$. Εσω $f \in A$, $T_f: X \rightarrow \mathbb{B}$, $A = I$

$$T_f(x) = f(x) \quad \forall x \in X:$$

$$\cdot T_f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = T_f(x_1) + T_f(x_2) \quad \Rightarrow T_f(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{γραφτών} \\ \text{ομοιότητα} \\ \text{ειδεξών} \end{array} \right.$$

$$\cdot T_f(2x) = \dots = 2 T_f(x)$$

$$\text{και } |T_f(x)| = |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \Rightarrow \text{φραγκένων!}$$

$$\text{Από, εφόπορθος } \sup_{f \in A} |T_f(x)| = \sup_{f \in A} |f(x)|.$$

⑥

Apa, tuxes zt Banach-Steinhaus $\Rightarrow \exists c > 0$

$$|T_f(x)| \leq c \cdot \|x\|, \forall x \in X, \forall f \in A$$

$$|f(x)| \leq c \cdot \|x\|$$

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq c \quad \forall x \in X \setminus \{0\}$$

$$\text{Apa } \|f\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq c \quad \forall f \in A$$

18/6/2007 Πρόσαργη

Έσω X χώρος με νόμφα. Υποθέτουμε δύο νόμφες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$

ορισθέντες πάνω στον X . Αν $(X, \|\cdot\|_1)$, $(X, \|\cdot\|_2)$ αναλογικοί

Banach, και υπάρχει $m > 0$, τέτοιο ώστε $\|x\|_1 \leq m\|x\|_2$, τότε οι

δύο νόμφες είναι 160δύνατες.

Απόδειξη

Έσω $E = (X, \|\cdot\|_1)$, και $F = (X, \|\cdot\|_2)$

(Οι χώροι είναι τοπολογικά διαφορετικοί, παρότι
παντες βασίζονται στο ίδιο σύνολο)

Έσω $T: F \rightarrow E$, γραφτής και ευνοϊκός.

Άντο το Θεώρημα ανοικτής απαντώνται $\Rightarrow T^{-1}$ είναι γραφτής & ευνοϊκός,
και $\exists c > 0$ τέτοιο ώστε $\|T^{-1}(x)\|_1 \leq c\|x\|_2$ (όχι ευνοϊκός), και
για $M = \frac{1}{c} \Rightarrow M\|x\|_2 \leq \|x\|_1$, από οι νόμφες είναι 160δύνατες.

ΠΡΟΦΟΧΗ

Οι νόμφες που επιλέγω πρέπει να που υποθέσουν
ταν χώρο που χώρο Banach, αλλιώς το

Θεώρημα ΔΕΝ 160δύνει

η $X = C[a, b] = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \text{ευεξικός}\}$

Έσω $\|f\|_1 = \max \{f(x) : x \in [a, b]\}$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$$

Ταραχηρότητες ήτοι $\|f\|_2 \leq \int_a^b |f(x)| dx = \max |f(x)| \int_a^b dx = \|f\|_1(b-a)$

ΔΕΝ είναι 160δύνατες, γιατί α δεν γνωρίζουμε η ο ποιος χώρος

καθίσταται είναι Banach (Παραπάνω), εποτε θα είσαι αριθμητικός τίτλος

Οσιρμα Κλασσαι Πραγματειας

Εστω X, Y χώροι της νόρμας. Το υπερστατό γινόμενο $X \times Y = \{(x, y), x \in X, y \in Y\}$. Το $X \times Y$ είναι γραμμικός χώρος, της νόρμας $\|(x, y)\|_2 = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, και $\|(x+y)\|_2 = \sqrt{\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2}$.

Εστω τελεστής $T: X \rightarrow Y$. Τότε,

$\mathcal{D}(T)$

οπισθετέ το γράφημα της απεικόνισης $T: \text{Gr } T = \{(x, T(x)), x \in \mathcal{D}(T)\} \subset X \times Y$

Οι δύο οι ο T ιχνα μπορεί να γράψουνται, ανν το $\text{Gr } T$ είναι μπορεί να γράψουνται του $X \times Y$

Αν T ευνέκτης $\Rightarrow \text{Gr } T$ μπορεί

Απόδαση

Τια να διήνω έτσι το γράφημα είναι μπορεί, αποτελούμενο από διάφορα σημεία.

$[(x_n, T(x_n)) \rightarrow (x, y)] \Rightarrow (x, y) \in \text{Gr } T, x \in \mathcal{D}(T)$

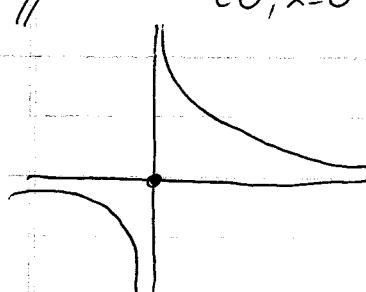
Ωδηδήσιμη: $\left(\begin{array}{c} x_n \rightarrow x \\ T(x_n) \rightarrow y \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c} x \in \mathcal{D}(T) \\ y = T(x) \end{array} \right)$

Πινακίδων έτσι $x_n \rightarrow x$. Έχειται οικεία, έτσι $T(x) = y$, ήτοι ενισχυτικής (enforcing), αφού η ευνέκτης οπισθετική μονο οι εμφατίζονται τις διαδικασίες της.

~~η~~ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ Αυτή η ευνέκτης είναι μπορεί γράφημα, παρότο

που ΔΕΝ είναι ευνέκτης για $x=0$.

(Αυτόνομη για αποδασης) $\left(\begin{array}{c} \text{η} \\ \text{το αποδασης} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} (x_n, T(x_n)) \rightarrow (x, y) \\ (x_n, \frac{1}{x_n}) \rightarrow (x, y) \end{array} \right)$



Όταν τιπά... το Οσιρμα: Αν X, Y χώροι Banach, και $T: X \rightarrow Y$ γραμμικός τελεστής. Τότε ο T είναι ευνέκτης \Leftrightarrow ο T ιχνα μπορεί γράφημα.

(8)

Απόδαση (αναερόφω)

Έτσος διό ότι ο T είχε μηδεσέδη γράμμα. Ουραρτήσ των χωρών X εργοδιαστήνο να διεύθυνε πόρη $\|x\|_1 = \|x\| + \|T(x)\|$ (σίγουρα ως αθροιστική πόρη).

Εποδίστιος ο T είχε μηδεσέδη γράμμα, ο $(X, \|\cdot\|_1)$ είναι επίσης χώρας.

Banach: $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ ($\forall \varepsilon > 0 \exists n: \forall m > n: \|x_n - x_m\| < \varepsilon$: Αυλονδία Cauchy)

$$\Leftrightarrow \|x_n - x_m\| + \|T(x_n) - T(x_m)\| < \varepsilon \Rightarrow \begin{cases} \|x_n - x_m\| < \varepsilon \\ \|T(x_n) - T(x_m)\| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \text{Αυλονδία Cauchy στο } Y$$

και εποδίστιος είναι χώρας Banach ($\text{στο } X, Y$) $\Rightarrow \begin{cases} x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x \\ T(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} y \end{cases}$ } γεγονότων

$\Rightarrow T(x) = y$ (GrT ιδιαίτερο!), και εποδίστιος το x υποβάθμισε στο

$\|x_n \rightarrow x\|$, ως προς την $\|\cdot\|_1$ (προφανώς, αφού $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x$ & $T(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} y$,
και $\|x\|_1 = \|x\|_X + \|T(x)\|_Y$)

\rightarrow Τέλος απόδασης στην εποδίστιο πόδιο της μηδεσέδη γράμμα.

Επίσης (ως πόρη) λεχύσεις δια $\exists m > 0: m\|x\|_1 \leq \|x\|$ Ε

$$\Leftrightarrow m(\|x\| + \|T(x)\|) \leq \|x\| \Leftrightarrow \|x\| + \|T(x)\| \leq \frac{1}{m}\|x\| \Leftrightarrow \|T(x)\| \leq \left(\frac{1}{m} - 1\right)\|x\| \Rightarrow$$

$\Rightarrow \|T(x)\|$ φραγμένος $\Rightarrow T$ γραφτικός & ευνεξίας!

$\left\{ \begin{matrix} \text{ΣΥΝΕΧΕΙΑ} \Leftrightarrow \text{ΛΕΙΤΟ} \\ \text{ΓΡΑΦΗΜΑ} \end{matrix} \right.$

$$X = C'[a, b] = \{x: [a, b] \rightarrow B, t \mapsto x(t), t \in [a, b]\}$$

$$Y = C[a, b]$$

και ίσως τοπεσής $T = \frac{d}{dt}$ (παραγωγή-γραφτικός τοπεσής), ($T: X \rightarrow Y$)

αλλά ∂X φραγμένος

$$T(x+y) = \frac{d(x+y)}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = T(x) + T(y)$$

$$X, \|x\| = \max\{x(t): t \in [a, b]\}$$

$$Y, \|y\| = \max\{y(t): t \in [a, b]\}$$

Για να είναι φραγμένος, αρκεί να λεχύσει $\|T(x)\| \leq m\|x\|$, $\forall x \in X$.

Έτσος $x(t) = t^n$, $n > 0$, και $[a, b] = [0, 1]$

$$\|x\| = 1$$

$$(Tx)(t) = \frac{dx}{dt} = n \cdot t^{n-1}, \quad \|Tx\| = n > 0$$

$$\|Tx\| \leq m \|x\| \Leftrightarrow n \leq m \quad \text{ΆΤΟΠΟ} \Rightarrow \text{ΔΕΝ είναι γραμμικός}$$

Όλα είναι γράμμια: $x_n \rightarrow x$

$\left. \begin{array}{c} \text{στούπερ} \\ \downarrow \\ T(x_n) \rightarrow y \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Αρχι} \\ \text{ΝΔΟ} \end{array} \Rightarrow y = Tx = \frac{dx}{dt}$

To οποιο λεξικό, \uparrow στούπερ

Λόγω της ορθότητας διαμόρφωσης των γυναρχήσεων.

Γνωρίζετε ότι ο T είναι απλεστός, πολύ! $\tilde{\Delta}$

25/6/2007 Εσώ Η χώρος Hilbert, καν (\vec{e}_i) ορθονομιών βρίσκεται.

Τούτο καθίσταται $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$, λεξική ταυτότητα του Parseval

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$$

Εσώ Σε αυτοδιά πραγματίζεται αριθμών.

Τούτο, καν $T(e_n) = \lambda_n e_n$.

$$T(x) = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} T(\lambda_n e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n T(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 e_n$$

$$\|Tx\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\lambda_n|^2 < \infty$$

Αν η λ_n γραμμένη αυτοδιά, τότε $\|Tx\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2}$ (αν T είναι λεξικός),

αφού $|\lambda_n|^2 |\lambda_n|^2 \leq M |\lambda_n|^2$, όταν M είναι γραμμένη λ_n ($|\lambda_n| \leq M$)

$$\|Tx\|^2 \leq M^2 \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$$

$$\|Tx\| \leq M \|x\|$$

Άσυμη: Αν Δ ΔΕΝ είναι γραμμικός, τότε Δ ΔΕΝ είναι γραμμικός και ο T που σημειώνεται!

(1)

Aσκεις Τοποδοξία

Έσω (X, \mathcal{T}) , και $X \rightarrow \mathcal{P}(X)$

Οα δείξε ότι είναι υποσύνολο του $\mathcal{P}(X)$, αποτελεί πια τοποδοξία πάνω στο X αν: i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

$$\text{i)} \quad \forall A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^n A_n \in \mathcal{T}$$

$$\text{ii)} \quad \forall (A_i)_{i \in I} \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$$

Τα επόμενα τα \mathcal{T} ουφάστηκαν ανοιχτά γύρω.

Είναι $A \subseteq X$ ανα ανοιχτό $\Leftrightarrow \forall x \in A \exists \mathcal{B}(x, r) \subseteq A$

Άρα, μια νόρμα επίσημη τοποδοξία!

Εώς υπόβαθρο
μια νόρμα

η/ν $\forall A \in \mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$, τότε \mathcal{T} ορίζεται τοποδοξία

$\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ αποτελεί ανοιχτή τοποδοξία

Έσω $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ Επιευνώντας το \mathcal{B} δίποτο \emptyset, X , και

πεπερασμένες τοπίσεις εποικίων του \mathcal{B} . Όποιες, πραγματεύονται επίσημα του

\mathcal{B} , έσω \mathcal{B}_1 . (ii) οποιοιδήποτε συνίστας εποικίων της \mathcal{B}_1 , οποιες το

νέο γύρω \mathcal{T} που προκύπτει, ανα μια τοποδοξία

η/ν $\mathcal{B} = \{\{1\}, [0, 5], [2, 6]\}$
 $X = \mathbb{R}$

$$[0, 5] \cap [2, 6]$$

"

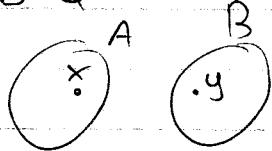
$$\text{Τότε } \mathcal{B}_1 = \{\emptyset, X, \{1\}, [0, 5], [2, 6], [2, 5]\}$$

$$\text{Άρα } \mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1\}, [0, 5], [2, 6], [2, 5], [1] \cup [2, 6], [0, 6]\}$$

$$[0, 5] \cup [2, 6]$$

→ Αντινόη, το σύγχρονο (X, \mathcal{T}) ουφάστηκε ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ
 $X \cong \mathbb{R}$.

- Ο (X, τ) ονομάζεται χώρος Hausdorff, αν $\forall x, y \in X$ ήταν $x \neq y$, υπάρχουν $A, B \subset \tau$ τέσσερις, ώστε $x \in A, y \in B$, και $A \cap B = \emptyset$



Τέσσερις χώροι είναι Hausdorff και πολλαπλάσια του οποιου διαφορετικές αναδιδικίες.

- Εάν X είναι μη κυρτό σύνολο, Y είναι τοπολογικός χώρος, και είναι $\varphi_i: X \rightarrow Y, i \in I$. Να δρεσται με "μετατόπιση τοπολογίας" στο X , ώστε διέσεις οι φ_i να είναι συνεχείς.

Εάν $B = \{\varphi_i^{-1}(A) : i \in I, A \subset Y\}$ ανοίχτος?

Περιεχομένων τόπος

$B_1 \Rightarrow \tau$ τυχαία είναι στοιχείων B ,

Η τ , λοιπόν, ονομάζεται ασθενής τοπολογία

Πάνω στο X , ως προς τις απαντήσεις φ_i .

\rightarrow Εάν $(X, \text{II.II})$. Τούτο ο διττός χώρος του X αίρεται $\circ X^* = \{f: X \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ γραμμικό & συνεχές}\}$

Εάν $\Phi_f: X \rightarrow \mathbb{R}, f \in X^*$, οπου $\Phi_f(x) = f(x)$

$\{\Phi_f\}_{f \in X^*}$: Υπάρχει να δρω την ΜΙΚΡΟΤΕΡΗ τοπολογία πάνω στο X , ώστε οι απαντήσεις αυτής να είναι συνεχείς.

Συμνάω από το $B = \{\Phi_f^{-1}(A) : f \in X^*, A \subset \mathbb{R} \text{ ανοίχτο}\}$

Έχουμε $\Phi_f^{-1}(A) = \{x \in X : \Phi_f(x) \in A\} = \{x \in X : f(x) \in A\} = f^{-1}(A)$

Άρα $B = \{f^{-1}(A), f \in X^*, A \subset \mathbb{R} \text{ ανοίχτο}\}$

Περιεχομένων τόπος

$B_1 \Rightarrow \tau = \sigma(X, X^*)$

Η τοπολογία σταγόνων
της της τοπολογίας του διττού χώρου

$(X, \text{II.II})$ η συνήθης τοπολογία
 $(X, \sigma(X, X^*))$ ασθενής τοπολογία

12) $A = (a, b)$, $f \in X^*$

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : a < f(x) < b\}$$

i) $A = (a, \infty)$

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) > a\}$$

Πρόσωπη

Η ασθενής τοπολογία ήταν

στο X είναι Hausdorff

Απόδειξη

Έστω $a \neq b$ στοιχεία του X . Τότε, από Hahn-Banach

υπάρχει $f \in X^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τέσσερα ώστε

$$f(a) < \lambda < f(b)$$

$$\text{Από } A = \{x \in X : f(x) < \lambda\} = f^{-1}(-\infty, \lambda]$$

$$B = \{x \in X : f(x) > \lambda\} = f^{-1}(\lambda, \infty)$$

Από αυτήν την ασθενής τοπολογία είναι Hausdorff, γεγονός ΕΙΜΑΝΤΙΚΟΣ,
γιατί είναι εξασφαλίζεται μια MONADICITY ή η οποία;

(13)

Έστω $(X, \|\cdot\|)$. Αριθμής τοπολογία: $(X, \delta(x, x^*))$ και (X, τ_w)

2/6/2007

Έχουμε ενίσημα: $(X^*, \delta^*(x^*, x^{**}))$ και ενίσημα
 $(X^*, \delta(x, x^*))$

(Οριζόντια & αριθμής τοπολογία στον διάτυπο χώρο)

→ Βάση Περιοχών: $\{\mathcal{B}(x_0, \varepsilon), \varepsilon > 0\}$

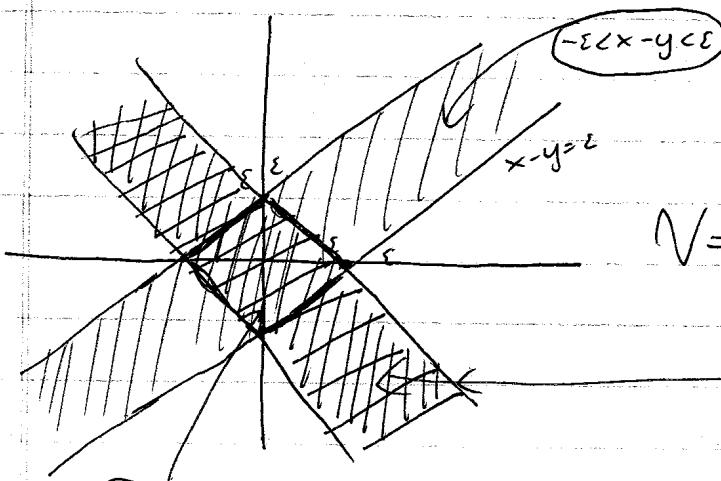
→ Μια Βάση Περιοχών του x_0 για την αριθμής τοπολογία, αποτελείται από τα διαδικτυαζόμενα: $N(x_0, f_1, \dots, f_k, \varepsilon) = \{x \in X : |f_i(x - x_0)| < \varepsilon, \forall i=1, \dots, k, f_i \in X^*\}$ και ονομάζονται Αριθμής Περιοχές του x_0 .

Απα μια Βάση περιοχών: $\{N(x_0, f_1, \dots, f_k, \varepsilon), \text{όπου } f_i \in X^*, \varepsilon > 0\}$

~~Έστω $X = \mathbb{R}^2$, $x_0 = 0$, $f = (1 \ -1)$~~

$$N = N(0, f, \varepsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| < \varepsilon\}$$

$$\Rightarrow -\varepsilon < x - y < \varepsilon$$



$$N = N(0, f_1, f_2, \varepsilon) = \{(x, y) : |f_i(x_i)| < \varepsilon, i=1, 2\}$$

$$|x + y| < \varepsilon$$

Αριθμής τοπολογίας
 (ο πόλβος) είναι
 μια αριθμής περιοχή!

Συγκριτικός

• $x_n \rightarrow x$ (εξιγνίεται ως προς την νόμη)

• $x_n \rightarrow x$ (αριθμής τοπολογία (ε.θ. Brezis))

$x_n \xrightarrow{w} x$ (εναλλαγματική, με ως μέση)

Πρόβλημα

$$\text{Av } x_n \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \forall f \in X^* \quad f(x_n) \rightarrow f(x_0)$$

Anóðesim "⇒" $\text{Av } x_n \rightarrow x_0, \forall f \in X^* : f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

Apa $\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \quad x_n \in V(x_0, \epsilon, \delta)$

Όπως $\forall \epsilon > 0$ ανορίζουμε: $V(x_0, \epsilon, \delta) = \{x \in X : |f(x - x_0)| < \epsilon\}$

Apa $\forall n \geq n_0 \quad |f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon$ (Δύο χρήσεις για το ϵ)

$$|f(x_n - x_0)|$$

Apa έχουμε να δεξιάτε.

"⇐" $\exists \epsilon > 0 \quad V(x_0, \epsilon, \delta)$ που ωχαια ασθενώς περιοχής του x_0

$$f_1(x_n) \rightarrow f_1(x_0) \Leftrightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \quad |f_1(x_n) - f_1(x_0)| < \epsilon$$

$$f_2(x_n) \rightarrow f_2(x_0) \Leftrightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_2 \quad |f_2(x_n) - f_2(x_0)| < \epsilon$$

⋮

$$f_n(x_n) \rightarrow f_n(x_0) \Leftrightarrow \exists n_n \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_n \quad |f_n(x_n) - f_n(x_0)| < \epsilon$$

Οικείως $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_n\}$

Apa, $\forall n \geq n_0 : |f_i(x_n - x_0)| < \epsilon \quad \forall i=1, \dots, k$

Apa, $\forall n \geq n_0 : x_n \in V(x_0, \epsilon, \delta) = \{x \in X : |f_i(x_n - x_0)| < \epsilon \quad \forall i=1, \dots, k\}$
 $\Rightarrow x_n \rightarrow x_0$ □

Πρόβλημα Εάν $(x_n) \in X$. Τότε

i) Av $x_n \rightarrow x \Rightarrow x_n \rightarrow x$

ii) Av $\forall (x_n)$ συγκίνεια ασθενώς στο X , τότε $\forall (x_n)$ είναι σημείο (ως προς την. νότα).

iii) Av $\forall x_n \rightarrow x$, τότε $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$

iv) Av $x_n \rightarrow x$ στο X , και $f_n \rightarrow f$ στο X^* , τότε $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$

Η iv) είναι γενικών της
 γνωστών: $\begin{cases} a_n \rightarrow a \\ b_n \rightarrow b \end{cases} \Rightarrow a_n b_n \rightarrow ab$

Anoiki F_n

1) Τι α ωνται $f: |f(x_n) - f(x_0)| = |f(x_n - x_0)| \leq \|f\| \cdot \|x_n - x_0\|$

~~Χρήση~~

2) $|f(x_n)| \leq \|f\| \cdot \|x_n\|$

3) $|f(x_n)| \leq \|f\| \cdot \liminf \|x_n\| \Rightarrow \frac{|f(x_n)|}{\|f\|} \leq \liminf \|x_n\| \Rightarrow$
 $\Rightarrow \|x\| = \sup_{f \in X^* \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \leq \liminf \|x_n\|$

$$\|x\| = \sup_{f \in X^* \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|f\|} = \max_{f \in X^* \setminus \{0\}} \frac{|f(x)|}{\|f\|}$$

Προεταγμένη

4) $|f_n(x_n) - f(x)| = |f_n(x_n) - f(x) + f(x) - f_n(x_n)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| +$
 $+ |f(x_n) - f(x)| \leq \|f_n - f\|(x_n) + |f(x_n) - f(x)| \leq \|f_n - f\| \cdot \|x_n\| + |f(x_n) - f(x)|$
 ≤ 0

↓ ↓

Ουρητικό Πρεσζ

$X = H$

$f \in H^* = H, f = u \in H$

$$l^2 = \{f(a_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}$$

Λαντό το χωρο πριν ταυ, για $x = (a_n)$,

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2}$$

και σεωρεπής γινόταν, για $y = b_n\}$:

$$x \cdot y = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n b_n)$$

Έτσι $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$

Ίσχει $\|e_n\| = 1$

$n=0, \dots, m$

$$e_m = (0, \dots, 0, 0, 0, 1, 0, \dots) \quad (m \neq n)$$

$$e_n - e_m = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots)$$

$\|e_n - e_m\| = 2$ Μαρτυρούμε ότι η ανοδοδια είναι (αριστερα), διότι πρέπει να ευχαίρεται, ας αναλύσουμε ΔΕΝ είναι Cauchy.

Έτσι ωρα $(a_n) \in l^2$. Τότε $((a_n), (e_n)) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i = a_n (= 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \dots + 1 \cdot a_n + \dots)$
 \downarrow (Ανάδυση I)

Άρα, η ανοδοδια e_n ευχαίρεται ασθενώς στο 0 . ($e_n \rightarrow 0$)

$$(X, \|\cdot\|) \rightarrow T$$

$$(X, \delta(x, x^*)) \rightarrow T_w$$

Μποραύει, λεχεῖ ουτό

$$T_w \subset T$$

Όταν X είναι ανάψηδια γέμιση, τότε ο συνιστώντας είναι αναγόμως!

Ένα σύνορο A είναι ασθενής υπό το, αν A^c είναι ασθενής αναπόδια, δηλ. $A^c \subset T_w$

→ Ενημέρωση για H το σύνορο των ασθενής συνόρων, τότε λεχεῖ ενημέρωση για $T_w \subset H$

Ωτιρμήση

16/7/07 | Εάν X, Y χωροί Banach, $T: X \rightarrow Y$ γραφικός ρεαλισμός
τότε $[T: X \rightarrow Y]$ ενεχτός $\Leftrightarrow [T: X_w \rightarrow Y_w]$

Ανιδεξίτης "⇒" Αν V ασθενής περιοχή των 0 επάνω Y , με ανιδεξόπολη αυστού $T^{-1}(V)$ είναι ασθενής. μ.τ.
 $(X, \delta(X, X^*)) \rightarrow (Y, \delta(Y, Y^*))$

$$\begin{aligned} T^{-1}(V) &= \{x \in X : T(x) \in V\} = \{x \in X : |f_i(T(x))| < \varepsilon, i=1,2,\dots,n\} \\ &= \{x \in X : |(f_i \circ T)(x)| < \varepsilon, i=1,2,\dots,n\} \end{aligned}$$

"⇐" Εάν T ασθενής ενεχτός $\Rightarrow \text{Gr } T$ ασθενής υπό το πρώτο
(Η ασθενής τοπολογία του $X \times Y$ είναι $X_w \times Y_w$)

Άλλα, επειδή ο T είναι γραφικός, το $\text{Gr } T$ είναι υπό το πρώτο!

$\text{Gr } T$ ασθενής υπό το πρώτο $\Rightarrow \text{Gr } T$ ασθενής υπό $X \times Y$

Άποτελεσμα: η θιρμήση γραφικών (Y : X Banach) \Rightarrow T ενεχτός
(με πρώτη τη θιρμήση)

- i) $T: X \rightarrow Y$ ευνεκτής (όχι αναγνωριστική γραμμής)
- ii) $T: X_w \rightarrow Y$ (αρδεντής-ιεχυρά ευνεκτής)
- iii) $T: X \rightarrow Y_w$ (ιεχυρά-αρδεντής ευνεκτής)
- iv) $T: X_w \rightarrow Y_w$ (αρδεντής ευνεκτής)

Μαζί τε τα αυτά τα
περιπτώσεων, για να δείξει
Ποια ευνεκτής είναι τα αριστερά.

~~η/ν~~ (ii) \Rightarrow (i) $A \subset Y \Rightarrow T^{-1}(A)$ ανοικτό \checkmark (ιεχυρές προβλήματα)

(i) ~~η/ν~~ (ii) (αρδεντής το...)

Ουπίκου είναι αρδεντής
ανοικτό σύνολο, είναι και ανοικτό



Έστω X και $\circ X^*$ (διτύπος του).

\rightarrow Ενημερωθείτε ότι $\circ X^*$ είναι πάντα ένας χώρος Banach

$(X^*, \|\cdot\|)$, δηλαδή $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$

$(X^*, \delta(X, X^*))$

Ουπίκου την κατασκεψή της αρδεντής τοπολογίας $\delta(X^*, \delta(X^*, X^{**}))$, και
Ουπίκου τη σημερινή εμπειρία, πως θα γράψει και υποτετραγωγία (ton avenir est déjà)

Έστω $\{ \} \in X^{**}$. Τότε $\delta(X^*, X^{**}) = \{ \}^{-1}(A) : \{ \} \in X^* \text{ (δηλ.)}$
 $\{ \} : X^* \rightarrow B$

B

D_1 : πεπερασμένος τοπίο σειράς της B

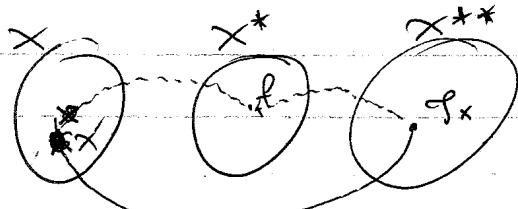
$\hookrightarrow \delta(X^*, X^{**})$: πεπερασμένος συνόρες της D_1

B₁

\rightarrow Οι δινοί ορίζονται από την ανοδαδική χώρου Banach (προσδικώνται *).

\rightarrow Υπάρχει άλλως μια ταθμητική περιεργή εξίσω, μη οντα σειράς από την
επίσης αποκλεισμό: $T: X \rightarrow X^{**}$ μανούνται εφεγγύωση, τίτοια ωστε

$(\forall x \in X : T(x) = T_x \in X^{**}$, δηλαδή $T_x(f) = f(x)$, $\forall f \in X^*$)



→ Παραγμορθήσεις στην T είναι γραφικές ($T_{x+y} = T_x + T_y$), αλλά
για ένα ωχαίο f και τον x^* : $T_{x+y}(f) = f(x+y) = f(x) + f(y) =$
 $= (T_x + T_y)(f)$. Οταν $T_{\alpha x} = T_{\alpha x}(f) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha$
 $= \alpha \cdot T_x(f)$.

(Η ανόδηση απεικονίζεται με την αναδιάλυση της $f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x)$)

χώρος
ευρεσης
εων

χώρος
Πραγματικών
Αριθμών

• Ότια απεικόνιση $T: X \rightarrow Y$ ονομάζεται
ισομερία, αν $\|T(x)\| = \|x\|$

ευρεξίας απεικόνιση

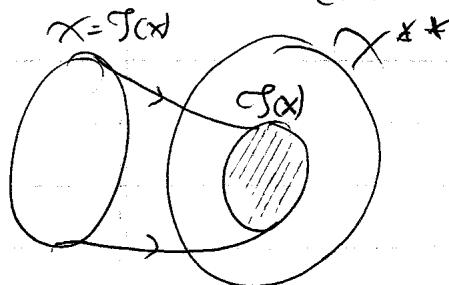
$T: X \rightarrow X^{**}$: Τια να αποδειχθεί ότι T είναι ισομερία, αν
 $\|T_x\| = \|x\|$.
~~Θεωρήστε $x \in X$~~ $\|T_x\| = \sup_{\|f\|=1} \{ |T_x(f)| \} = \sup_{\|f\|=1} \{ |f(x)| \} = \|x\|$

Γραφικός πίνακας + Ισομερία \Rightarrow Γεωμετρικές ισομερίες

η $T: C \rightarrow B^2$, $T: (x+iy) \mapsto (x, y) \in B^2$

$$\|T(x+iy)\| = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x, y)\| \quad (\text{Είσοδος})$$

→ Ισχεύει στη $T(x)$ υποχώρος του X^{**}
 $X \rightarrow T(X)$



$\rightarrow (X, X^*, X^{**})$
 $\| \cdot \|$

$\sigma(X^*, X^{**})$ αρθρώνει τοπολογία σ , την οποία ορίζεται δικτυοργώντας
την $\bar{\mathcal{B}} = \{ T_x^{-1}(A), x \in X, A \subset B \text{ ανοικτός} \}$

$\hookrightarrow \bar{\mathcal{B}}$, πεπερασμένη $\xrightarrow{\text{ονομασία}} \sigma(X^*, X)$ $\xrightarrow{\text{πάνω στο } X^*}$ αρθρώνει * τοπολογία

$$\text{Η τοπολογία } \left[\delta(x^*, x) \subset \delta(x^*, x^{**}) \subset \mathcal{T}_{\text{��άρα}} \right]$$

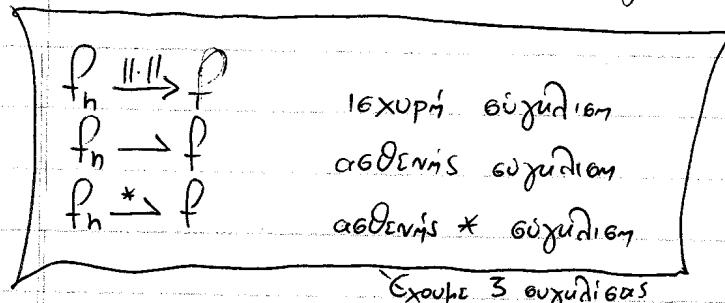
Βάση Τεπιοχών του $f_0 \in X^*$

$$V = V(f_0, x_1, \dots, x_n, \varepsilon) =$$

$$= \{f \in X^* : \|f - f_0\|_{X^*} < \varepsilon, \forall i = 1, \dots, n\}$$

(Παραγράφεται στην αφορμή της των παρόντων ορισμών)

(στο συννέχιο), καθώς μας μας την ενδιδάχει $\rho_{\mathcal{E}X}$)



Τύπος αν

Η αναδυόμενη $(f_n) \in X^*$ $f_n \xrightarrow{*} f$ ανν. $f_n \xrightarrow{\rho_{\mathcal{E}X}} f(x) \quad \forall x \in X$.

$(f_n \rightarrow f)$ ανν. $F(f_n) \rightarrow F(f) \quad \forall F \in \mathcal{F}^{**}$

Τύπος αν

Η ασθενής * τοπολογία ανα Hausdorff

Αντίδοτο $(\exists \text{εώς } f_1, f_2 \in X^* \text{ ώστε } f_1 \neq f_2 \text{. Τότε } \exists x \in X : f_1(x) \neq f_2(x))$

(Διαφορετικές ευαρστίες διαφέρουν ταλάντισσον σ' είνα σημείο). (Παραγράφεται σε αυτό γίνεται χωρίς υπόθεση των Διαρθρώσεων Hahn-Banach). Εστω $f_1(x) < f_2(x)$. $\exists \lambda \in \mathbb{R} : f_1(x) < \lambda < f_2(x)$.

$$N_1 = \{f \in X^* : f(x) < \lambda\} \quad N_1 = \mathcal{T}_X^{-1} ((-\infty, \lambda]) = \{f \in X^* : T_X(f) = f(x) \in (-\infty, \lambda]\}$$

$$N_2 = \{f \in X^* : f(x) > \lambda\} \quad N_2 = \mathcal{T}_X^{-1} ((\lambda, +\infty)) \text{ ανοιχτή * περιοχή του } f_2$$

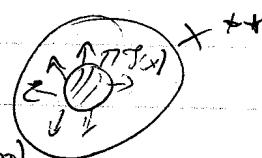
Συνέπεια: Αν η κανονική ενεργίων ανα "επί", τότε οι τοπολογίες:

$$\delta(x^*, x^{**}) \subset \delta(x^*, x)$$

ταυτότητα, αφού

αναδυόμενός

(reflexive)



16/7/2007

$X \quad X^* \quad X^{**}$

$$\cdot \delta(X^*, X^{**}) \text{ ασθενής}$$

$$\cdot \delta(X^*, T(X)) = \delta(X^*, X) \text{ ασθενής * τοπολογία}$$

Θεώρημα (Alaoglu - Banach - Dvrbakhi)

Η ποντιακή μάτια $\bar{B}_{X^*}(0,1)$ είναι ευπλαγχής στην ασθενή * τοπολογία $\delta(X^*, X)$.

Avaldastisoi Xípos

Εστω X χώρος Banach. Ο X διέχει αναδαστικός, αν $16x08$.
οτε $T(X) = X^{**}$

Θεώρημα

Εστω X χώρος Banach. Οι

παραπάνω προτάσεις είναι 16οδόνατες: να οικείεται στην "επί" της

i) X αναδαστικός

ii) Η μετεπί ποντιακή μάτια $\bar{B}_{X^*}(0,1)$

είναι ασθενής ευπλαγχής.

$T(X)$

$$T_x(f) = f(x) \quad \forall f \in X^*$$

16οτεροινοί 16οτεροινοί

• Η αναδαστικότητα, δομόν εξε

κανονικής ενεργίανων. Δ

Απόδειξη

Η T είναι επι, και
είσι πρώτη Δ

" \Rightarrow " Αναδαστικός $\Leftrightarrow T(X) = X^{**} \Leftrightarrow T(\bar{B}_{X^*}(0,1)) = \bar{B}_{X^{**}}(0,1)$

Θεωρώ τώρα, τους X^*, X^{**} . Η $\bar{B}_{X^{**}}(0,1)$ είναι ασθενής ευπλαγχής.
(εδήπωνα με το προηγούμενο θεώρημα), επο. $\delta(X^{**}, X^*)$.

Αρχαί T 16οτεροινός 16οτεροινός \Rightarrow ευνεχής (απανωτή ευπλαγχής είναι ευπλαγχής)

Η αντιεποφθαλμή είναι της $\bar{B}_{X^{**}}(0,1)$: $T^{-1}(\bar{B}_{X^{**}}(0,1)) = \bar{B}_X(0,1)$.

Η $T^{-1}: (\bar{B}_{X^{**}}(0,1), \delta(X^{**}, X^*)) \rightarrow (\bar{B}_X(0,1), \delta(X, X^*))$. Απού
να δείξω ότι T^{-1} είναι ευνεχής (ws προς αυτές τις τοπολογίες),

δηλαδή ότι $(T^{-1})^{-1} = T$ απανωτή περιοχές του O ws προς
την $\delta(X, X^*)$ είναι περιοχές του O ws προς την $\delta(X^{**}, X^*)$

Έστω $V = \{x \in X : |f(x)| < \varepsilon\}$

αριθμητική περιοχή του O στον X .

Οπόια να διέψυ ότι $\mathcal{T}(V)$ αριθμητική

* περιοχή του O στον X^{**}

$$\text{Έχουμε ότι } V = f^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon). \text{ Από } \mathcal{T}(V) = \mathcal{T}(f^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon)) = \\ = (\mathcal{G} \circ f^{-1})(-\varepsilon, \varepsilon) = (f \circ \mathcal{G}^{-1})^{-1}(-\varepsilon, \varepsilon)$$

$$\text{Οπού, το } \mathcal{T}(V) = \{\tilde{x} \in X^{**} : |(f \circ \mathcal{G}^{-1})(\tilde{x})| < \varepsilon\}$$

$$(f \circ \mathcal{G}^{-1})(\tilde{x}) = f(\mathcal{G}^{-1}(\tilde{x})) = \mathcal{G}(\mathcal{G}^{-1}(\tilde{x}))(f) = \tilde{x}(f)$$

Αποδειξάμε ότι \mathcal{T}^{-1} είναι συνεχής, από
την $\mathcal{B}_X(0, 1)$ είναι ευπλαγής \mathcal{V}

$$\text{Άρως} \\ \mathcal{G}x(f) = f(x)$$

" \Leftarrow " Έχει $\mathcal{T}: X \rightarrow X^{**}$ 16οτερηνός

16οτερηνός \Rightarrow συνεχής.

$$\text{Έχει και ότι } \mathcal{T}(\overline{\mathcal{B}}_X(0, 1)) = \\ = \overline{\mathcal{B}}_{X^{**}}(0, 1) \text{ (να δεξεριά ως άσυμα)}$$

Από προηγούμενο θώρικα, έχει

$$\mathcal{T}: (X, \sigma(X, X^*)) \rightarrow (X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*, \text{Brezis})) \text{, είναι συνεχής (εδ. 55.)}$$

Και επίσης:

$$\mathcal{T}: (X, \sigma(X, X^*)) \rightarrow (X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$$

είναι επίσης συνεχής. Διότι φύση, τώρα, με το Λεβίτα των Goldstine, 16χές:

$$\mathcal{T}(\overline{\mathcal{B}}_X(0, 1)) = \overline{\mathcal{B}}_{X^{**}}(0, 1). \text{ Αλλά σπάδη } \mathcal{T} \text{ συνεχής (Γεωργίου)}$$

συνηγόρησε σύνοδα. Εε ευπλαγής), Θα ξουμε $\mathcal{T}(\overline{\mathcal{B}}_X(0, 1)) =$

$$= \mathcal{T}(\overline{\mathcal{B}}_X(0, 1)) = \overline{\mathcal{B}}_{X^{**}}(0, 1) \Leftrightarrow \mathcal{T}(X) = X^{**} \text{ από } X \text{ είναι αναδαστός.}$$

αριθμητική ευπλαγής, οπότε
αν το μέσων, εργασία
των ευρώ των

Παραγράφες

• Οι χώροι Hilbert είναι αναδαστοί.

• Οι χώροι L_p και ℓ^p , για $1 < p < \infty$, είναι αναδαστοί.

• $f \in X^*$: $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = \max_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$ αν X αναδαστός

$$\text{ενώ } \|x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |f(x)| = \max_{\|f\| \leq 1} |f(x)| \text{ 16χέα πάντα, δύο ως Q. Hahn-Banach!}$$

23/7/07 | Πρόβλημα των Αναδιανομών Ξεπαρ

Χαρογιά με Ενέργεια: $T: X \rightarrow X^{**}$

$$T(x) = x^* \text{ (αντ.)}$$

X αναδιανομός $\Leftrightarrow D_X$ είναι ασθενής ευπλάκτης, σαν $\sigma(X, X^*)$

1) Εάν X ^{αναδιανομός} \Leftrightarrow Banach, ταν η μετατόπιση υπόχρωσης του X , τον

- ο η είναι αναδιανομός

Ανόδειξη (Ο (Λ, ΙΙ. ΙΙ)) είναι χώρος Banach, και σημαίνεις σχετικάς

χώρο. Απα, προσομοιώνει ταν εγοδιάσθουτη τη σαν ασθενής τοποδοχία:
(Λ, $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{M}^*)$)

Αν $f: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ ($f \in \mathcal{M}^*$), τον $\|f\|_{\mathcal{M}^*} = \sup_{\substack{\|x\|_1 \\ x \in \mathcal{M}}} |f(x)|$

Εχουμε σαν τοποδοχία την του X , όπου $\sigma = \sigma(X, X^*)$, και εξασφαλίζεις σαν $\mathcal{Z}_f = \{A \cap \mathcal{M}, A \in \sigma\}$, που είναι η στραγόφερη από ταν $\sigma(X, X^*)$ τοποδοχία πάνω στο \mathcal{M} .

Προσανίστας, έχουμε: $\mathcal{Z}_f = \sigma(\mathcal{M}, \mathcal{M}^*)$ ταυτόσημα. Τόχων την ορισθών τας

$\forall \epsilon > 0 \exists V(x_0, f_1, \dots, f_n, \epsilon)$ ασθενής περιοχή του x_0 .

Τον $\mathcal{V}(x_0, f_1, \dots, f_n, \epsilon) = \{x \in X : |f_i(x - x_0)| < \epsilon \quad \forall i=1, 2, \dots, n, \epsilon > 0\}$

Την προσομοιώνει $V \subset \sigma$. Έχουμε $V \cap \mathcal{M} = \{x \in \mathcal{M} : |f_i(x - x_0)| < \epsilon, \forall i=1, 2, \dots, n\}$

(\hookrightarrow προσαστική, πρόσωπη για

τη προποστήση του f_i στο \mathcal{M})

Τια $x_0 \in \mathcal{M} : V(x_0, g_1, \dots, g_m, \epsilon) = \{x \in \mathcal{M} : |g_i(x - x_0)| < \epsilon, \forall i=1, 2, \dots, m\} \subset \sigma(\mathcal{M}, \mathcal{M}^*)$,

για $g_i \in \mathcal{M}^*$.

Τα g_i είναι γραμμικά & συνεχή αναπροσανατολισμένα: $g_i: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$. Απα, από τα

συντύπων Hahn-Banach επεκτείνονται σε όλο ταν χώρο, και ισχύει $f_i = g_i$

επίσης. Τον $\mathcal{V} = \{x \in X : |f_i(x - x_0)| < \epsilon, i=1, 2, \dots, n\} \cap \mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{V} \subset \sigma$

Τια $M \otimes X$, η προσαστική πράξη ορίζεται: $D_M = D_X \cap M$

ασθενής ευπλάκτης σαν τη τοποδοχία
ασθενής ευπλάκτης σαν $\sigma(\mathcal{M}, \mathcal{M}^*)$ τοποδοχία

To \mathcal{B} avai \mathcal{B}_{X^*} & μπρο.

Αφού, ποτέν, το \mathcal{B}_X είναι $\sigma(\mathcal{U}, \mathcal{M}^*)$ αινει συμμετρικός, τότε ο \mathcal{B} αινει αναδασμός.

2) To X αινει αναδασμός αν υπάρχει αν X^* αινει αναδασμόντας.

Απόδειξη \Rightarrow Αρκει να δειγματίσει \mathcal{B}_{X^*} αινει $\sigma(X^*, X^{**})$ συμμετρικός. Επαλλάξτε ο X αινει αναδασμός, τότε $X = X^{**}$ (ταυτότητα), άρα \mathcal{B}_{X^*} αινει συμμετρικός στην $\sigma(X^*, X)$ & δόγμα θ. Αλαγκαλα. Επαλλάξτε $X = X^{**}$ και $*\sigma$ συμμετρικός \Rightarrow αρδεινή συμμετρικότητα της \mathcal{B}_{X^*} .

\Leftarrow Εστω X^* αναδασμός, τότε το ωδό της απόστασης (1) ήσαν ίδια στην X^{**} αινει αναδασμός. Ο $T(X) \subset X^{**}$ αινει απειρότες υπόχωρος, άρα από την 12^η ιδιότητα, ο $T(X)$ αινει αναδασμός \Rightarrow ο X αινει αναδασμός (αφού ο $T(X)$ υπάρχει X αινει 16οτερην 16ότορφο).

3) Εστω X αναδασμός, υπάρχει $M \subset X$ απειρότες, μπροστινός και σημαντικός. Τότε το M αινει αρδεινής συμμετρικός.

Απόδειξη Εστάντι ο X αινει αναδασμός, και $\mathcal{B}_X(0,1)$ (=απειρότες ποντικιά πιάτα) αινει αρδεινής συμμετρικός. Σημείο το γύρο το M αινει σημαντικός, η $\mathcal{B}_X(0,1)$ διαλέγεται από την M $\mathcal{B}_X(0,1) \subset M$. Μηδαδί το M σχεδιείται τόσα ώστε να ποικιλλήσει την ποντικιά της ποντικιών. Η $\mathcal{B}_X(0,1)$ διαλέγεται από την M $\mathcal{B}_X(0,1) \subset M$ αινει αρδεινής συμμετρικός (αφού $\mathcal{B}_X(0,1)$ αινει αρδεινής συμμετρικός). Το M είναι απειρότες & μπροστινός $\Rightarrow M$ αινει απειρότες. Άπαντα το M αινει αρδεινής συμμετρικός.

Άσυμμο

Εστω X, Y χώροι Banach, που αινει 16οτερην 16ότορφο. Τότε, σύμφωνα με την X αινει αναδασμός αν υπάρχει αναδασμός.

Παραχωριστικοί χώροι Banach

Εστω X παραχωριστικός χώρος. Ο X ονομάζεται απόθηκης, αν έχει άνα απόθηκης και πυκνό ($\bar{A} = X$) υποεύρυθμο A . ($\text{η} X = \mathbb{R}, A = \mathbb{Q}$)

Πρόσωρη

Έσω X διαχωριστός χώρος Banach. Τότε, αν ο X^* είναι διαχωριστός, τότε και ο X είναι διαχωριστός. (Ζα αντερόριστο ΔΕΝ γένος)

Απόδειξη (Ο X είναι διαχωριστός \Rightarrow Είναι αυτοδιά (x_n) $\in X$, τούτο με $\{x_n\} = X$ (μουνι).

Άρα, ανάλογα, ο X^* είναι διαχωριστός $\Rightarrow \exists (f_n) \in X^* : (f_n) = X^*$

Έχουμε: $\|f_n\| = \sup_{\|x\|=1} |f_n(x)| = \sup_{\|x\|=1} |f_n(x)|$ Οριζόντια $\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$

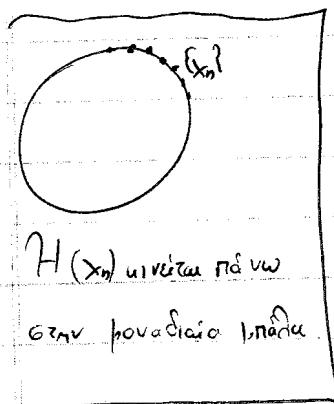
Άριθμος των οριζόντων των \sup , $\forall n \in N: \exists \|x_n\| = 1$,
 $|f_n(x_n)| \geq \frac{\|f_n\|}{2}$

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \\ &= \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \end{aligned}$$

Έσω το σύνολο A ορίζεται ως γραμμής ευθυγάτων γεωγειών της αυτοδιάς (x_n), με την οποίας συντονίσεται.

Όπλαδι: $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \nsubseteq p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$

όπου $p_i \in \mathbb{Q}$



είναι διαχωριστός $\forall i, \forall p_i x_i, p_i \in \mathbb{Q}$
 $\forall j, \forall p_j x_j, p_j \in \mathbb{Q}$
 $\forall i, \forall p_i x_i$

και ενδιάμεση: $A_1 = \{p_i x_i, p_i \in \mathbb{Q}\}$

$A_2 = \{p_1 x_1 + p_2 x_2, p_1, p_2 \in \mathbb{Q}\}$

$A_n = \{p_1 x_1 + \dots + p_n x_n, p_i \in \mathbb{Q}\}$

Τότε, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Τυπικά, ου αριθμητήμενοι αριθμητικού πλήθους γεωγειών είναι αριθμητικό σύνολο. $\Rightarrow A$ αριθμητικό

Οι διέσωστοι $\bar{A} = X$: Έσω ότε $\bar{A} \neq X$. Άριθμητη Hahn-Banach,

Οι υπάρχουν $f \neq 0: f(x) = 0 \quad \forall x \in A$.

Έπειδη $(\bar{f}_n) = X^*, \exists f_n \rightarrow f$.

Τότε, $\|f - f_{n_k}\| \geq \|(f - f_{n_k})(x_{n_k})\| = \dots$

Βασική Λύση της Hahn-Banach:

Έσω $M \subset X$, Μ υποστοιχία $\forall x \in M \exists f \neq 0: f(x) = 0$

$$\Rightarrow |f_{n_k}(x_n)| \geq \frac{\|f_{n_k}\|}{2}$$

$f_{n_k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, οπως, από υπόθεση $f_{n_k} \rightarrow f \Rightarrow f = 0$ ΑΤΟΡΟ
αφού $H-B : f \geq 0$.

~~πχ $L^1(a, b)$ διαχωριστος~~

$(L^1(a, b))^* = L^\infty(a, b)$ ΔΕΝ είναι διαχωριστος

24/7/2007 Εάν X χώρος Banach. Ο X ονομάζεται διαχωριστος, αν $\exists (x_n) \subset X : \{x_n\} = X$.

• Ημερομηνια: Αν X^* διαχωριστος $\Rightarrow X$ διαχωριστος.

Σειρήνα

Εάν X διαχωριστος χώρος Banach.

Τότε $\forall x^* \in X^*$ είναι περικονισμένη ως προς την αστενή * τοπολογία $\sigma(X^*, X)$

Αντιστροφά, αν $\forall x^* \in X^*$ είναι περικο-

πονισμένη ως προς την $\sigma(X^*, X)$ τοπο-

λογία, τότε ο X είναι διαχωριστος.

Άσυμμη

Εάν X αναδαστυνός και διαχωριστος $\Leftrightarrow X^*$ αναδαστυνός και διαχωριστος

" \Leftarrow " Προφανώς από την πρόταση

" \Rightarrow " X αναδαστυνός & διαχωριστος \Rightarrow X^* αναδαστυνός

$$X \subseteq X^*$$

$$J(X) = X^{**}$$

X^{**} διαχ. $\Rightarrow X^*$ διαχ.

Απόδειξη: " \Rightarrow "

Εάν $f, g \in X^*$, τότε ορίζουμε

$$\text{μια} \quad d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |(f-g)(x_n)|$$

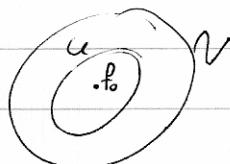
όπου (x_n) πινακή αυτοδυναμίας του χώρου X . Είναι αύριο να δούμε ότι $\forall n$ $d(f, g) = d(g, f)$

$$\text{ii)} \quad d(f, g) = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |(f-g)(x_n)| = 0 \Leftrightarrow f = g \quad \forall n \quad (\text{μαζί δρος})$$

$$\frac{1}{2^n} |(f-g)(x_n)| \leq \frac{1}{2^n} \|f-g\| \cdot \|x_n\| \leq \frac{1}{2^n} \cdot 2 \leq \frac{1}{2^{n-1}} < \infty \quad \text{από την} \quad d \quad \text{την μετά} \quad \text{οριστική!}$$

Εάν V αστενής & τοπολογία και $\mathcal{U} \left(\text{με προς} \right) \text{περιοχής}$

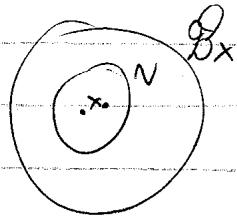
$$U \subset V$$



$$V \subset U$$



$$\text{Εφών } V = V(f_0, x_1, \dots, x_k, \varepsilon) = \{f \in \mathcal{D}_{X^k} : |(f-f_0)(x_i)| < \varepsilon, i=1, 2, \dots, k\}$$



• Οιδησε: $D_\delta(f_0, r) \subset V$. Αρα, πρέπει να προσδιορίσουμε μετάδομα το r .

$$V = \{f \in \mathcal{D}_{X^k} : |(f-f_0)(y_i)| < \varepsilon, i=1, 2, \dots, k\}, \text{ με } \|y_i\| \leq 1$$

Για κάθε y_i , πρέπει να υπάρχει x_{n_i} : $\|y_i - x_{n_i}\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall i=1, \dots, k$

Ενδιδούμε $r > 0$: $2^{n_i} r < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall i=1, \dots, k$, το οποίο σημαίνει ότι
γιατρέστερο, αρκεί $f \in D_\delta(f_0, r) \subset V$

$$d(f, f_0) < r, \quad \frac{1}{2^{n_i}} |(f-f_0)(y_i)| < r \quad \forall i=1, 2, \dots, k$$

$$\begin{aligned} \text{Παρατητεί: } & |(f-f_0)(y_i)| \leq |(f-f_0)(y_i-x_{n_i})| + |(f-f_0)(x_{n_i})| \leq 2 \frac{\varepsilon}{4} + \\ & + r \cdot 2^{n_i} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Εφών \cup περιοχής των f_0 ως προς την ℓ -εργαλιά.

Οι δεξιοίς οικείοι υπάρχουν ασθενής * περιοχής V των f_0 γέζοια. Ήτονται
 $V \subset \ell$.

- $V = \{f \in \mathcal{D}_{X^k} : |(f-f_0)(y_i)| < \varepsilon \quad \forall i=1, 2, \dots, k\}$
- $\ell = \{f \in \mathcal{D}_{X^k} : d(f, f_0) < r\}$

$$\text{Τώρα, την ερώτηση: } \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} |(f-f_0)(x_i)| + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |(f-f_0)(x_i)|$$

$$\text{Εφών } f \in V. \text{ Τότε } \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} |(f-f_0)(x_i)| < \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} \varepsilon = \sum_{n=1}^k \varepsilon = \varepsilon$$

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |(f-f_0)(x_i)| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$\varepsilon < \frac{r}{2} \text{ και διαδικυώμενο: } \frac{1}{2^{k-1}} < \frac{r}{2}$$

" \Leftarrow " B_{X^*} είναι διεργατικός με ως προς $\delta(X^*, X)$

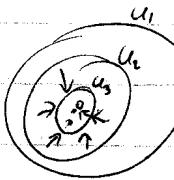
Οα διδύσκεις ότι ο χώρος X είναι διαχωριστός.

Έστω $\{U_n = \{f \in B_{X^*} : d(0, f) < \frac{1}{n}\}\}$, όπου d περικλινή.

Ως προς την ιεραρχία, οι U_n είναι περιοχές των μηδενός.

Αποδείξατε προηγουμένως ότι $\exists V_n$ περιοχή των μηδενός ως προς την $\delta(X^*, X)$: $V_n \subset U_n$.

$V_n = \{f \in B_{X^*} : |f(x)| < \varepsilon_n \quad \forall x \in \Phi_n\}$, όπου Φ_n πεπερασμένο σύνοδο των X .

Ουπάρνεται ότι: $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$  $\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{0\} \quad (V_n \subset U_n)$

Ουπάρνεται ότι: $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi_n$, το οποίο είναι αριθμητό (ως αριθμός ένων αριθμητικού πλήθους συναρτήσεων), και πρωτό: $D = X \setminus \{0\}$, αρού:

Έστω $[D]$ η γραμμή διέμ. του D , της οποίας ευρεσεστές (ώστε να είναι αριθμητό).

Έστω $f(x) = 0 \quad \forall x \in D$
 $\Rightarrow f \in V_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$
 $\Rightarrow f \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \Rightarrow f = 0 \quad \square$

Standard Diadicacia για ανάδειξη

Μυρίζεται:

\Rightarrow Έστω $f \in X^* \quad \forall x \in A$. Αν αριθμητό $f = 0$, τότε $\bar{A} = X$, όπου A υπόχωρος.
 Ωδικά, αν δεν είναι, από H-B, δια περιοδούς
 να βραβεύεται $f \neq 0$: $f(x) = 0$

Luvitentes

i) Έστω X διαχωριστός χώρος Banach, και έστω (f_n) φραγκένη αναδιάλυση του X^* . Τότε, $\exists (f_n)$ υπαναδιάλυση, και $f^* \in X^*$ ζίνα, ώστε: $f_{n_k} \xrightarrow{*} f$.

ii) Έστω X αναλαστικός χώρος, και έστω (x_n) φραγκένη αναλογία στο X , τότε \exists υπαναλογία της (x_n) , και $x \in X$ ζίνα, ώστε $x_n \rightarrow x$.
 (Bolzano-Weierstrass τε την αριθμητική τοπολογία \mathcal{N} (ε))

Προσοχή! \mathcal{N} στο X πρέπει να είναι αναλαστικός.

Ανάδειξη →

Anoixi

Eisai $A = \{x_n\}$, $M_0 = [A]$, $M = \overline{M_0}$

O μέν είναι μέρος υπόχωρου του X , από το οποίο ο πλήρης είναι αναδασμός.
Από την \mathcal{D}_X είναι ηερμηνούμενη τις τις αριθμητικές σχέσεις στην (M, M^*) .

Απαρχή για την ηερμηνία θα είναι: $x_{n_k} \rightarrow x$

→ Καθιερώσεις ευρύπλευρων:
 i) \cancel{X} αναδασμός \Rightarrow
 ii) \cancel{X}^* αναδασμός
 iii) \mathcal{D}_X είναι αριθμητική συγκέντρωση
 iv) $\|f\| = \max_{\|x\| \leq 1} \{|f(x)|\}$

v) $\forall (x_n) \in X$ ισχύει \Rightarrow

$\Rightarrow \exists$ αριθμητική συγκέντρωση
αναδασμός

) ΛΑΝΟ ΛΑΝΔΑΙΠΙ