ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ *

Θεόδωρος Η. Αλεξόπουλος, Εμμανουήλ Α. Δρης,
Σταύρος Ε. Μαλτέζος, Γεώργιος Δ. Τσιπολίτης
Εργαστήριο Πειραματικής Φυσικής Υψηλών Ενεργειών
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

15 Φεβρουαρίου 2012

*Version 2.4 © Θ.Α., Μ. Δ., Σ.Μ., Γ.Τ.

Περιεχόμενα

1	**Ανάλυση Κυκλωμάτων**	**1**
2	**Τελεστικοί Ενισχυτές**	**75**
3	**Ψηφιακά Κυκλώματα**	**113**
4	**Δίοδος, Τρανζίστορ**	**125**
5	**Γενικές ασκήσεις**	**145**

Πρόλογος

Αυτό το εγχειρίδιο αποτελεί μια σειρά βοηθητικών ασκήσεων του μαθήματος "Ηλεκτρονικά & Εργαστήριο" που διδάσκεται στους σπουδαστές του $5^{ου}$ εξαμήνου της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών & Φυσικών Επιστημών του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου της κατεύθυνσης Φυσικού Εφαρμογών.
Το μάθημα "Ηλεκτρονικά & Εργαστήριο" περιλαμβάνει τη διδασκαλία των βασικών εννοιών αναλογικών και ψηφιακών ηλεκτρονικών. Οι σημειώσεις αυτές ουσιαστικά χωρίζονται σε τέσσερα κεφάλαια που αντιστοιχούν στα τέσσερα κεφάλαια των σημειώσεων του μαθήματος. Ειδικότερα αυτά τα κεφάλαια είναι:

1. Ανάλυση Κυκλωμάτων
2. Τελεστικοί Ενισχυτές
3. Ψηφιακά Κυκλώματα
4. Βασικά Κυκλώματα Ενισχυτών με Τρανζίστορ.

Επιπλέον υπάρχει και ένα πέμπτο κεφάλαιο όπου θα βρείτε διάφορες γενικές ασκήσεις που εδόθησαν κατά τη διάρκεια των εξετάσεων του μαθήματος "Ηλεκτρονικά & Εργαστήριο" της σχολής ΕΜΦΕ.
Αυτή η έκδοση του εγχειριδίου περιλαμβάνει ένα σύνολο 167 ασκήσεων. Ελπίζουμε ότι αυτές οι σημειώσεις θα βοηθήσουν τους σπουδαστές να κατανοήσουν καλύτερα την ύλη του μαθήματος. Θέλουμε να επισημάνουμε ότι το εγχειρίδιο αυτό **ΔΕΝ** υποκαθιστά με κανένα τρόπο το βιβλίο/σημειώσεις και την παρακολούθηση του μαθήματος. Θα δεχτούμε με ευχαρίστηση τυχόν διορθώσεις, παρατηρήσεις και υποδείξεις σας.
Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε το Σωτήρη Φραγκίσκο, φοιτητή της ΣΕΜΦΕ για τη βοήθεια του στη δακτυλογράφηση του μεγαλύτερου μέρους του εγχειριδίου.

Θεόδωρος Αλεξόπουλος, theoalex@central.ntua.gr
Μανόλης Δρης, dris@central.ntua.gr
Σταύρος Μαλτέζος, maltezos@central.ntua.gr
Γιώργος Τσιπολίτης, yorgos@central.ntua.gr

Αθήνα 2005

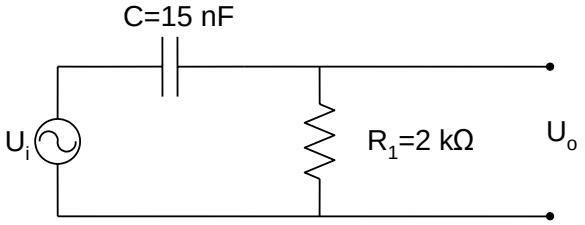
1

Ανάλυση Κυκλωμάτων

Πρόβλημα 1.1 Δίνεται το υψιπερατό φίλτρο του σχήματος (1.1), όπου το σήμα εισόδου είναι:

$$\upsilon_i = \hat{\upsilon}\cos(\omega t).$$

(α) Να υπολογίσετε την κυκλική συχνότητα καμπής ω_b.
(β) Να σχεδιάσετε χονδρικά το μέτρο του κέρδους (ή μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς) $|A|$ ως συνάρτηση της κυκλικής συχνότητας ω.
(γ) Να σχεδιάσετε τη διαφορ



Σχήμα 1.1

Λύση:
(α)

Η συχνότητα καμπής είναι:

$$\omega_b = \frac{1}{R_1 C} = \frac{1}{2000 \times 15 \times 10^{-9}}\ \text{Hz} = 33,3\ \text{kHz}.$$

(β)

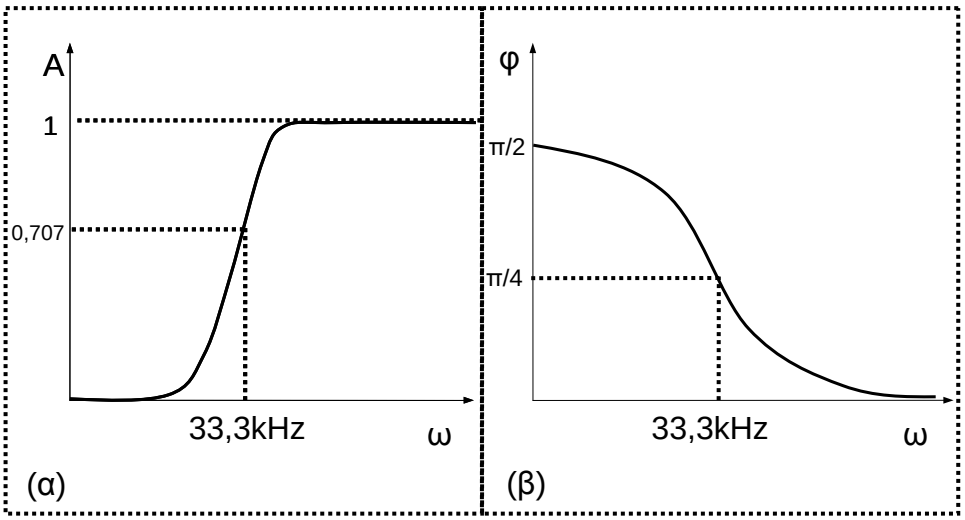
Το κέρδος A θα είναι:

$$A = \frac{R_1}{R_1 + \dfrac{1}{j\omega C}},$$

με μέτρο:

$$|A| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega_b}{\omega}\right)^2}},$$

και φάση:



Σχήμα 1.2

$$\phi = \arctan\left(\omega_b/\omega\right).$$

Το κέρδος και η διαφορά φάσης εξόδου-εισόδου δίνονται στο σχήμα (1.2α,β) αντίστοιχα.

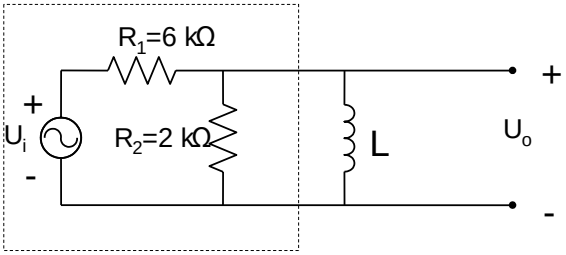
Πρόβλημα 1.2 Δίνεται το κύκλωμα φίλτρου του σχήματος (1.3). Η τάση εισόδου είναι:

$$\upsilon_i = \hat{\upsilon}_i \cos(\omega t).$$

(α) Να μετασχηματίσετε το κύκλωμα με χρήση του θεωρήματος Thevenin ώστε να προκύψει ισοδύναμο κύκλωμα με πηγή εναλλασσόμενης τάσης και ωμική αντίσταση ή αυτεπαγωγή σε σειρά. Να βρεθεί η σχέση του κέρδους (μιγαδικό μέγεθος), $A = \boldsymbol{V}_L/\boldsymbol{V}_i$ και του μέτρου του $|A|$, ως συνάρτηση της κυκλικής συχνότητας ω. Τί είδους φίλτρο είναι αυτό;
(β) Να δώσετε την κυκλική συχνότητα καμπής, ω_b, ως συνάρτηση των διαφόρων στοιχείων του κυκλώματος με βάση τη σχέση:

$$\frac{V_L(\omega_b)}{V_L(\infty)} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(γ) Να βρεθεί ο συντελεστής α τητα καμπής του φίλτρου να είναι ίση με 33,3 kHz.

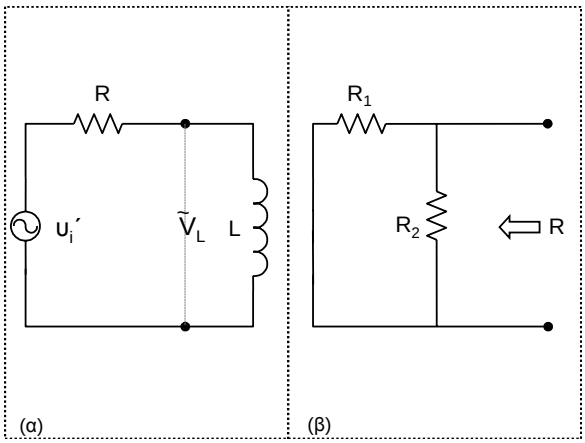


Σχήμα 1.3

Λύση:
(α)

Η ισοδύναμη τάση Thevenin είναι:

$$\upsilon_i' = \upsilon_i \cos\omega t \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$



Σχήμα 1.4

όπου βρίσκεται από το διαιρέτη τάσης μεταξύ των αντιστάσεων $R_1,\ R_2$.
Το πλάτος της τάσης Thevenin είναι:

$$\hat{v}_i' = \hat{v}_i \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

και η ισοδύναμη αντίσταση Thevenin θα είναι:

$$R = R_1 || R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6 \times 2}{6 + 2}\ \Omega = 1,5\ \mathrm{k}\Omega,$$

όπως φαίνεται από το σχήμα (1.4β). Το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin φαίνεται στο σχήμα (1.4α).

(β)

Το πλάτος τάσης του πηνίου θα είναι:

$$\boldsymbol{V}_L = \hat{V}_i' \frac{j\omega L}{j\omega L + R} = \boldsymbol{V}_i \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) \frac{j\omega L}{j\omega L + R}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{V}_L = \boldsymbol{V}_i \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{1 - jR/\omega L}.$$

Επομένως,το κέρδος είναι:

$$A = \frac{\boldsymbol{V}_L}{\boldsymbol{V}_i} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{1 - jR/\omega L}.$$

Παρατηρούμε οτι για $\omega \to 0$ το $A \to 0$. Επομένως, αυτό το κύκλωμα είναι ένα υψιπερατό φίλτρο.

$$\left| \frac{\boldsymbol{V}_L}{\boldsymbol{V}_i} \right| = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2}}$$

$$\Rightarrow v_L(\omega) = v_i \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R}{\omega L} \right)^2}} \tag{1.0.1}$$

$$\Rightarrow v_L(\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_i.$$

Έχουμε:

$$v_L(\omega_b) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_i, \tag{1.0.2}$$

και επομένως από τις σχέσεις (1.0.1) και (1.0.2) θα έχουμε:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{(\omega_b L)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \omega_b^2 L^2 = R^2$$

$$\Rightarrow \omega_b = \frac{R}{L}.$$

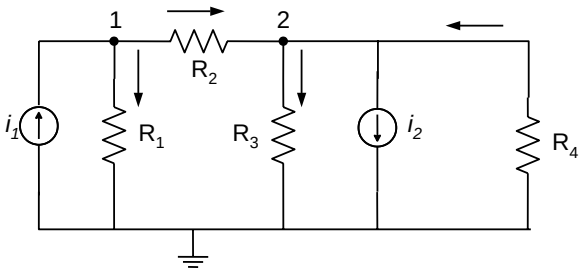
(γ)

$$\omega_b = \frac{R}{L} = \frac{1,5\ \text{k}\Omega}{L} = 33,3\ \text{kHz}$$

$$\Rightarrow L = \frac{1,5}{33,3}\ \text{H} = 45\ \text{mH}.$$

Πρόβλημα 1.3 Να επιλύσετε το κύκλωμα του σχήματος (1.5) για να βρείτε τις τάσεις των κόμβων 1 και 2. Είναι βολικό να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο των κόμβων. Δίνονται:

$i_1 = 0,5\,A$ $\qquad\qquad$ $R_4 = 6\,\Omega.$



Σχήμα 1.5

Λύση:
Για τους κόμβους 1 και 2 θα έχουμε άθροισμα ρευμάτων ίσο με μηδέν:

$$\frac{\upsilon_1 - \upsilon_2}{R_2} + \frac{\upsilon_1}{R_1} - i_1 = 0, \tag{1.0.3}$$

$$-\frac{\upsilon_1 - \upsilon_2}{R_2} + \frac{\upsilon_2}{R_4} + \frac{\upsilon_2}{R_3} + i_2 = 0. \tag{1.0.4}$$

Από τις σχέσεις (1.0.3) και (1.0.4) παίρνουμε:

$$\frac{\upsilon_1 - \upsilon_2}{2} + \frac{\upsilon_1}{4} = 5$$
$$\Rightarrow 2(\upsilon_1 - \upsilon_2) + \upsilon_1 = 20,$$

$$-\frac{\upsilon_1 - \upsilon_2}{2} - \frac{\upsilon_2}{6} + \frac{\upsilon_2}{3} = -2$$
$$\Rightarrow -3(\upsilon_1 - \upsilon_2) - \upsilon_2 + 2\upsilon_2 = -12.$$

Επομένως, το σύστημα των δύο εξισώσεων με αγνώστους τις τάσεις υ_1, υ_2 είναι:

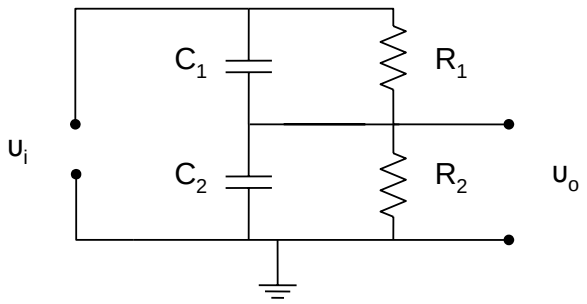
$$3\upsilon_1 - 2\upsilon_2 = 20,$$

$$-3v_1 + 4v_2 = -12.$$

Επιλύοντας αυτό το σύστημα θα έχουμε:

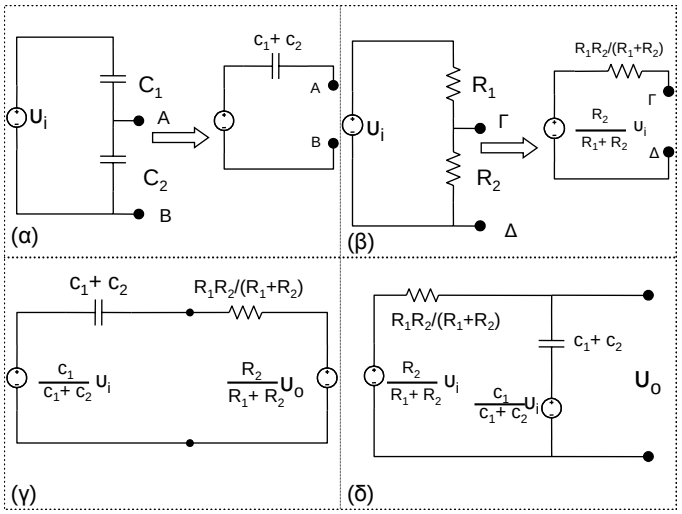
$$v_1 = 9,3 \text{ V}, \qquad v_2 = 4,0 \text{ V}.$$

Πρόβλημα 1.4 Θεωρήστε το κύκλωμα του σχήματος (1.6).
(α) Για σήμα εισόδου $v_i = \hat{v}_o \cos(\omega t)$, να βρείτε μια έκφραση για το σήμα εξόδου v_o (μιγαδική έκφραση).
(β) Κάτω από ποιά συνθήκη ο



Σχήμα 1.6

Λύση:
(α)



Σχήμα 1.7

Σύμφωνα με το θεώρημα του Thevenin μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε δύο ισοδύναμα κυκλώματα για να αντικαταστήσουμε τους πυκνωτές και τις αντιστάσεις, όπως φαίνεται στο σχήμα (1.7α,β).
Επομένως, το τελικό ισοδύναμο κύκλωμα δίνεται στο σχήμα (1.7γ,δ). Από το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff θα έχουμε: για το ρεύμα I (που θα διαρρέει το κύκλωμα (1.7δ)) τη σχέση:

$$I\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + \frac{1}{j\omega(C_1+C_2)}\right) = \left(\frac{R_2}{R_1+R_2} - \frac{C_1}{C_1+C_2}\right)\boldsymbol{V}_i$$

$$\Rightarrow I = \frac{j\omega[R_2(C_1+C_2) - C_1(R_1+R_2)]}{R_1+R_2+j\omega(C_1+C_2)R_1R_2}\boldsymbol{V}_i.$$

Η τάση εξόδου v_o είναι:

$$\boldsymbol{V}_o = \frac{I}{j\omega(C_1+C_2)} + \frac{C_1}{C_1+C_2}v_i,$$

και επομένως το κέρδος είναι:

$$\frac{\boldsymbol{V}_o}{\boldsymbol{V}_i} = \frac{C_1}{C_1+C_2} + \frac{R_2(C_1+C_2)-C_1(R_1+R_2)}{(C_1+C_2)[R_1+R_2+j\omega R_1R_2(C_1+C_2)]}.$$

(β)

Από το ισοδύναμο κύκλωμα του σχήματος (1.7δ) αν οι δύο πηγές ρεύματος είναι ίσες τότε το κύκλωμα δε διαρρέεται από ρεύμα ($I=0$), επομένως θα έχουμε:

$$\frac{R_2}{R_1+R_2} = \frac{C_1}{C_1+C_2}$$

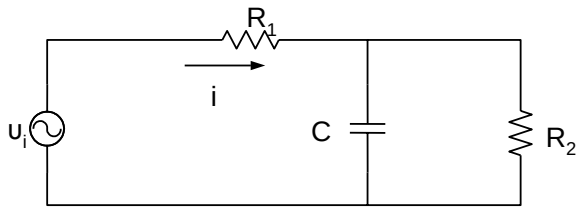
$$\Rightarrow R_1C_1 = R_2C_2,$$

και το κέρδος είναι:

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{C_1}{C_1+C_2} = \frac{R_2}{R_1+R_2},$$

όπου το κέρδος είναι ανεξάρτητο της κυκλικής συχνότητας ω.

Πρόβλημα 1.5 Θεωρήστε τα $v_i = \hat{v}_o\cos(\omega t)$, να βρείτε το πλάτος της τάσης στην αντίστα



Σχήμα 1.8

Λύση:
Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι:

$$Z = R_1 + \frac{R_2\,(1/j\omega C)}{R_2+1/j\omega C}$$

$$\Rightarrow Z = R_1 + \frac{R_2}{1+j\omega R_2C} = R_1 + \frac{R_2(1-j\omega R_2C)}{1+\omega^2R_2^2C^2}$$

$$\Rightarrow Z = \left(R_1 + \frac{R_2}{1+\omega^2R_2^2C^2}\right) - \frac{j\omega R_2^2C}{1+\omega^2R_2^2C^2}.$$

Το ρεύμα I είναι:

$$\boldsymbol{I} = \frac{\boldsymbol{V}_i}{Z},$$

και η τάση της αντίστασης R_1 είναι:

$$\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{I}R_1 = \frac{\boldsymbol{V}_iR_1}{Z},$$

με πλάτος:

$$|\boldsymbol{V}_1| = R_1|\boldsymbol{V}_i|\left|\frac{1}{Z}\right| = \frac{R_1\hat{v}_o}{|Z|},$$

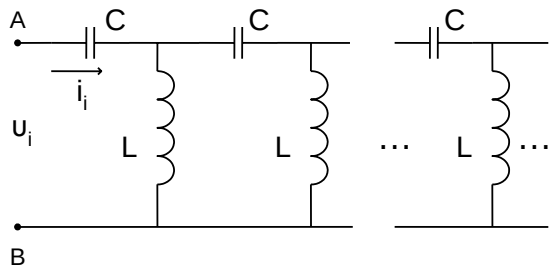
όπου το μέτρο της σύνθετης αντίστασης Z είναι:

$$|Z| = \sqrt{\left(R_1 + \frac{R_2}{1+\omega^2R_2^2C^2}\right)^2 + \frac{\omega^2R_2^4C^2}{(1+\omega^2R_2^2C^2)^2}}.$$

Πρόβλημα 1.6 Ένα ηλεκτρικό κύκλωμα αποτελείται από πυκνωτές χωρητικότητας C και πηνία αυτεπαγωγής L, όπως φαίνεται στο σχήμα (1.9). Το κύκλωμα επεκτείνεται ως το άπειρο στα δεξιά των ακροδεκτών Α, Β. Μια τάση $v_i = \hat{v}_o\cos(\omega t)$ εφαρμόζεται στους ακροδέκτες Α, Β με αποτέλεσμα να δημιουργείται ένα ρεύμα i_i που διαρρέει το κύκλωμα.
Να υπολογίσετε τη μέση ισχύ:

$$< P >= \frac{1}{2}Re(\overline{v}_i i_i),$$

του κυκλώματος ως συνάρτηση του v_i, όπου Re είναι το πραγματικό μέρος του μιγαδικού αριθμού $\overline{v}_i i_i$ και $\overline{v}_i$ το μιγαδικό συζυγές του v_i.



Σχήμα 1.9

Λύση:
Η τάση και ρεύμα εισόδου είναι:

$$v_i = Re\left(\hat{v}_o e^{j\omega t}\right), \quad i_i = Re\left(\hat{i}_o e^{j\omega t}\right) = \frac{v_i}{Z},$$

όπου Z είναι η ολική σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος.
Η μέση ισχύς είναι:

$$< P >= \frac{1}{2}Re(\overline{v}_i i_i) = \frac{\hat{v}_o^2}{2}Re\left(\frac{1}{Z}\right).$$

Έστω ότι:

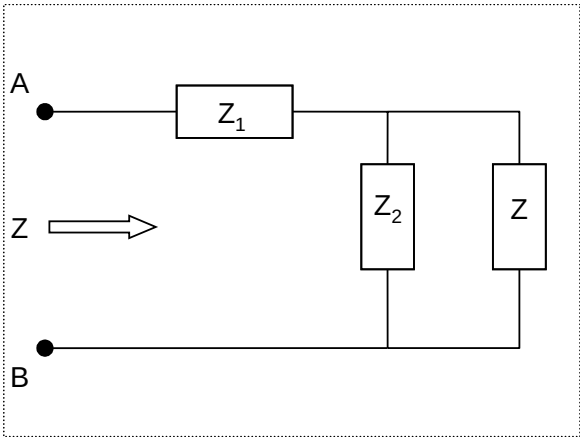
$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C}, \quad Z_2 = j\omega L,$$

είναι η σύνθετη αντίσταση ενός πυκνωτή και ενός πηνίου. Προφανώς το δικτύωμα του σχήματος (1.9) είναι ισοδύναμο με το κύκλωμα (1.10), εφόσον το δικτύωμα επεκτείνεται στο άπειρο στα δεξιά του κυκλώματος. Επομένως, η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος στα άκρα ΑΒ είναι:

$$Z = Z_1 + \frac{1}{\dfrac{1}{Z_2} + \dfrac{1}{Z}} = Z_1 + \frac{ZZ_2}{Z+Z_2}$$

$$\Rightarrow Z^2 - Z_1Z - Z_1Z_2 = 0.$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι:



Σχήμα 1.10

$$Z_{\pm} = \frac{Z_1}{2} \pm \frac{\sqrt{Z_1^2 + 4Z_1Z_2}}{2}.$$

Η ρίζα Z_- δεν έχει φυσική σημασία καθότι είναι αρνητική, επομένως η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι:

$$Z = \frac{Z_1}{2} + \frac{\sqrt{Z_1^2 + 4Z_1Z_2}}{2}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{1}{2j\omega C}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_o^2}}\right),$$

όπου

$$\omega_o = \frac{1}{2\sqrt{LC}}.$$

Για $\omega < \omega_o$ παρατηρούμε οτι η ποσότητα

$$\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{{\omega_o}^2}}$$

είναι πραγματικός αριθμός, με αποτέλεσμα:

$$Re\left(\frac{1}{Z}\right) = 0.$$

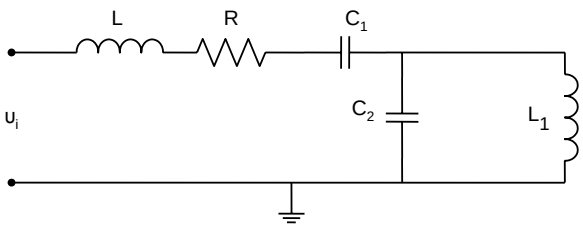
δηλαδή, η μέση ισχύς μηδενίζεται.
Για $\omega > \omega_o$ έχουμε:

$$Re\left(\frac{1}{Z}\right) = \frac{1}{2\omega L}\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_o^2} - 1}.$$

Άρα η μέση ισχύς είναι:

$$< P >= \frac{\upsilon_o^2}{4\omega L}\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_o^2} - 1}.$$

Πρόβλημα 1.7 Θεωρήστε το κύκλωμα του σχήματος (1.11).
(α) Να βρείτε τη σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος.



Σχήμα 1.11

(β) Ποιό είναι το μέγιστο κι ελάχιστο ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα, όταν μεταβάλουμε τη συχνότητα εισόδου ω; Για ποιά συχνότητα θα έχουμε το ελάχιστο ρεύμα;
Λύση:
(α)

Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι:

$$Z(\omega) = j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{\frac{1}{j\omega C_2} j\omega L_1}{\frac{1}{j\omega C_2} + j\omega L_1}$$

$$\Rightarrow Z(\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{j\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C_2}$$

$$\Rightarrow Z(\omega) = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C_1} + \frac{\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C_2}\right).$$

(β)

Το ρεύμα είναι:

$$i = \frac{v_i}{Z} = \frac{v_i}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C_1} + \frac{\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C_2}\right)},$$

και το πλάτος του ρεύματος είναι:

$$i_o = \frac{v_o}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C_1} + \frac{\omega L_1}{1 - \omega^2 L^2 C_2}\right)^2}},$$

όπου v_o είναι το πλάτος της τάσης εισόδου. Παρατηρούμε οτι:

$$(i_o)_{max} = \frac{v_o}{R}, \quad (i_o)_{min} = 0.$$

Όταν το i_o είναι ελάχιστο ($i_o = 0$), τότε:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C_1} + \frac{\omega L_1}{1 - \omega^2 L_1 C_2} = \infty.$$

Οι τρεις ρίζες αυτής της εξίσωσης είναι:

$$\omega = \left(0,\ \infty,\ \frac{1}{\sqrt{L_1 C_2}}\right).$$

Δεχόμαστε τη ρίζα $\omega = 1/\sqrt{L_1 C_2}$ που έχει φυσική σημασία για τη συχνότητα όπου έχουμε το ελάχιστο ρεύμα $i_o = 0$.

Πρόβλημα 1.8 Το παραλληλόγραμμο του σχήματος (1.12) περιγράφει ένα άγνωστο γραμμικό παθητικό κύκλωμα. Αν η τάση εισόδου είναι μια βηματική συνάρτηση:

$$v_i(t) = Au(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } t \leq 0 \\ A & \text{για } t > 0 \end{cases}$$

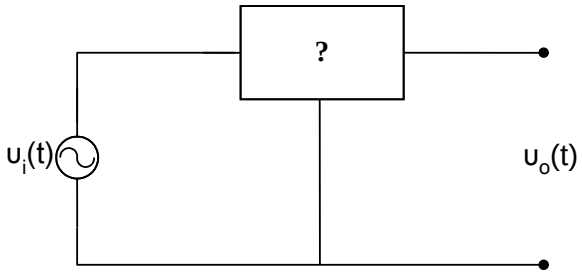
τότε η τάση εξόδου $v_o(t)$ είναι της μορφής :

$$v_o(t) = \frac{A}{2}(1 - e^{-t/T})u(t) = \begin{cases} 0 & \text{για } t \leq 0 \\ (1/2)A(1 - e^{-t/T}) & \text{για } t > 0 \end{cases}$$

όπου η σταθερά $\tau = 1,2 \times 10^{-4}$ s $= 0,12$ ms.
Να βρείτε την τάση εξόδου $v_o(t)$ όταν η τάση εισόδου είναι:

$$v_i(t) = 4\cos(\omega t),$$

όπου η συχνότητα $\omega = 1500$ Ι



Σχήμα 1.12

Λύση:
Γνωρίζουμε οτι οι μετασχηματισμοί Laplace των σημάτων εισόδου και εξόδου είναι:

$$v_i(t) = Av_t(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{A}{s} = V_i(s),$$

$$v_o(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{A}{2}\left[\frac{1}{\tau} - \frac{1}{s + 1/\tau}\right] = V_o(s).$$

Η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1/2\tau}{s + 1/\tau}.$$

Ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος

$$v_i(t) = 4\cos(\omega t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{4s}{\omega^2 + s^2} = V_i(s).$$

Επομένως, η έξοδος είναι:

$$V_o(s) = H(s)V_i(s) = \frac{4s}{\omega^2 + s^2}\,\frac{1/2\tau}{s + 1/\tau}.$$

Με την ανάλυση των επιμέρους κλασμάτων θα έχουμε:

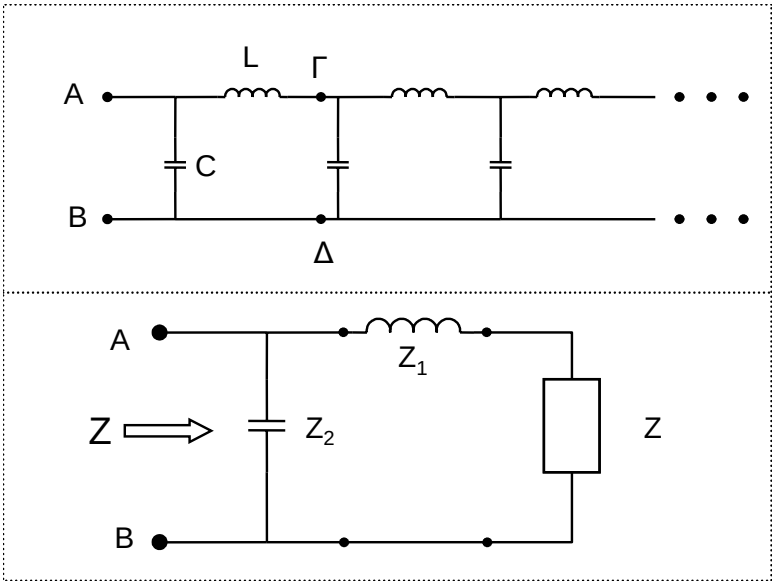
$$V_o(s) = \frac{2}{\tau}\left[\frac{1}{s + 1/\tau}\frac{-1/\tau}{\omega^2 + (1/\tau)^2} + \frac{1/2}{s - j\omega}\frac{1}{j\omega + 1/\tau} + \frac{1/2}{s + j\omega}\frac{1}{j\omega + 1/\tau}\right],$$

όπου $\omega\tau = 2\pi \times 1500 \times 1,2 \times 10^{-4} \cong 1$.
Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι:

$$v_o(t) = \frac{2}{\tau}\left[\frac{-1/\tau}{\omega^2 + \left(\frac{1}{\tau}\right)^2} e^{-t/\tau} + \frac{(1/\tau)\cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)}{\omega^2 + (1/\tau)^2}\right]$$

$$\Rightarrow v_o(t) \cong -e^{-t/\tau} + \cos(\omega t) + \sin(\omega t).$$

Πρόβλημα 1.9 Να δείξετε οτι η άπειρη αλυσίδα των πηνίων L και των πυκνωτών C του δικτυώματος του σχήματος (1.13) είναι ένα βαθυπερατό φίλτρο. Να βρείτε την κυκλική συχνότητα καμπής ω_c ως συνάρτηση της παραμέτρου $\omega_o = 1/\sqrt{LC}$.



Σχήμα 1.13

Λύση:
Θα προσδιορίσουμε την ολική σύνθετη αντίσταση του δικτυώματος, θεωρώντας οτι η αντίσταση Z στα άκρα ΑΒ είναι ίση με την αντίσταση στα άκρα ΓΔ διότι το δικτύωμα επεκτείνεται στο άπειρο. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε:

$$Z = Z_1 + \frac{Z_2 Z}{Z_2 + Z}$$

$$\Rightarrow Z^2 - Z_1 Z - Z_1 Z_2 = 0.$$

Οι ρίζες αυτού του τριωνύμου είναι:

$$Z_{1,2} = \frac{Z_1 \pm \sqrt{Z_1^2 + 4Z_1 Z_2}}{2},$$

όπου οι σύνθετες αντιστάσεις $Z_1 = j\omega L, \quad Z_2 = 1/j\omega C$.
Η λύση με το (-) πρόσημο δεν έχει φυσική σημασία, διότι αν $Z_2 = 0$ τότε $Z = 0$, που είναι άτοπο. Επομένως,

$$Z = \frac{j\omega L}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-\omega^2 L^2 + \frac{4L}{C}}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{j\omega L}{2} + \frac{L}{2}\sqrt{-\omega^2 + \frac{4}{LC}}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{j\omega L}{2} + \frac{L}{2}\sqrt{-\omega^2 + 4\omega_o^2}.$$

Όταν το σήμα εισόδου περάσει μέσα από n τμήματα του κυκλώματος που περιέχουν ένα πηνίο αυτεπαγωγής L και ένα πυκνωτή χωρητικότητας C, η έξοδος θα είναι:

$$\upsilon_n = \left(1 - \frac{Z_1}{Z}\right)^n \upsilon_i = a^n \upsilon_i,$$

όπου υ_i είναι η τάση εισόδου και:

$$a = 1 - \frac{Z_1}{Z} = \frac{-Z_1 + \sqrt{Z_1^2 + 4Z_1Z_2}}{Z_1 + \sqrt{Z_1^2 + 4Z_1Z_2}}$$

$$\Rightarrow a = \frac{-j\omega L + L\sqrt{4\omega_o^2 - \omega^2}}{j\omega L + L\sqrt{4\omega_o^2 - \omega^2}}.$$

Επομένως, το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς, $H(j\omega)$, του δικτυώματος θα είναι:

$$|H(j\omega)| = \left|\frac{\upsilon_n}{\upsilon_i}\right| = |a|^n = \left|\frac{-j\omega L + L\sqrt{4\omega_o^2 - \omega^2}}{j\omega L + L\sqrt{4\omega_o^2 - \omega^2}}\right|.$$

Παρατηρούμε ότι:

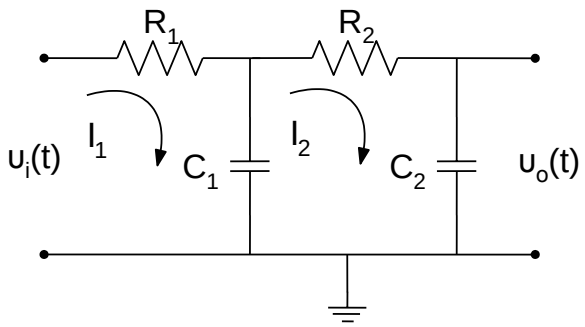
$$|H(j\omega)| = 1 \qquad \text{αν} \quad \omega \ll 2\omega_o,$$

και

$$|H(j\omega)| < 1 \qquad \text{αν} \quad \omega \gg 2\omega_o.$$

Άρα συμπεραίνουμε οτι το δικτύωμα αυτό δρα ως ένα βαθυπερατό φίλτρο με συχνότητα καμπής $\omega_b = 2\omega_0$.

Πρόβλημα 1.10 Θεωρήστε το κύκλωμα του σχήματος (1.14) που αποτελείται από δύο βρόχους. Να βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς $H(j\omega)$



Σχήμα 1.14

Λύση:
Εφαρμόζοντας το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff για τους δύο βρόχους του κυκλώματος θα έχουμε:

$$(R_1 + Z_{C_1})I_1 - Z_{C_1}I_2 = \upsilon_i,$$

$$-Z_{C_1}I_1 + (R_2 + Z_{C_2} + Z_{C_1})I_2 = 0.$$

Επομένως, επιλύοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων με αγνώστους τα ρεύματα βρόχων I_1, I_2 θα έχουμε, για το ρεύμα I_2:

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + Z_{C_1} & v_i \\ -Z_{C_1} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + Z_{C_1} & -Z_{C_1} \\ -Z_{C_1} & R_2 + Z_{C_2} + Z_{C_1} \end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{Z_{C_1} v_i}{R_1 R_2 + R_1(Z_{C_1} + Z_{C_2}) + R_2 Z_{C_1} + Z_{C_1} Z_{C_2}},$$

όπου

$$Z_{C_1} = \frac{1}{j\omega C_1}, \text{και} \quad Z_{C_2} = \frac{1}{j\omega C_2},$$

είναι οι σύνθετες αντιστάσεις των πυκνωτών χωρητικότητας $C_1,\ C_2$ αντίστοιχα.
Επομένως, η συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος θα είναι:

$$H(j\omega) = \frac{\boldsymbol{V}_o}{\boldsymbol{V}_i} = \frac{Z_{C_2} I_2}{v_i}$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{Z_{C_1} Z_{C_2}}{R_1 R_2 + R_1(Z_{C_1} + Z_{C_2}) + R_2 Z_{C_1} + Z_{C_1} Z_{C_2}}$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{\dfrac{R_1 R_2}{Z_{C_1} Z_{C_2}} + R_1 \left(\dfrac{1}{Z_{C_1}} + \dfrac{1}{Z_{C_2}} \right) + \dfrac{R_2}{Z_{C_2}} + 1}$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{-R_1 R_2 C_1 C_2 \omega^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) j\omega + 1}.$$

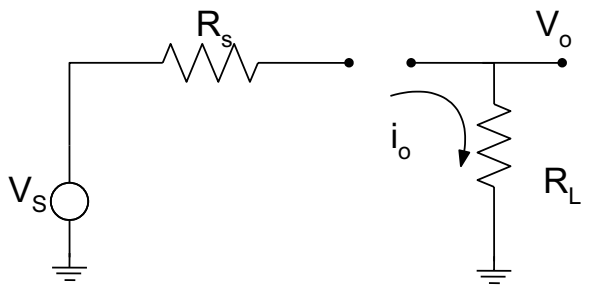
Αν θεωρήσουμε τις σταθερές χρόνου

$$\tau_1 = R_1 C_1, \quad \tau_2 = R_2 C_2, \quad \tau_{12} = R_1 C_2,$$

η συνάρτηση μεταφοράς, $H(j\omega)$, είναι:

$$H(j\omega) = \frac{1}{-\tau_1 \tau_2 \omega^2 + j\omega(\tau_1 + \tau_2 + \tau_{12}) + 1}.$$

Πρόβλημα 1.11 Αν θέλετε να έχετε μια πηγή ρεύματος με χρήση πηγής τάσης σταθερή κατά 1% για μια περιοχή τάσης από 0 ως 10 V, πόσο μεγάλη πρέπει να είναι η πηγή τάσης; Αν απαιτήσουμε ρεύμα έντασης 10 mA σε αυτό το κύκλωμα, πόσ [illegible] ικής ισχύος αντιπροσωπεύει;
Λύση:



Σχήμα 1.15

Για να φτιάξουμε μια πηγή ρεύματος i_o σταθερή κατά 1 % για την περιοχή τάσης 0 V ως 10 V (όπως φαίνεται στο σχήμα (1.15)):

$$i_o = \frac{V_s}{R_s + R_L}$$

$$\Rightarrow V_s - i_o R_s = i_o R_L = V_o$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\Delta i_0}{i_0}\right) i_0 R_s = -\Delta V_o$$

$$\Rightarrow i R_s = -\frac{\Delta V_o}{(\Delta i/i)} = 1000 \text{ V},$$

αφού $\Delta V_o = 0 - 10 \text{ V} = -10 \text{ V}$ και $(\Delta i/i) = 0,01$, έχουμε:

$$V_s - V_o = 1000 \text{ V}$$

$$\Rightarrow V_s \geq 1010 \text{ V}.$$

Για το ρεύμα i_o η ισχύς στο φόρτο R_L είναι :

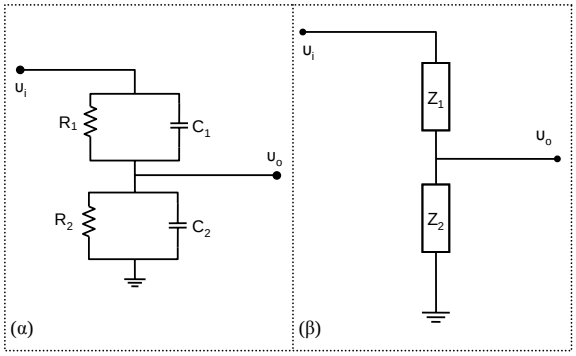
$$P_L = 10 \text{ mA} \times 10 \text{ V} = 100 \text{ mW}.$$

Αυτό αντιπροσωπεύει ένα ποσοστό της ολικής ισχύος:

$$\delta \cong \frac{10}{1000} = 1\%.$$

Πρόβλημα 1.12 Θεωρήστε το κύκλωμα του σχήματος (1.16α) που χρησιμοποιείται στη διάταξη του παλμογράφου. Βρείτε τη σχέση που πρέπει να ικανοποιούν τα R_1, R_2, C_1, C_2, έτσι ώστε:
(α) η τάση εισόδου υ_i και η τάση εξόδου υ_o να έχουν την ίδια φάση,

(β) το κέρδος $A = \upsilon_o/\upsilon_i$ να είναι ανεξάρτητο της συχνότητας ω. Ποιό είναι το κέρδος A;



Σχήμα 1.16

Λύση:
Από το διαιρέτη τάσης του κυκλώματος του σχήματος (1.16β) έχουμε:

$$\upsilon_o = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \upsilon_i,$$

όπου

$$Z_1 = \frac{Z_{C_1} Z_{R_1}}{Z_{C_1} + Z_{R_1}} = \frac{R_1/j\omega C_1}{1/j\omega C_1 + R_1} = \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C_1},$$

και

$$Z_2 = \frac{Z_{C_2} Z_{R_2}}{Z_{C_2} + Z_{R_2}} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2}.$$

Οπότε έχουμε:

$$A = \frac{\upsilon_o}{\upsilon_i} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{R_2/(1 + j\omega R_2 C_2)}{R_1/(1 + j\omega R_1 C_1) + R_2/(1 + j\omega R_2 C_2)}$$

$$\Rightarrow A = \frac{R_2}{R_2 + R_1(1 + j\omega R_2 C_2)/(1 + j\omega R_1 C_1)}$$

$$\Rightarrow A = \frac{R_2 + j\omega R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2 + j\omega R_1 R_2 (C_1 + C_2)}$$

$$\Rightarrow A = \frac{R_2(R_1 + R_2) + \omega^2 {R_1}^2 {R_2}^2 C_1 (C_1 + C_2)}{D} +$$

$$+ \frac{j\omega}{D} \left[R_1 R_2 C_1 (R_1 + R_2) - R_1 {R_2}^2 (C_1 + C_2) \right],$$

όπου ορίζουμε το D:

$$D = (R_1 + R_2)^2 + \omega^2 {R_1}^2 {R_2}^2 (C_1 + C_2)^2.$$

Για να έχουμε τη φάση του κέρδους A ανεξάρτητη της συχνότητας ω, θα πρέπει το φανταστικό μέρος της να μηδενίζεται:

$$R_1 R_2 C_1 (R_1 + R_2) = R_1 {R_2}^2 (C_1 + C_2)$$

$$\Rightarrow R_1 R_2 C_1 R_1 + R_1 {R_2}^2 C_1 = R_1 {R_2}^2 C_1 + R_1 {R_2}^2 C_2$$

$$\Rightarrow R_1 C_1 = R_2 C_2,$$

Επομένως, το κέρδος A θα είναι :

$$A = \frac{v_o}{v_i} = \frac{R_2(R_1 + R_2) + \omega^2 {R_1}^2 {R_2}^2 C_1 C_2 (1 + R_2/R_1)}{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2 {R_1}^2 {R_2}^2 C_1 C_2 (1 + R_2/R_1)(1 + R_1/R_2)}.$$

Επομένως, για να έχουμε κέρδος ανεξάρτητο της συχνότητας ω, θα πρέπει:

$$A = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Πρόβλημα 1.13 Βρείτε τη σχέση για το πηλίκο των τάσεων δύο πυκνωτών σε σειρά, ακολουθώντας τα βήματα που υποδεικνύονται στο σχήμα (1.17):
Λύση:
Στο τελευταίο βήμα έχουμε (βλέπε σχήμα (1.18)) :

$$q = Cv$$

$$\Rightarrow i = C_T \frac{dv}{dt} = (C_1 + C_2) \frac{dv_T}{dt} = C_1 \frac{dv_1}{dt}$$

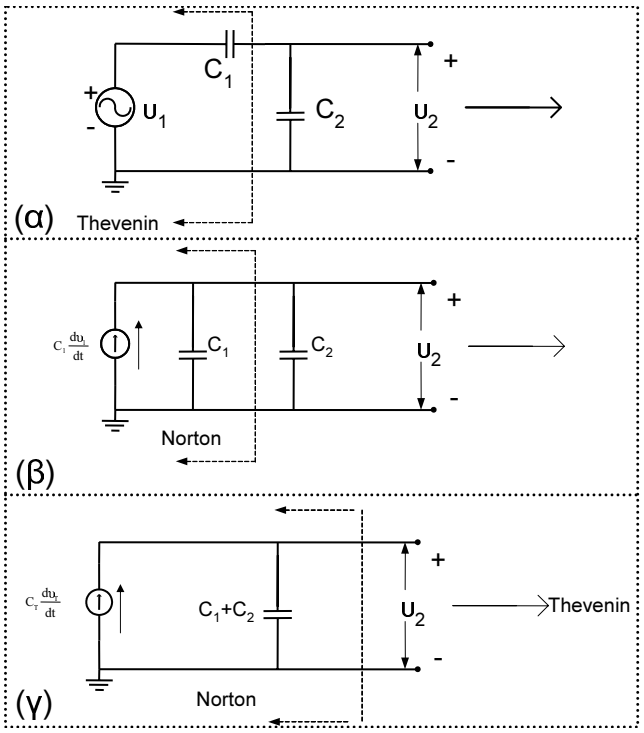
$$\Rightarrow v_T = \frac{C_1}{C_1 + C_2} v_1.$$

Από το πρώτο σχήμα ο διαιρέτης τάσης μας δίνει:

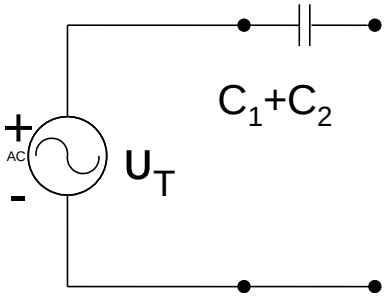
$$v_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} v_1 \equiv v_{C_2}$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{C_2 + C_1 - C_1}{C_1 + C_2} v_1 = v_1 - \frac{C_1}{C_1 + C_2} v_1$$

$$\Rightarrow (v_1 - v_2) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} v_1$$



Σχήμα 1.17



Σχήμα 1.18

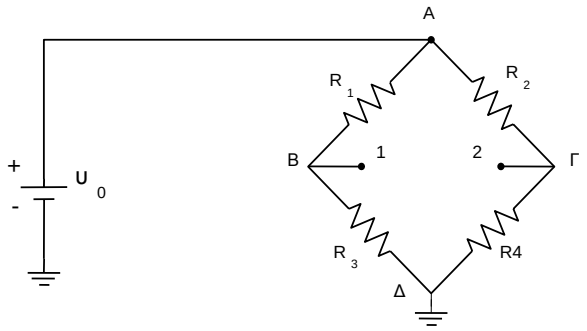
$$\Rightarrow v_T = \frac{C_1}{C_1 + C_2} v_1.$$

Πρόβλημα 1.14 Βρείτε το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin για τη γέφυρα Wheatstone του σχήματος (1.19), όπως φαίνεται από τους ακροδέκτες 1 και 2. Υποθέτουμε οτι η γέφυρα αποτελείται από 4 τυχαίες αντιστάσεις που φορτίζονται από μια ιδανική μπαταρία.
Λύση:
Εφαρμόζουμε το θεώρημα Thevenin στα τμήματα ΑΒΔ και ΑΓΔ ξεχωριστά, όπως φαίνεται στο σχήμα (1.20α), όπου:

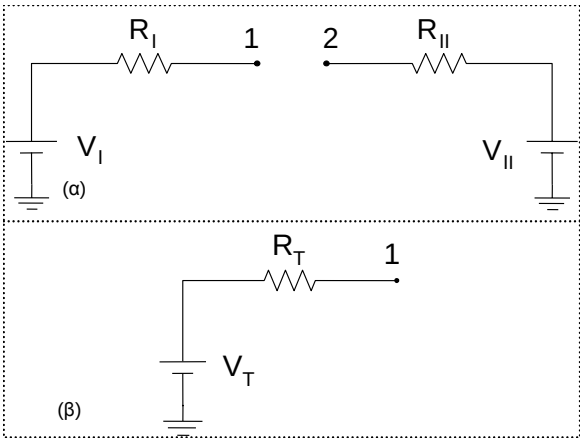
$$R_I = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}, \quad R_{II} = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4},$$

$$v_I = \frac{R_3 v_o}{R_1 + R_3}, \quad v_{II} = \frac{R_4 v_o}{R_2 + R_4}.$$

Για το τελικό κύκλωμα, το οποίο δίνεται στο σχήμα (1.20β), ισχύει:



Σχήμα 1.19



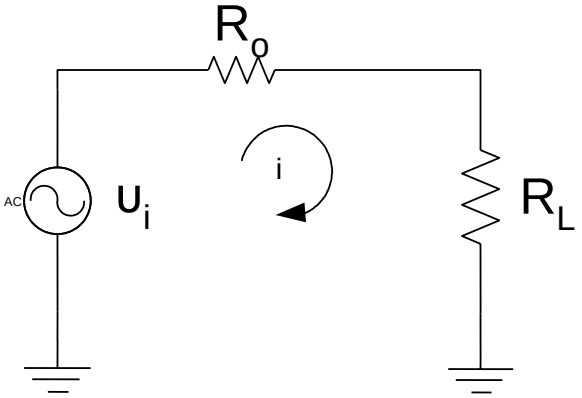
Σχήμα 1.20

$$\upsilon_T = \upsilon_I - \upsilon_{II} = \upsilon_o \left(\frac{R_3}{R_1 + R_3} - \frac{R_4}{R_2 + R_4} \right),$$

και

$$R_T = R_I // R_{II}$$

Πρόβλημα 1.15 Βρείτε την R_L του κυκλώματος του σχήματος (1.21) ως συνάρτηση του R_o, έτσι ώστε στην αντίσταση φόρτου R_L να παρέχεται η μέγιστη ισχύς.



Σχήμα 1.21

Λύση:
Η ισχύς στο φόρτο είναι:

$$P_L = i^2 R_L \qquad \text{όπου} \quad i = \frac{v_i}{R_o + R_L}.$$

Επομένως:

$$P_L = \frac{R_L {v_i}^2}{(R_o + R_L)^2}.$$

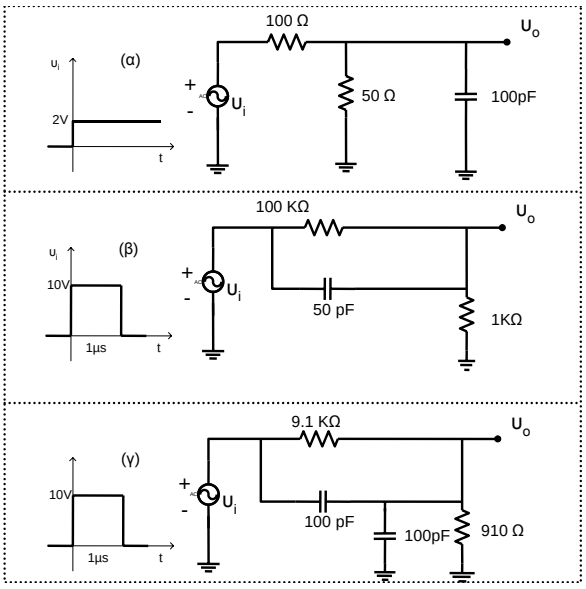
Για μέγιστη ισχύ θα πρέπει $dP_L/dR_L = 0$, δηλαδή:

$$\frac{dP_L}{dR_L} = \frac{{v_i}^2}{(R_o + R_L)^2} - \frac{2R_L v_i^2}{(R_o + R_L)^3} = 0$$

$$\Rightarrow R_o + R_L = 2R_L$$

$$\Rightarrow R_L = R_o.$$

Πρόβλημα 1.16 Για τα παρακάτω κυκλώματα, να δώσετε γραφικά την τάση εξόδου v_o, για τις αντίστοιχες τάσεις εισόδου.



Σχήμα 1.22

Λύση:
(α)

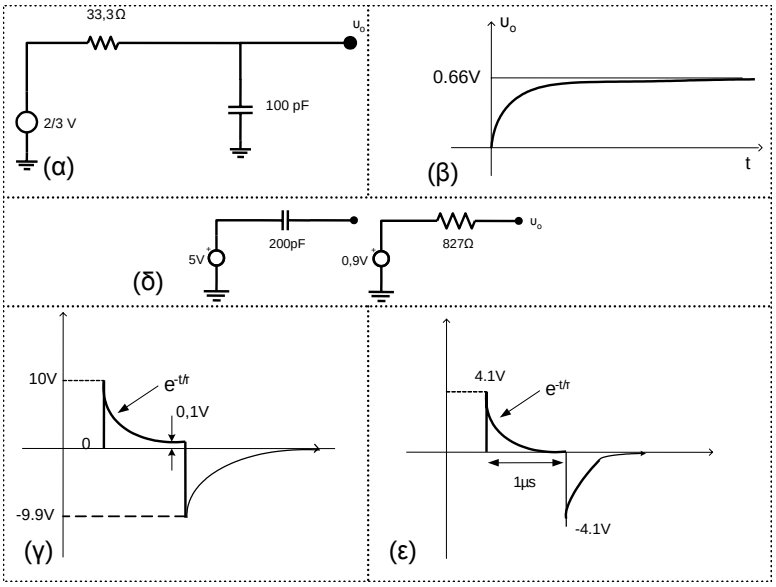
Από το θεώρημα Thevenin έχουμε για την ισοδύναμη αντίσταση και τάση Thevenin:

$$R_T = 100\,\Omega // 50\,\Omega = 33,3\,\Omega,$$

$$V_T = \frac{50}{50+100} 2\,\text{V} = \frac{100}{150}\,\text{V} = \frac{2}{3}\,\text{V},$$

κι επομένως έχουμε το ισοδύναμο κύκλωμα του σχήματος (1.23α):
Αυτό είναι ένα κύκλωμα ολοκληρωτή με σταθερά χρόνου $\tau = RC = (33,3\ \Omega) \times (100\ \text{pF}) = 3,3$ ns, όπου η τάση εξόδου είναι:

$$v_o = \frac{2}{3}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\ \text{V},$$



Σχήμα 1.23

και φαίνεται στο σχήμα (1.23β).

(β)

Ο πυκνωτής C θα φορτιστεί με σταθερά χρόνου

$$\tau = RC = 1\,\text{k}\Omega \times 50\text{pF} = 50\,\text{ns}$$

$$\Rightarrow \tau << 1\ \mu\text{s}.$$

Λόγω του οτι η αντίσταση των 100 kΩ είναι πολύ μεγάλη, το κύκλωμα συμπεριφέρεται ως ένας διαφοριστής και για $t \to \infty$ το $v_o(t)$ δίνεται από το διαιρέτη τάσης μεταξύ των αντιστάσεων των 100 kΩ και 1 kΩ.

$$v_o = \frac{1\ \text{k}\Omega}{100\ \text{k}\Omega + 1\ \text{k}\Omega} 10\ \text{V} = 0,1\ \text{V},$$

και η έξοδος φαίνεται στο σχήμα (1.23γ).

(γ)

Από το αποτέλεσμα του προβλήματος (1.13),

$$\tau = 165\ \text{ns}.$$

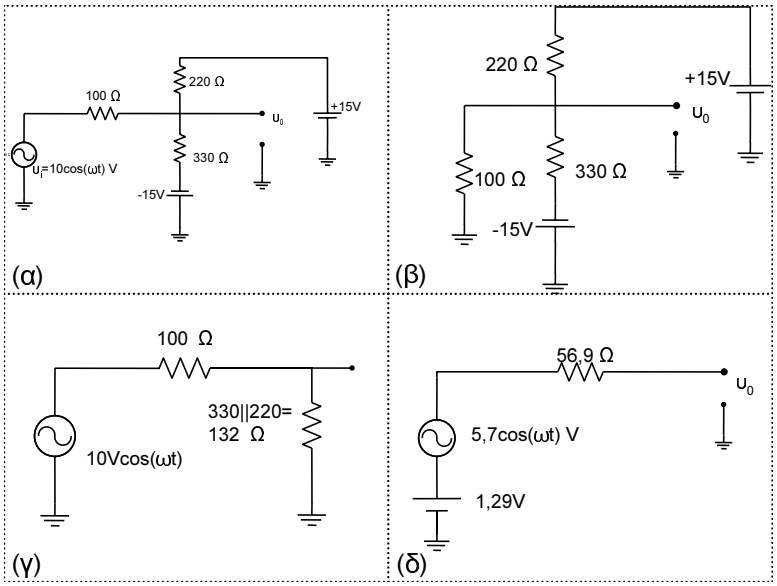
Η έξοδος φαίνεται στο σχήμα (1.23ε)

Πρόβλημα 1.17 Βρείτε το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin του κυκλώματος του σχήματος (1.24α):
Λύση:
Ξεχωρίζουμε τη συνεχή τάση από την εναλλασσόμενη.
(i) Βραχυκυκλώνουμε την AC πηγή τάσης, βλέπε σχήμα (1.24β).
(ii) Βρίσκουμε το DC ισοδύναμο Thevenin χρησιμοποιώντας τον πρώτο νόμο του Kirchhoff,

$$\frac{v-15}{220} + \frac{v+15}{330} + \frac{v-0}{100} = 0$$

$$\Rightarrow v = 1,29\ \text{V},$$

και η ισοδύναμη αντίσταση Thevenin είναι:



Σχήμα 1.24

$$R = 100//220//330 = 56,9\ \Omega.$$

(i) Βραχυκυκλώνουμε τη dc πηγή τάσης, βλέπε σχήμα (1.24γ)
(ii) Βρίσκουμε το ισοδύναμο Thevenin, όπου η ισοδύναμη τάση v είναι:

$$v = \frac{132}{232}\ 10\ \text{V} = 5,7\ \text{V},$$

και η ισοδύναμη αντίσταση R είναι:

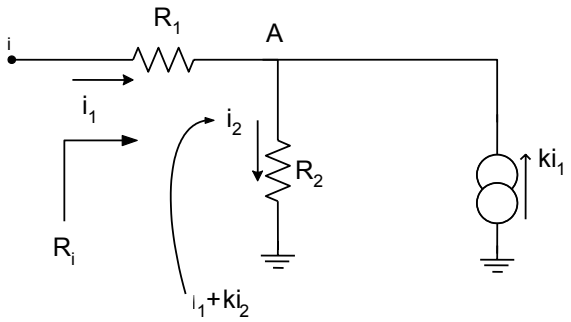
$R = 56,9\ \Omega$, όπως και στον προηγούμενο υπολογισμό.

Τελικά θα έχουμε το κύκλωμα του σχήματος (1.24δ).

Πρόβλημα 1.18 Να βρείτε την αντίσταση εισόδου:

$$R_i = \frac{v_i}{i_i}$$

του κυκλώματος του σχήματος (1.25). Για ποιά τιμή του k θα έχουμε ως αντίσταση εισόδου την αντίσταση R_1, δηλαδή $R_i = R_1$;



Σχήμα 1.25

Λύση:
Η τάση εισόδου v_i μπορεί να υπολογιστεί ως η πτώση τάσης στις αντιστάσεις R_1 και R_2:

$$\upsilon_i = i_i R_1 + i_2 R_2 = i_i R_1 + (i_i + k i_i) R_1,$$

διότι από τον πρώτο κανόνα του Kirchhoff στον κόμβο A τα ρεύματα θα έχουν:

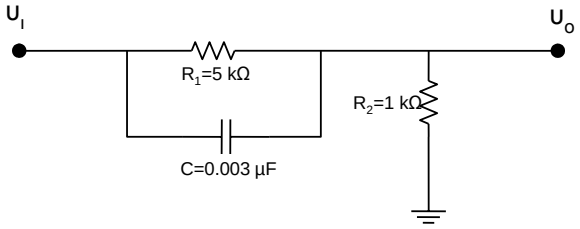
$$i_1 = i_2 - k i_1.$$

Επομένως, η αντίσταση εισόδου R_i θα είναι:

$$R_i = \frac{\upsilon_i}{i_i} = R_1 + R_2(1+k).$$

Προφανώς για $R_i = R_1$, θα πρέπει $k = -1$.

Πρόβλημα 1.19 Για το κύκλ ; ενίσχυσης (κέρδους) $\lg G$ ως συνάρτηση της συχνότητας f.



Σχήμα 1.26

Λύση:
Από το διαιρέτη τάσης του κυκλώματος το κέρδος θα είναι:

$$G = \frac{\upsilon_o}{\upsilon_i} = \frac{R_2}{R_1 || C + R_2} = \frac{R_2}{[R_1\,(1/(j\omega C))\,/\,(R_1 + 1/(j\omega C))] + R_2}$$

$$\Rightarrow G = \frac{R_2(1 + j\omega C R_1)}{R_1 + R_2 + j\omega C R_1 R_2}$$

$$\Rightarrow G = \frac{R_2(1 + j\omega C R_1)}{R_1 + R_2(1 + j\omega R_1 R_2/(R_1 + R_2))}.$$

Οι γωνίες συχνότητας είναι:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi C R_1},$$

και

$$f_2 = \frac{1}{2\pi C R_1 R_2/(R_1 + R_2)} = \frac{f_1}{R_2/(R_1 + R_2)}.$$

Παρατηρούμε οτι :

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1\,\mathrm{k\Omega}}{(5+1)\,\mathrm{k\Omega}} = \frac{1}{6}.$$

Επομένως, θα ισχύει $f_2 = 6 f_1$, όπου η συχνότητα:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi \times 0,003 \times 10^{-6} \times 5 \times 10^3}\,\mathrm{Hz} = 10,6\,\mathrm{kHz},$$

και

$$f_2 = 6 f_1 = 63,6\,\mathrm{kHz}.$$

Για $\omega \to 0$ παρατηρούμε οτι :

$$G \longrightarrow \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{6}$$

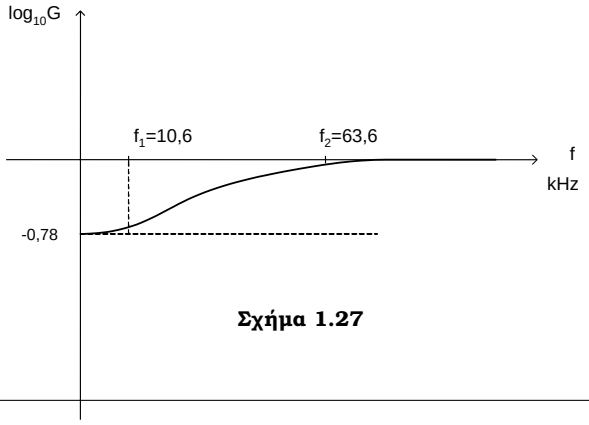
$$\Rightarrow \log_{10} G = -0,78,$$

ενώ για $\omega \to \infty$:

$$G \longrightarrow \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{j\omega R_1 C}{j\omega R_1 C R_2/(R_1 + R_2)} = 1.$$

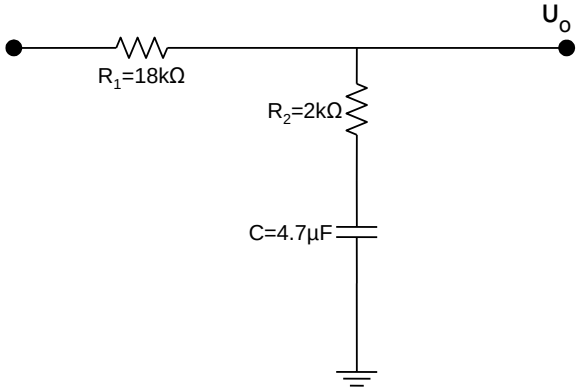
$$\Rightarrow \log_{10} G = 0.$$

Το διάγραμμα της ενίσχυσης ως συνάρτηση της συχνότητας φαίνεται στο σχήμα (1.27).



Σχήμα 1.27

Πρόβλημα 1.20 Για το κύκλωμα του σχήματος (1.28) δώστε ένα διάγραμμα της ενίσχυσης (κέρδους) $\log_{10} G$ ως συνάρτηση του $\log_{10} f$. Δώστε τις γωνίες συχνότητας του φίλτρου.



Σχήμα 1.28

Λύση:
Το κέρδος του κυκλώματος βρίσκεται από το διαιρέτη τάσης:

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{R_2 + Z_C}{R_1 + R_2 + Z_C},$$

όπου Z_C είναι η σύνθετη αντίσταση του πυκνωτή C, $Z_C = 1/j\omega C$. Επομένως:

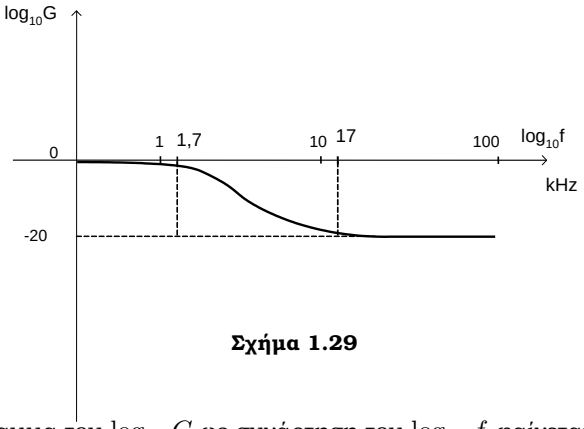
$$G = \frac{v_o}{v_i} = \frac{2\,k\Omega + 1/j\omega C}{18\,k\Omega + 2\,k\Omega + 1/j\omega C} = \frac{1 + j\omega(2\,k\Omega \times 4,7 \quad \mu F)}{1 + j\omega(20\,k\Omega \times 4,7 \quad \mu F)},$$

όπου οι γωνίες συχνότητας είναι:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi(2\,k\Omega \times 4,7\,\mu F)},$$

και

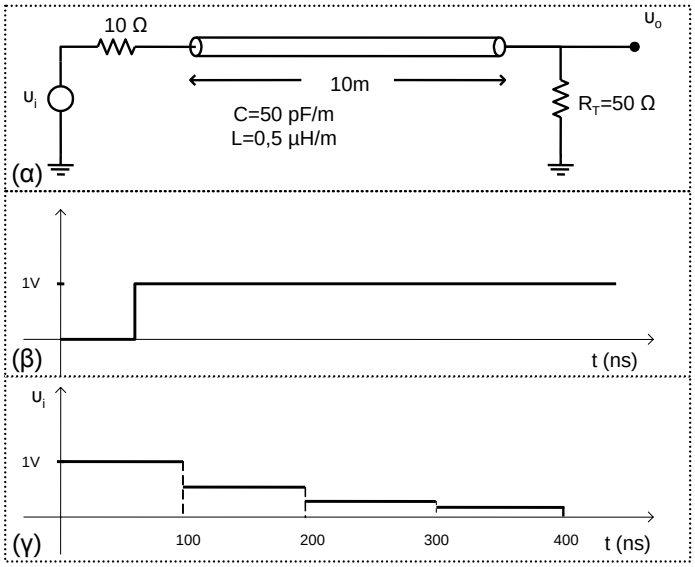
$$f_2 = \frac{1}{2\pi(20\,k\Omega \times 4,7\,\mu F)},$$



Σχήμα 1.29

δηλαδή $f_1 = 10f_2$. Το διάγραμμα του $\log_{10} G$ ως συνάρτηση του $\log_{10} f$ φαίνεται στο σχήμα (1.29).

Πρόβλημα 1.21 Το ομοαξονικό καλώδιο συνδέεται όπως φαίνεται στο κύκλωμα του σχήματος (1.30α). Το καλώδιο φέρει κατανεμημένη αυτεπαγωγή $L = 0,5$ μH/m και χωρητικότητα $C = 50$ pF/m. Για σήμα εισόδου υ_i του σχήματος (1.30β) βρείτε το σήμα εξόδου υ_o.



Σχήμα 1.30

Λύση:
Η χαρακτηριστική αντίσταση του ομοαξονικού καλωδίου είναι:

$$Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}} = 100\,\Omega.$$

Η ταχύτητα διάδοσης του σήματος είναι:

$$\upsilon = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2 \times 10^8\,\text{m/s}.$$

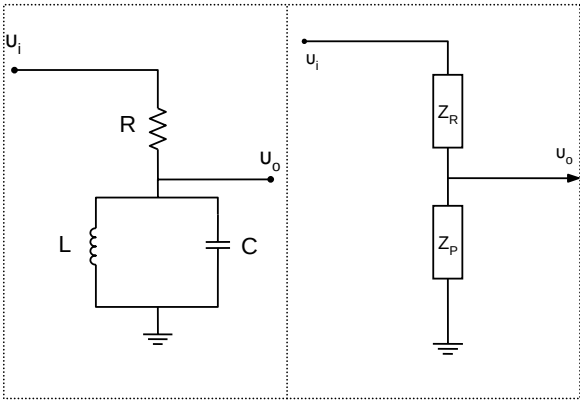
Επομένως, ο ολικός χρόνος διάδοσης του σήματος είναι:

$$t_r = \frac{2 \times \text{ μήκος καλωδίου}}{\upsilon} = 100\,\text{ns}.$$

Παρατηρούμε οτι η αντίσταση τερματισμού R_T είναι μικρότερη της χαρακτηριστικής αντίστασης του καλωδίου, επομένως θα έχουμε ανακλάσεις, όπως φαίνεται στο σχήμα (1.30γ). Το σήμα εξόδου υ_o θα βρεθεί από το διαιρέτη τάσης:

$$v_o = \frac{R_T}{Z_o + 10\ \Omega} v_i \cong \frac{v_i}{2}.$$

Πρόβλημα 1.22 Για το κύκλωμα του σχήματος (1.31) βρείτε την απόκριση συχνότητας $H(j\omega) = v_o(j\omega)/v_i(j\omega)$.



Σχήμα 1.31

Λύση:
Παρατηρούμε οτι το

$$Z_p = Z_L || Z_C = \frac{Z_L Z_C}{Z_L + Z_C}.$$

Από το διαιρέτη τάσης του σχήματος (1.31), έχουμε:

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{Z_p}{Z_p + Z_R} = \frac{Z_L Z_C/(Z_L + Z_C)}{Z_R + (Z_L Z_C)/(Z_L + Z_C)}$$

$$\Rightarrow \frac{v_o}{v_i} = \frac{Z_L Z_C}{Z_L Z_C + Z_R(Z_L + Z_C)},$$

όπου Z_L, Z_C είναι οι σύνθετες αντιστάσεις του πηνίου L και πυκνωτή C αντίστοιχα, δηλαδή $Z_L = j\omega L, \quad Z_C = 1/j\omega C$, οπότε η απόκριση συχνότητας είναι:

$$H(j\omega) = \frac{v_o}{v_i} = \frac{j\omega L/j\omega C}{j\omega L/(j\omega C) + jR\omega L + R/j\omega C}$$

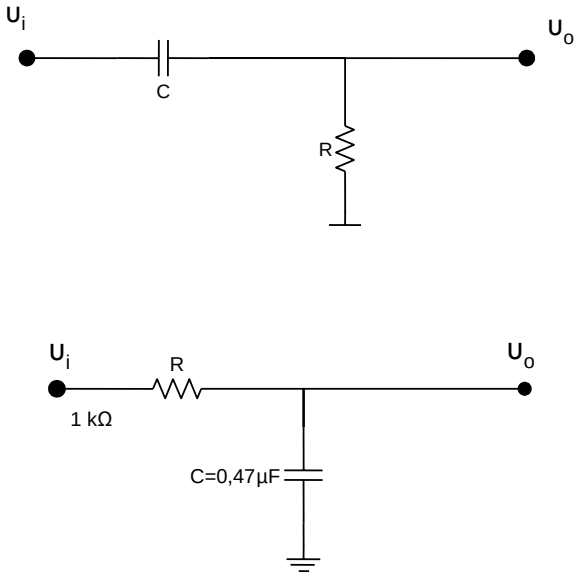
$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{j\omega L}{R - \omega^2 RLC + j\omega L}.$$

Πρόβλημα 1.23 Χρησιμοποιώντας μια αντίσταση 15 kΩ σχεδιάστε ένα υψιπερατό φίλτρο RC με συχνότητα καμπής 200 kHz. Βρείτε τη χωρητικότητα του πυκνωτή.
Λύση:
Το κύκλωμα του σχήματος (1.32) είναι ένα υψιπερατό φίλτρο με συχνότητα καμπής:

$$\omega_o = \frac{1}{RC}$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{R\omega_o}$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{(15 \times 10^3\ \Omega)(2\pi \times 200 \times 10^3\ \text{Hz})} = 53\,\text{pF}.$$



Σχήμα 1.33

Πρόβλημα 1.24 Για το βαθυπερατό φίλτρο RC του σχήματος (1.33) βρείτε τη συχνότητα ω για την οποία το σήμα εξόδου έχει μειωθεί κατά 10% , δηλαδή $v_o = 0,9v_i$.
Λύση:
Η απόκριση συχνότητας $G(j\omega)$ του κυκλώματος θα είναι:

$$G(j\omega) = \frac{\boldsymbol{V}_o}{\boldsymbol{V}_i} = \frac{Z_C}{Z_R + Z_C} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega RC}.$$

Από τη δεδομένη σχέση παίρνουμε:

$$|G(j\omega)| = \left|\frac{v_o}{v_i}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} = 0,9$$

$$\Rightarrow 0,81(1 + \omega^2 R^2 C^2) = 1$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{0,19}{0,81 R^2 C^2}}$$

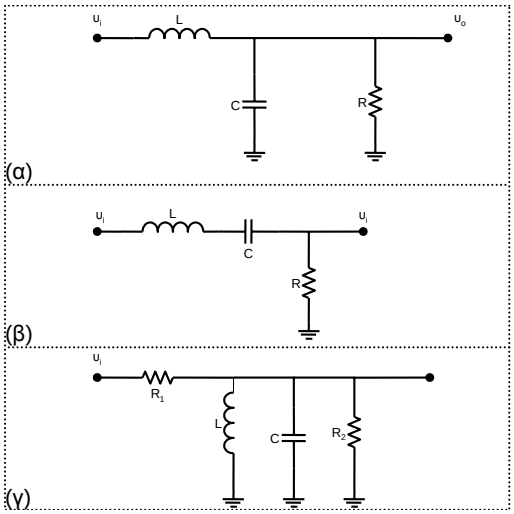
$$\Rightarrow \omega = 1030 \text{ rad/s}.$$

Πρόβλημα 1.25 Τί είδους φίλτρα είναι τα κυκλώματα του σχήματος (1.34); Είναι βαθυπερατά (Low-Pass), υψιπερατά (High-Pass), ζωνοπερατά (Band-Pass) ή ζωνοφρακτικά φίλτρα (Band-Stop ή notch);
Λύση:
Χωρίς πράξεις μπορείτε να δείξετε οτι έχουμε τα ακόλουθα φίλτρα:

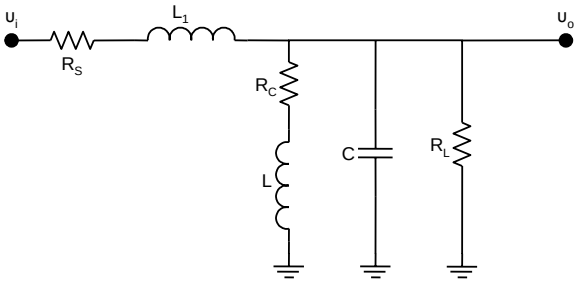
(α) βαθυπερατό. Παρατηρήστε οτι για $\omega \to \infty$, η τάση εξόδου $v_o \to 0$

(β) ζωνοπερατό. Παρατηρήστε οτι για $\omega \to 0$, η τάση εξόδου $v_o \to 0$ και για $\omega \to \infty$, $v_o \to 0$

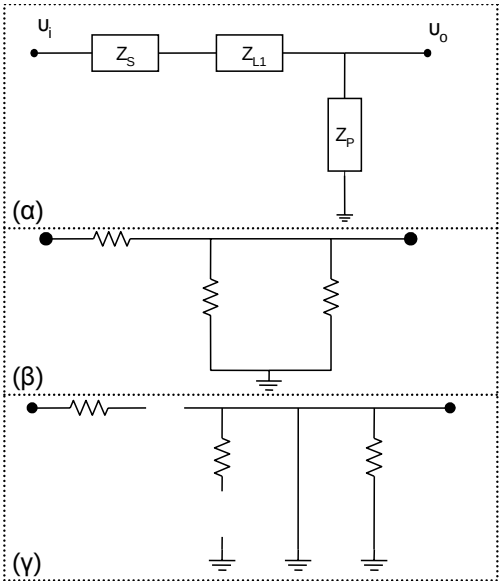
(γ) ζωνοφρακτικό. Παρατηρήστε οτι για $\omega = \omega_o$, η τάση εξόδου $v_o = 0$, $\omega = 1/\sqrt{LC}$.



Σχήμα 1.34



Σχήμα 1.35



Σχήμα 1.36

Πρόβλημα 1.26 Για το φίλτρο του σχήματος (1.35) βρείτε την απόκριση συχνότητας. Τί είδους φίλτρο είναι το κύκλωμα;
Λύση:
Το ισοδύναμο κύκλωμα φαίνεται στο σχήμα (1.36α). Παρατηρούμε οτι το διάγραμμα του σχήματος (1.36β) μας δίνει τις σχέσεις:

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{Z_{R_L}} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L + Z_{R_C}}, \tag{1.0.5}$$

$$G(j\omega) = \frac{\upsilon_o(j\omega)}{\upsilon_i(j\omega)} = \frac{Z_p}{Z_s + Z_{L_1} + Z_p}.$$

Η σχέση (1.0.5) μας δίνει

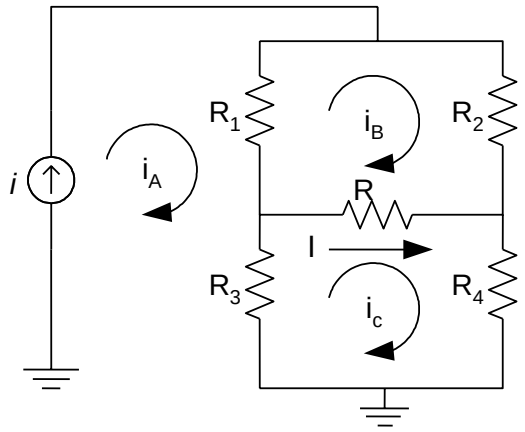
$$Z_p = \frac{(Z_{R_C} Z_C Z_{R_L}) + (Z_L Z_C Z_{R_L})}{Z_C Z_{R_L} + Z_{R_C} Z_{R_L} + Z_L Z_{R_L} + Z_C Z_{R_C} + Z_C Z_L},$$

όπου:

$$Z_C = \frac{1}{j\omega}, \quad Z_{R_C} = R_C, \quad Z_{R_L} = R_L, \quad Z_L = j\omega L, \quad Z_{L_1} = j\omega L_1.$$

Επομένως, η απόκριση συχνότητας θα βρεθεί με αντικατάσταση του Z_p στη σχέση (1.0.5). Επειδή αυτό ενέχει πολύπλοκες πράξεις, προτιμάμε ένα άλλο τρόπο για να βρούμε το είδος του φίλτρου. Μπορούμε να αναλύσουμε το κύκλωμα στα όρια του ω.
Δηλαδή για $\omega \longrightarrow 0$ το ισοδύναμο κύκλωμα είναι αυτό που φαίνεται στο σχήμα (1.36β).
Για $\omega \longrightarrow \infty$ το αντίστοιχο ισοδύναμο κύκλωμα απεικονίζεται στο σχήμα (1.36γ).
Επομένως, το φίλτρο είναι βαθυπερατό.

Πρόβλημα 1.27 Βρείτε το ρεύμα I του κυκλώματος του σχήματος (1.37) για $i = 1$ mA και για τις παρακάτω τιμές των αντιστάσεων: $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 0,5\,\Omega$, $R_3 = 0,25\,\Omega$, $R_4 = 1/3\,\Omega$, $R = 0,2\,\Omega$.



Σχήμα 1.37

Λύση:
Από τους βρόχους A, B, C έχουμε:

$$i_A = i, \tag{1.0.6}$$

$$i_B(R_1 + R_2 + R) - i_A R_1 - i_C R = 0, \tag{1.0.7}$$

και

$$i_C(R_3 + R_4 + R) - i_A R_3 - i_B R = 0. \tag{1.0.8}$$

Από τις εξισώσεις (1.0.6), (1.0.7) και (1.0.8) έχουμε:

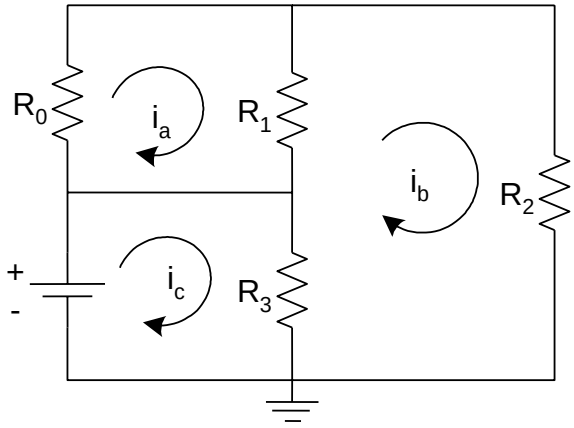
$$i_B = 0,645i,$$

$$i_C = 0,484i.$$

Επομένως:

$$I = i_C - i_B = -0,161 \text{ mA}.$$

Πρόβλημα 1.28 Υποθέτουμε οτι $R_0 = 2\,\Omega,\ R_1 = 2\,\Omega,\ R_2 = 5\,\Omega,\ R_3 = 4\,\Omega$ και $\upsilon_s = 24$ V στο κύκλωμα του σχήματος (1.38). Βρείτε τα i_a, i_b, και i_c, καθώς και τις τάσεις κατά μήκος κάθε αντίστασης.



Σχήμα 1.38

Λύση:
Από την εφαρμογή του δεύτερου κανόνα του Kirchhoff σε καθένα από τους βρόχους a, b, c , θα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} i_aR_0 + i_aR_1 - i_bR_1 = 0 \\ i_bR_2 + i_bR_3 + i_bR_1 - i_aR_1 - i_cR_3 = 0 \\ i_cR_3 - i_bR_3 - \upsilon_s = 0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} i_a(R_0 + R_1) + i_b(-R_1) = 0 \\ i_a(-R_1 + i_b(R_1 + R_2 + R_3) + i_c(-R_3) = 0 \\ i_cR_3 + i_b(-R_3) = \upsilon_s \end{array}\right.$$

Επιλύοντας το σύστημα των τριών εξισώσεων με αγνώστους τα ρεύματα κόμβων i_a, i_b, i_c, θα έχουμε:

$$i_a = 2\,\text{A}, \quad i_b = 4\,\text{A}, \quad i_c = 10\,\text{A}$$

Οπότε τελικά οι τάσεις στις αντιστάσεις είναι:

$$\upsilon_{R_0} = i_aR_0 = 4 \text{ V},$$

$$\upsilon_{R_1} = (i_0 - i_b)R_1 = 4 \text{ V},$$

$$\upsilon_{R_2} = i_bR_2 = 20 \text{ V},$$

$$\upsilon_{R_3} = (i_c - i_b)R_0 = 24 \text{ V}.$$

Πρόβλημα 1.29 Υποθέστε οτι η πηγή τάσης του κυκλώματος του σχήματος (1.38) αντικαθίσταται με μια πηγή ρεύματος $I_s = 12$ A. Εφαρμόζοντας τους κανόνες Kirchhoff , βρείτε τις τάσεις πάνω σε κάθε αντίσταση.
Λύση:
Με εφαρμογή του 2ου κανόνα του Kirchhoff και από τη συνθήκη του προβλήματος $(T_s) = 12$ A, θα έχουμε τρεις σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{l} i_aR_0 + i_aR_1 - i_bR_1 = 0 \\ i_bR_2 + i_bR_3 + i_bR_1 - i_aR_1 - i_cR_3 = 0 \\ i_c = I_s = 12\,\mathrm{A} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} i_a(R_0 + R_1) + i_b(-R_1) = 0 \\ i_a(-R_1 + i_b(R_1 + R_2 + R_3) + i_c(-R_3) = 0 \\ i_c = 12\,\mathrm{A} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 4i_a - 3i_b = 0 \\ -3i_a + 9i_b = 48 \end{array}\right.$$

$$i_a = 5,33\,A, \quad i_b = 7,11\,\mathrm{A}.$$

Επομένως, οι τάσεις πάνω στις αντιστάσεις θα είναι:

$$\upsilon_{R_0} = i_aR_0 = 5,33\ \mathrm{V},$$

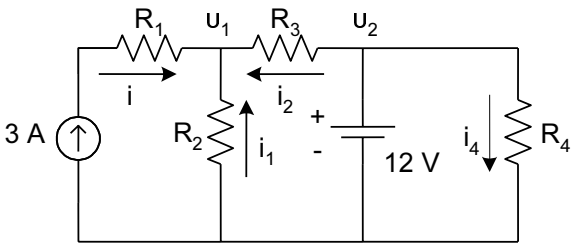
$$\upsilon_{R_1} = (i_a - i_0)R_1 = -5,33\ \mathrm{V},$$

$$\upsilon_{R_2} = i_bR_2 = 14,22\ \mathrm{V},$$

και

$$\upsilon_{R_3} = (i_c - i_b)R_0 = 19,56\ \mathrm{V}.$$

Πρόβλημα 1.30 Στο κύκλωμα του σχήματος (1.39) να βρείτε:
(α) τα ρεύματα i_1 και i_2.
(β) την ισχύ που παρέχεται από την πηγή ρεύματος των 3 A και από την πηγή τάσης των 12 V
(γ) την ολική καταναλισκόμεν
Θεωρήστε για το πρόβλημα:



Σχήμα 1.39

Λύση:
(α)

Με εφαρμογή του 1ου κανόνα του Kirchhoff για τον κόμβο 1, θα έχουμε:

$$-i - i_1 - i_2 = 0. \tag{1.0.9}$$

Επιπλέον, από το νόμο του Ohm για το δυναμικό υ_1 ισχύουν:

$$i_1 = -\frac{v_1}{R_2}, \quad i_2 = -\frac{v_1 - 12}{R_3}. \tag{1.0.10}$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (1.0.10) στην (1.0.9) θα έχουμε:

$$-i + \frac{v_1}{R_2} + \frac{v_1 - 12}{R_3} = 0$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{12R_2 + iR_2R_3}{R_2 + R_3} = 18 \text{ V}.$$

Επομένως:

$$i_1 = -\frac{18}{10} \text{ A} = -1,8 \text{ A},$$

$$i_2 = \frac{-18 - 12}{5} A = -1,2 \text{ A}.$$

(β)

Η προσφερόμενη ισχύς της πηγής ρεύματος είναι:

$$P = v_{3A} i, \quad \text{όπου} \quad v_{3A} = v_1 + iR_1.$$

Επομένως,

$$P = (v_1 + iR_1)i = 279 \text{ W},$$

και η προσφερόμενη ισχύς της μπαταρίας είναι:

$$P = (12 \text{ V}) i_{12V},$$

όπου

$$i_{12V} = i_2 + i_4 = -1,2 \text{ A} + \frac{12}{R_4} = 0,514 \text{ A}$$

$$\Rightarrow P = (12 \text{ V}) \times (0,514\, A) = 6,17 \text{ W}.$$

(γ)

Η ολική προσφερόμενη ισχύς είναι:

$$P_{o\lambda}^{\Pi} = (279\ W + 6,17\ W) = 285,17\ \Omega.$$

Ενώ η ολική καταναλισκόμενη ισχύς είναι:

$$P_{o\lambda}^{\kappa} = (3\, A)^2 \times (25\, \Omega) + (1,8\, A)^2 \times (10\, \Omega) + \frac{12^2 V}{7\, \Omega} = 285\ \Omega.$$

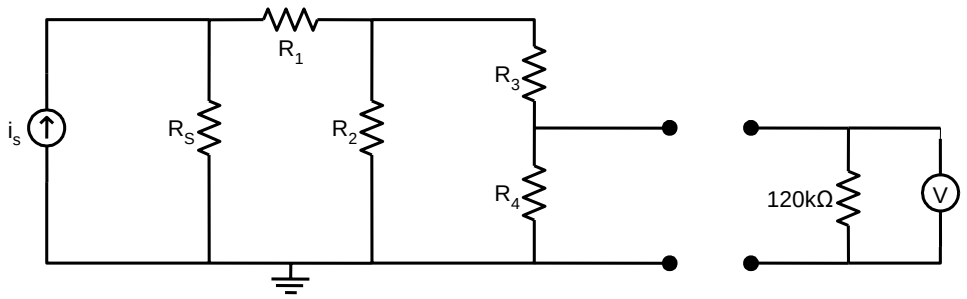
Τελικά έχουμε:

$$P_{o\lambda}^{\Pi} = P_{o\lambda}^{\kappa},$$

δηλαδή ισχύει το προφανές:

$$\text{καταναλισκόμενη ισχύς} \quad \equiv \quad \text{προσφερόμενη ισχύς}.$$

Πρόβλημα 1.31 Ένα βολτόμετρο χρησιμοποιείται για τη μέτρηση της τάσης στα άκρα μια αντίστασης του κυκλώματος του σχήματος (1.40). Το όργανο αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως αποτελούμενο από ένα ιδανικό βολτόμετρο και μια αντίσταση 120 kΩ τοποθετημένη παράλληλα προς αυτό. Έστω οτι θέλουμε να μετρήσουμε την τάση στα άκρα της R_4. Έστω επίσης οτι R_s =8 kΩ, R_1 =22 kΩ, R_2 = 50kΩ, R_3 =125 kΩ και i_s =120 mA. Βρείτε [illegible] ες τιμές:
(α) 100 Ω,
(β) 1 Ω,
(γ) 10 kΩ,
(δ) 100 kΩ.



Σχήμα 1.40

Λύση:
Το ρεύμα που διαρρέει την R_1 είναι:

$$i_{R_1} = i_s \frac{R_s}{R_s + R_1 + R_2||(R_3 + R_4)},$$

ενώ αυτό που διαρρέει την R_4:

$$i_{R_4} = i_{R_1} \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_4}.$$

Για την τάση στα άκρα της R_4 έχουμε:

$$v_{R_4} = i_{R_4} R_4$$

$$\Rightarrow v_R \quad [illegible] \quad R_s \quad [illegible] \quad R_2 \quad [illegible] \quad R_4 \Big].$$

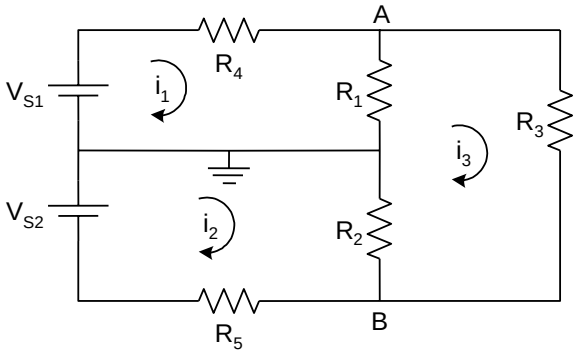
Οι τιμές του v_{R_4} φαίνονται σι

	με R_4	χωρίς R_4
α	3,08	3,09
β	30,22	30,47
γ	251,61	269,92
δ	940,90	1260,70

Σχήμα 1.41

Πρόβλημα 1.32 Στο κύκλωμα του σχήματος (1.42) τα ρεύματα σε κάθε κόμβο είναι:

$$i_1 = 5\,A, i_2 = 3\,A, i_3 = 7\,A.$$



Σχήμα 1.42

Βρείτε τα ρεύματα που διαρρέουν τις αντιστάσεις R_1, R_2 και R_3.
Λύση:
Για τον κόμβο A έχουμε:

$$i_1 - i_{R_1} - i_3 = 0 \Rightarrow i_{R_1} = i_1 - i_3$$

$$\Rightarrow i_{R_1} = -2\,\text{A}.$$

Για τον κόμβο B έχουμε:

$$i_3 - i_{R_2} - i_2 = 0$$

$$\Rightarrow i_{R_2} = i_3 - i_2 = 4\,\text{A}.$$

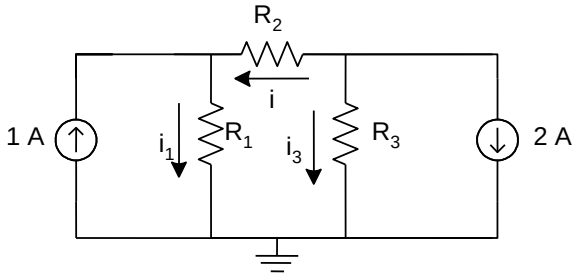
Επομένως, τα ρεύματα που διαρρέουν τις αντιστάσεις R_3 και R_4 αντίστοιχα είναι:

$$i_{R_3} = i_3 = 7\,\text{A},$$

$$i_{R_4} = i_1 = 5\,\text{A}.$$

Πρόβλημα 1.33 Για το κύκλωμα του σχήματος (1.43) να βρείτε τα ρεύματα i_1 και i_2, θεωρώντας :

$$R_1 = 3\,A, \quad R_2 = 1\,\Omega \quad \text{και}\, R_3 = 6\,\Omega.$$



Σχήμα 1.43

Λύση:
Έστω i είναι το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση R_2. Στον κόμβο 1 έχουμε:

$$1\,\mathrm{A} + i - i_1 = 0$$

$$\Rightarrow 1\,\mathrm{A} + \frac{(\upsilon_2 - \upsilon_1)}{R_2} - \frac{\upsilon_1}{R_1} = 0$$

$$\Rightarrow \upsilon_1(1 + 1/3) - \upsilon_2 = 1. \tag{1.0.11}$$

Στον κόμβο 2 έχουμε:

$$-2\,\mathrm{A} - i - i_3 = 0$$

$$\Rightarrow -2\,\mathrm{A} - \frac{(\upsilon_2 - \upsilon_1)}{R_2} - \frac{\upsilon_2}{R_3} = 0$$

$$\Rightarrow \upsilon_1 - \upsilon_2(1 + 1/6) = 2. \tag{1.0.12}$$

Από τις σχέσεις (1.0.11) και (1.0.12) έχουμε:

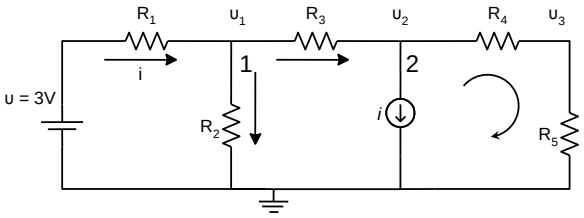
$$\upsilon_1 = -\frac{3}{2}\,\mathrm{V},$$

$$\upsilon_2 = -3\,\mathrm{V}.$$

Επομένως, τα ρεύματα $i_1,\ i_2$ είναι:

$$i_1 = \frac{\upsilon_1}{3} = -0,5\,\mathrm{A} \quad \text{και} \quad i_2 = 6\upsilon_2 = -0,5\,\mathrm{A}.$$

Πρόβλημα 1.34 Στο κύκλωμα :ε οτι: $R_1 = 0,5\ \Omega$, $R_2 = 0,5\ \Omega$, $R_3 = 0,25\ \Omega$, $R_4 = 0,5\ \Omega$,



Σχήμα 1.44

Λύση:
Στον κόμβο 1 έχουμε:

$$\frac{3 - \upsilon_1}{R_1} + \frac{0 - \upsilon_1}{R_2} + \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{R_3} = 0$$

$$\Rightarrow -\upsilon_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) + \frac{\upsilon_2}{R_3} = -\frac{3}{R_1}. \tag{1.0.13}$$

Στον κόμβο 2 έχουμε:

$$\frac{\upsilon_1 - \upsilon_2}{R_3} + \frac{0 - \upsilon_2}{R_4 + R_5} - i = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\upsilon_1}{R_3} - \upsilon_2\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4 + R_5}\right) = i \tag{1.0.14}$$

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (1.0.13) και (1.0.14) θα έχουμε:

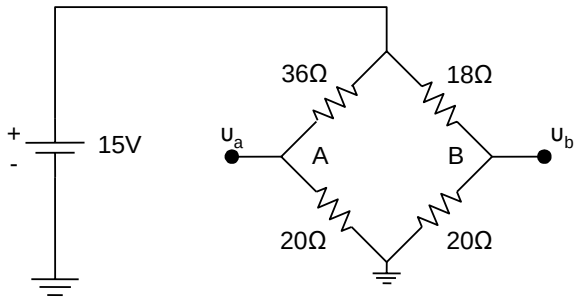
$$v_1 = 1,125\,\text{V},$$

$$v_2 = 0,75\,\text{V}.$$

Επομένως, το ρεύμα i είναι:

$$i = \frac{3 - v_1}{R_1} = \frac{1,875}{0,5} = 3,75\,\text{A}.$$

Πρόβλημα 1.35 Στο κύκλωμα του σχήματος (1.45) βλέπουμε μια γέφυρα Wheatstone. Βρείτε τα v_a, v_b και τη διαφορά δυναμικού $v_a - v$



Σχήμα 1.45

Λύση:
Στον κόμβο A:

$$\frac{15 - v_a}{36} - \frac{v_a}{20} = 0.$$

Στον κομβο B:

$$\frac{15 - v_b}{18} - \frac{v_b}{20} = 0.$$

Επιλύοντας τις δύο παραπάνω εξισώσεις για τις τάσεις v_a, v_b θα έχουμε:

$$\frac{15}{36} = v_a\left(\frac{1}{36} + \frac{1}{20}\right)$$
$$\Rightarrow v_a = 5,36\,\text{V},$$

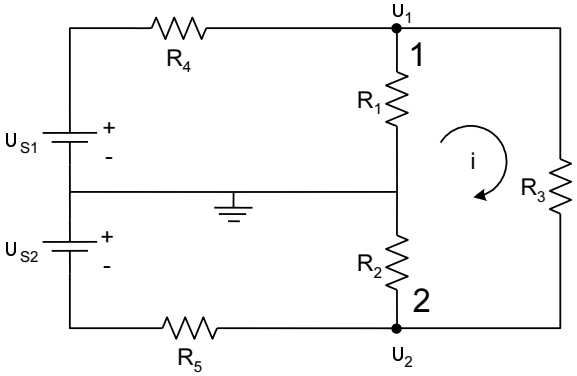
$$\frac{15}{18} = v_b\left(\frac{1}{18} + \frac{1}{20}\right)$$
$$\Rightarrow v_b = 7,89\,\text{V}.$$

Επομένως, η διαφορά δυναμικού είναι -2,53 V.

Πρόβλημα 1.36 Στο κύκλωμα του σχήματος (1.46) βρείτε τις τάσεις στα άκρα των αντιστάσεων R_1, R_2 και R_3. Θεωρήστε οτι:

$$V_{S_1} = V_{S_2} = 450\,V, \quad R_4 = R_5 = 0,25\,\Omega, \quad R_1 = 8\,\Omega, \quad R_2 = 5\,\Omega, \quad R_3 = 32\,\Omega.$$

Λύση:
Στον κόμβο 1 θα ισχύει:



Σχήμα 1.46

$$\frac{v_{S_1} - v_1}{R_4} - \frac{v_1}{R_1} - \frac{v_1 - v_2}{R_3} = 0$$

$$\Rightarrow v_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) - v_2 \left(\frac{1}{R_1} \right) = \frac{v_{S_1}}{R_4}. \tag{1.0.15}$$

Στον κόμβο 2 θα ισχύει:

$$\frac{v_1 - v_2}{R_3} - \frac{0 - v_2}{R_2} - \frac{v_2 - v_{S_2}}{R_5} = 0$$

$$\Rightarrow v_1 \left(\frac{1}{R_5} \right) + v_2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \right) = -\frac{v_{s_2}}{R_5}. \tag{1.0.16}$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1.0.15) και (1.0.16) ως προς τους αγνώστους v_1, v_2 , θα πάρουμε:

$$v_1 = 429,8\,\mathrm{V},$$

$$v_2 = -422,2\,\mathrm{V},$$

και προφανώς:

$$v_{R_3} = v_1 - v_2 = 852\,\mathrm{V}.$$

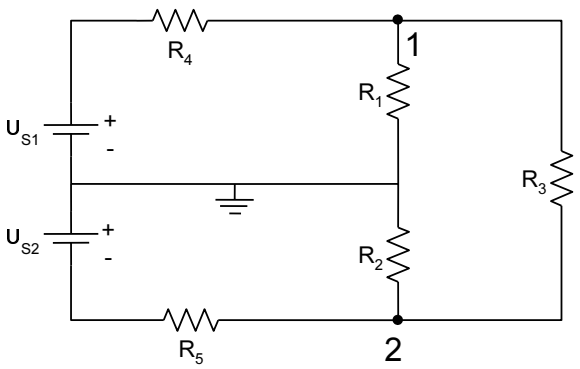
Πρόβλημα 1.37 Βρείτε το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin όπως φαίνεται από την αντίσταση R_3 στο κύκλωμα του σχήματος (1.47). Υπολογίστε την ισοδύναμη τάση Thevenin, V_{Th} (ανοιχτό κύκλωμα), και το ισοδύναμο ρεύμα I_N (βραχυκυκλωμένο κύκλωμα) όταν η αντίσταση φόρτου είναι η R_3. Θεωρήστε: $V_{S_1} = V_{S_2} = 450\,\mathrm{V}, R_1 = 7\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$, $R_4 = R_5 = 1\ \Omega$.
Λύση:
Η ισοδύναμη αντίσταση Thevenin R_{Th} βρίσκεται αφού βραχυκυκλώσουμε τις πηγές τάσεις v_{S_1}, v_{S_2} , όπως φαίνεται στο σχήμα (1.48α):

$$R_{Th} = R_1 || R_4 + R_2 || R_5$$

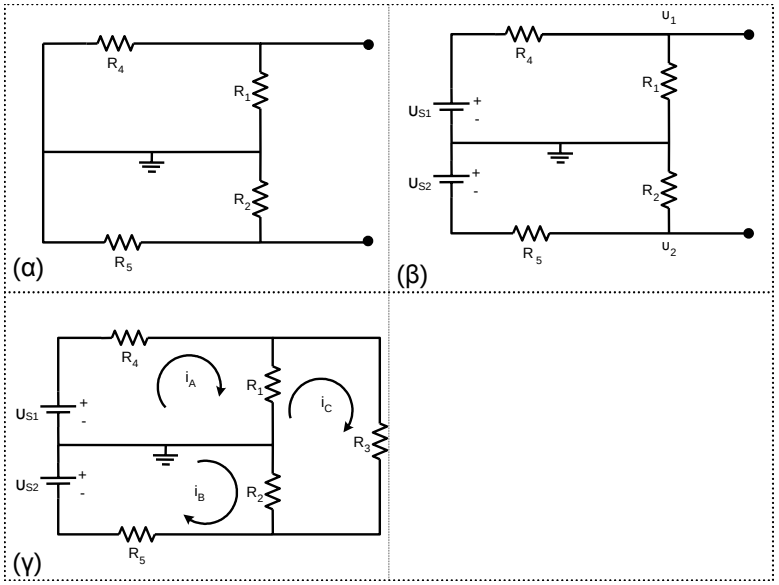
$$\Rightarrow R_{Th} = \frac{7 \times 1}{7 + 1} \frac{5 \times 1}{5 + 1} = 0,73\,\Omega.$$

Η ισοδύναμη τάση Thevenin V_{Th} θα είναι αυτή του (σχήματος (1.48β).
Στον κόμβο 1:

$$\frac{v_{S_1} - v_1}{R_4} - \frac{v_1}{R_1} = 0.$$



Σχήμα 1.47



Σχήμα 1.48

Στον κόμβο 2:

$$\frac{0-\upsilon_2}{R_2}-\frac{\upsilon_2-(-\upsilon_{S_1})}{R_5}=0.$$

Λύνοντας ως προς υ_1, υ_2 έχουμε:

$$\upsilon_1 = 393,75\,\mathrm{V}, \qquad \upsilon_2 = -375\,\mathrm{V}$$

Επομένως

$$V_{Th} = \upsilon_1 - \upsilon_2 = 768,75\,\mathrm{V}.$$

Το ισοδύναμο κύκλωμα Norton φαίνεται στο σχήμα (1.48γ). Για να βρούμε το ρεύμα του κυκλώματος εξετάζουμε τους βρόχους A, B, C.
Για το βρόχο A:

$$i_A(R_4+R_1)-i_C R_1-450=0.$$

Για το βρόχο B:

$$i_C(R_2+R_5)-i_C R_2-450=0.$$

Για το βρόχο C:

$$i_C(R_1+R_2)-i_A R_1-i_B R_2=0.$$

Έχουμε 3 εξισώσεις με αγνώστους i_A, i_B, i_C που μετά την επίλυση του συστήματος θα έχουμε:

$$i_c = I_N,$$

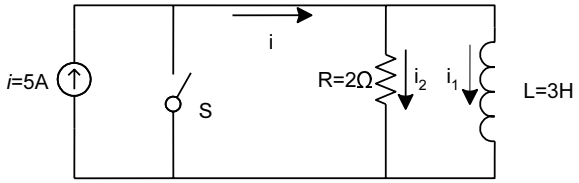
ή αλλιώς:

$$V_{Th} = I_N R_{Th}$$

$$\Rightarrow I_N = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} = \frac{768,75\,\mathrm{V}}{1,71\,\Omega}$$

$$\Rightarrow I_N = 450\,\mathrm{A}.$$

Πρόβλημα 1.38 Ο διακόπτ ι στο χρόνο $t = 0$. Βρείτε τις εντάσεις των ρευμάτων $i_1(t)$, ι



Σχήμα 1.49

Λύση:
Για το χρόνο $t = 0$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$L\frac{di_1}{dt} = Ri_2,$$

$$i_1 + i_2 = i.$$

Με εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace θα έχουμε:

$$L[sI_1(s) - I_1(0)] = RI_2(s), \tag{1.0.17}$$

$$I_1(s) + I_2(s) = I(s) = \frac{5}{s}, \tag{1.0.18}$$

όπου $I(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace του $i(t)$, κι εφόσον :

$$i(t) = 5 \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} 5/s,$$

$$i(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} I(s),$$

$$i_1(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} I_1(s),$$

και

$$i_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} I_2(s).$$

Λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων (1.0.17) και (1.0.18) ως προς $I_1(s)$, $I_2(s)$, θα έχουμε:

$$I_1(s) = \frac{10}{3s(s + 2/3)},$$

και

$$I_2(s) = \frac{5}{s + 2/3}.$$

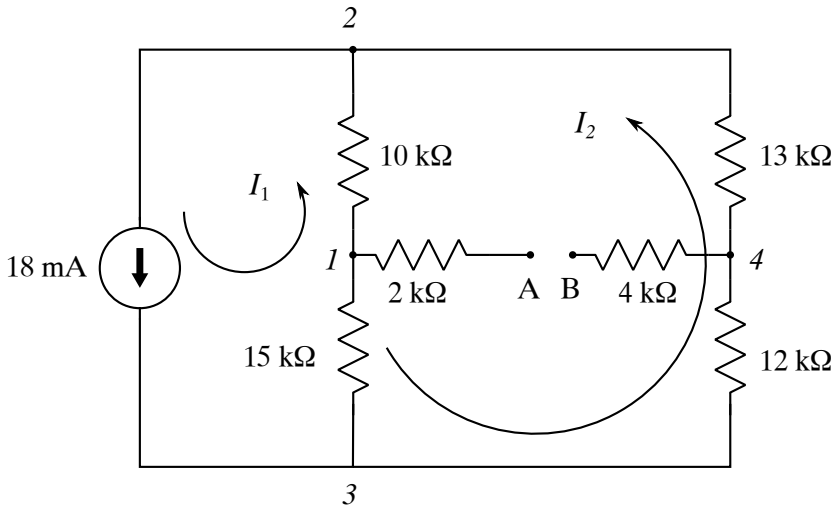
Αντιστρέφοντας τα $I_1(s), I_2(s)$ κατά Laplace θα έχουμε:

$$i_1(t) = 5\left(1 - e^{-(2/3)t}\right), \quad \text{για} \;\; t > 0$$

και

$$i_2(t) = 5e^{-(2/3)t}, \quad \text{για} \;\; t > 0.$$

Πρόβλημα 1.39 Να προσδιορίσετε το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin ως προς τους ακροδέκτες A, B για το κύκλωμα του σχήματος (1.50).



Σχήμα 1.50

Λύση:
Η ισοδύναμη τάση Thevenin θα βρεθεί υπολογίζοντας τη διαφορά δυναμικού $v_A - v_B$ για ενεργές πηγές. Θεωρούμε δύο ρεύματα βρόχων i_1, i_2, όπου ο κανόνας Kirchhoff των βρόχων θα είναι

$$i_1 = 18 \text{ mA},$$

$$i_2(10 + 15 + 13 + 12)\,\text{k}\Omega = i_1(10 + 15)$$
$$\Rightarrow i_2 = 9\,\text{mA}.$$

Επομένως, οι διαφορές δυναμικού θα είναι:

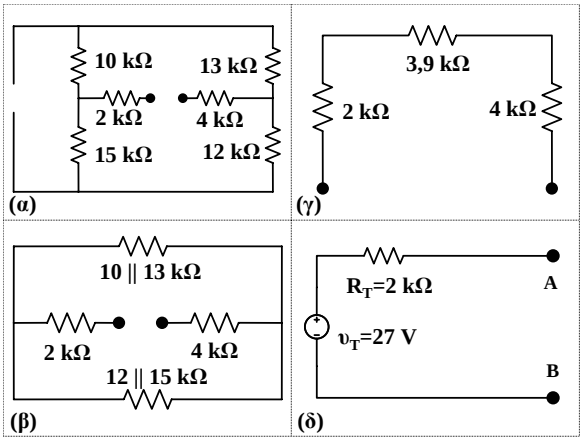
$$\begin{cases} v_1 - v_3 = (i_2 - i_1) \times 15\,\text{k}\Omega = -135\,\text{V} \\ v_3 - v_4 = i_2 \times 13\,\text{k}\Omega = 117\,\text{V} \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_1 - v_4 = 27\,\text{V}.$$

Επομένως, η ισοδύναμη τάση Thevenin είναι:

$$v_T = 27\,\text{V}.$$

Για την ισοδύναμη αντίσταση Thevenin θεωρούμε απενεργή πηγή ρεύματος, δηλαδή ανοικτή πηγή, επομένως ο προσδιορισμός της ισοδύναμης αντίστασης Thevenin θα βρεθεί ακολουθώντας τα βήματα του σχήματος (1.51). Τελικά, η αντίσταση Thevenin είναι:

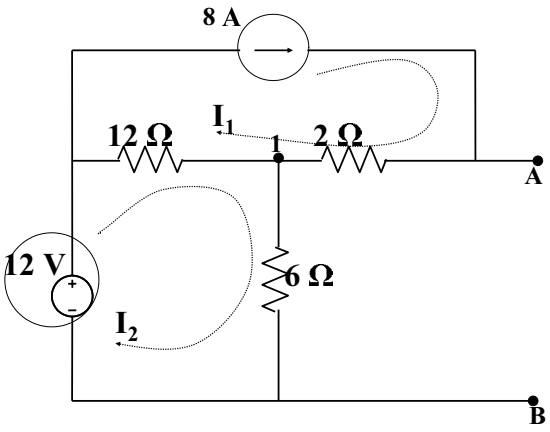


Σχήμα 1.51

$$R_T = \Big[(10\,\text{k}\Omega||13\,\text{k}\Omega)\Big|\Big|(12\,\text{k}\Omega||15\,\text{k}\Omega)\Big] + 2\,\text{k}\Omega + 4\,\text{k}\Omega = 9.1\,\text{k}\Omega,$$

όπως φαίνεται στο σχήμα (1.51δ)

Πρόβλημα 1.40 Να προσδιορίσετε το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin ως προς τους ακροδέκτες A, B για το κύκλωμα του σχήματος (1.52).



Σχήμα 1.52

Λύση:
Θεωρούμε δύο ρεύματα βρόχου, για τα οποία ισχύουν οι κανόνες του Kirchhoff που μας δίνουν:

$$\left.\begin{array}{l} i_1 = 8\ \text{A} \\ \\ i_2 \times (6\ \Omega + 12\ \Omega) - i_1 \times 12\ \Omega = 12\ \text{V} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$i_2 = 6\ \text{A},$$

επομένως οι διαφορές τάσης του σημείου 1 ως προς τα σημεία A και B θα είναι:

$$v_A - v_1 = i_1 \times 2\ \Omega = 16\ \text{V},$$

$$v_1 - v_B = i_2 \times 6\ \Omega = 36\ \text{V}.$$

Επομένως,

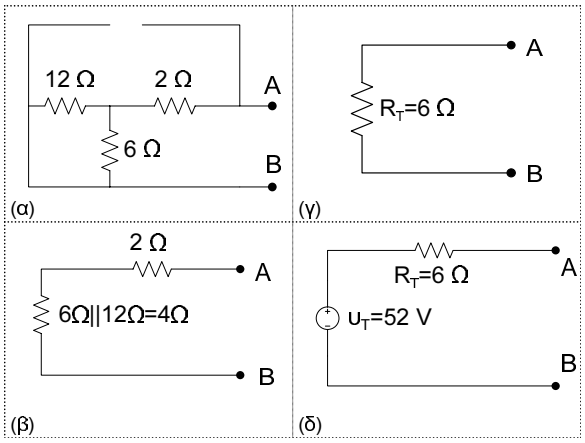
$$(v_A - v_1) + (v_1 - v_B) = 52\ \text{V}$$

$$\Rightarrow v_A - v_B = 52\ \text{V}.$$

Άρα η ισοδύναμη τάση Thevenin θα είναι:

$$v_T = 52\ \text{V}.$$

Η ισοδύναμη αντίσταση Thevenin θα βρεθεί αφού θεωρήσουμε ανοικτή πηγή ρεύματος και βραχυκυκλωμένη πηγή τάσης των 12 V, όπου τα διάφορα βήματα υπολογισμού της δίνονται στο σχήμα (1.53α,β,γ), όπου $R_T = (6\ \Omega || 12\ \Omega) + 2\ \Omega = 6\ \Omega$. Επομένως, το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin δίνεται στο σχήμα (1.53δ).



Σχήμα 1.53

Πρόβλημα 1.41 Το δικτύωμα του σχήματος (1.54α) αποτελείται από αντιστάσεις και επεκτείνεται ως το άπειρο. Ποιά είναι η ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος όπως φαίνεται από τους ακροδέκτες Α, Β. Όλες οι αντιστάσεις είναι ίδιου μεγέθους R.
Υπόδειξη: Η αντίσταση στα δεξιά των σημείων Α, Β είναι η ίδια με την αντίσταση στα δεξιά των σημείων Γ, Δ, εφόσον το δικτύωμα επεκτείνεται στο άπειρο.
Λύση:
Έστω R_{AB}, $R_{\Gamma\Delta}$. Επομένως, θα ισχύει το ισοδύναμο κύκλωμα του σχήματος (1.54β). Μπορούμε να γράψουμε για την αντίσταση R_{AB}:

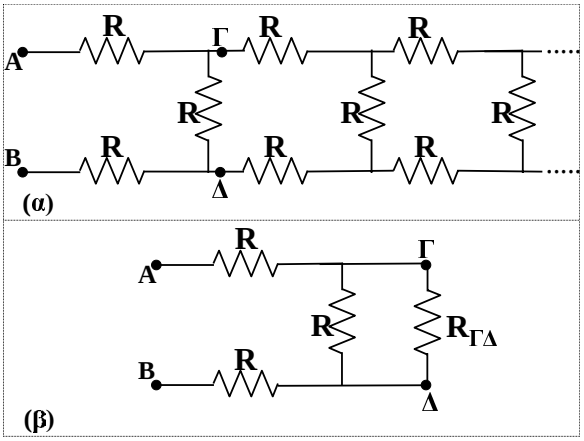
$$R_{AB} = R + R||R_{\Gamma\Delta} + R = 2R + R||R_{AB}$$

$$\Rightarrow R_{AB} = 2R + \frac{RR_{AB}}{R + R_{AB}}$$

$$\Rightarrow RR_{AB} + R_{AB}^2 = 2R^2 + 2RR_{AB} + RR_{AB}$$

$$R_{AB}^2 - 2RR_{AB} - 2R^2 = 0.$$

Οι ρίζες αυτού του τριωνύμου θα μας δώσουν τις τιμές του R_{AB}, δηλαδή:



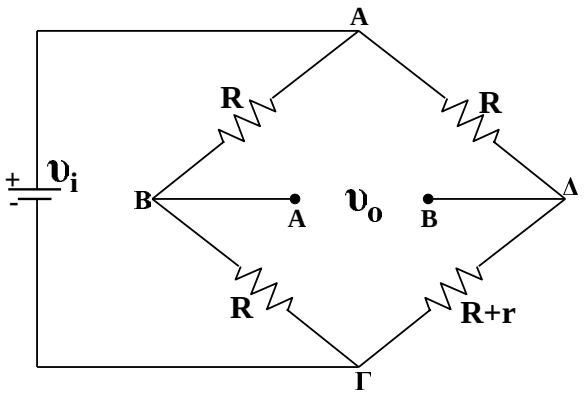
Σχήμα 1.54

$$R_{AB} = \frac{2R \pm \sqrt{4R^2 + 8R^2}}{2} = R\left(1 \pm \sqrt{3}\right).$$

Η θετική ρίζα είναι η φυσική αποδεκτή λύση για την αντίσταση R_{AB}, δηλαδή:

$$R_{AB} = R(1 + \sqrt{3}).$$

Πρόβλημα 1.42 Το κύκλωμα του σχήματος (1.55) δείχνει μια γέφυρα Wheatstone που συχνά χρησιμοποιείται για τη μέτρηση μικρών μεταβολών της αντίστασης (που αναφέρεται ως r στο παράδειγμά μας).
(α) Βρείτε μια έκφραση της εξόδου υ_o ως συνάρτηση των υ_i, R και r.
(β) Δείξτε οτι $\upsilon_o = 0$ για $r = 0$.
(γ) Αν $r \ll R$, δείξτε οτι το υ_o μεταβάλλεται γραμμικά με το r για γνωστά υ_i και R.



Σχήμα 1.55

Λύση:
(α)

Από τους διαιρέτες τάσης ΑΒΓ και ΑΔΓ έχουμε:

$$\upsilon_A = \frac{R}{2R}\upsilon_i, \quad \upsilon_B = \frac{R+r}{2R+r}\upsilon_i.$$

Επομένως, η τάση εξόδου υ_o θα έχει:

$$\upsilon_o = \upsilon_A - \upsilon_B = \upsilon_i\left(\frac{R+r}{2R+r} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \upsilon_o = \upsilon_i\frac{2R+2r-2R-r}{2(2R+r)} = \frac{\upsilon_i r}{2(2R+r)}.$$

(β)

Για $r = 0$ παρατηρούμε οτι το $\upsilon_o = 0$.

(γ)

$$\upsilon_o = \frac{\upsilon_i r}{2(2R+r)} = \frac{\upsilon_i}{4R}r\frac{1}{(1+r/2R)}$$

$$\Rightarrow \upsilon_o = \frac{\upsilon_i}{4R}r\left(1+\frac{r}{2R}\right)^{-1} = \frac{\upsilon_i r}{4R}\left(1-\frac{r^2}{2R^2}+\dots\right).$$

Για $r \ll R$ μπορούμε να αγνοήσουμε τους όρους με δυνάμεις μεγαλύτερες του 1:

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2, \left(\frac{r}{R}\right)^3, \dots$$

Επομένως, η τάση εξόδου υ_o θα είναι:

$$\upsilon_o = \left(\frac{\upsilon_i}{4R}\right)r.$$

Πρόβλημα 1.43 **(α)** Βρείτε τον τύπο του φίλτρου του κυκλώματος του σχήματος (1.56) χωρίς να κάνετε μαθηματικούς υπολογισμούς. Απλά βασιστείτε στη συμπεριφορά των διαφόρων στοιχείων του κυκλώματος σε χαμηλές και υψηλές συχνότητες.
(β) Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος:

$$H(j\omega) = \frac{\upsilon_0(j\omega)}{\upsilon_i(j\omega)},$$

και να επαληθεύσετε το ερώτημα (α).
Λύση:
(α)

Για χαμηλές συχνότητες ($\omega \to 0$) η σύνθετη αντίσταση του πηνίου είναι:

$$Z_L = j\omega L \to 0.$$

Επομένως βραχυκυκλώνεται με αποτέλεσμα το σήμα εξόδου να είναι μηδέν. Σε υψηλές συχνότητες ($\omega \to \infty$) η σύνθετη αντίσταση του πυκνωτή είναι:

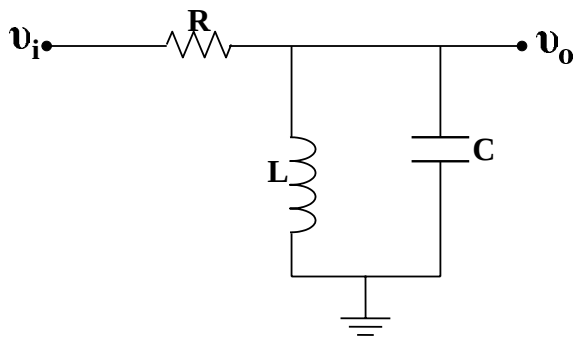
$$Z_C = 1/j\omega C \to 0,$$

επομένως ο πυκνωτής βραχυκυκλώνεται με αποτέλεσμα το σήμα εξόδου υ_o να τείνει στο μηδέν. Άρα η έξοδος είναι μηδέν για χαμηλές και υψηλές συχνότητες, επομένως αυτό είναι ένα ζωνοπερατό φίλτρο.

(β)

Από το διαιρέτη τάσης η συνάρτηση μεταφοράς θα έχει:

$$H(j\omega)\frac{\upsilon_o(j\omega)}{\upsilon_i(j\omega)} = \frac{Z_C||Z_L}{Z_C||Z_L + Z_R},$$



Σχήμα 1.56

όπου

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C}, \quad Z_L = j\omega L, \quad Z_R = R,$$

$$H(j\omega) = \frac{\dfrac{j\omega L/j\omega C}{(1/j\omega C) + j\omega L}}{\dfrac{j\omega L/j\omega C}{(1/j\omega C) + j\omega L} + R}$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{j\omega(L/R)}{-\omega^2 LC + j\omega\,(L/R) + 1}.$$

Για $\omega \to 0$ θα έχουμε: $H(j\omega) \to 0/1 = 0$, ενώ για $\omega \to \infty$ θα έχουμε:

$$H(j\omega) \to \frac{\dfrac{d}{d\omega}(j\omega L/R)}{\dfrac{d}{d\omega}(-\omega^2 LC + j\omega L/R + 1)}$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{jL/R}{-2\omega LC + jL/R} \to 0.$$

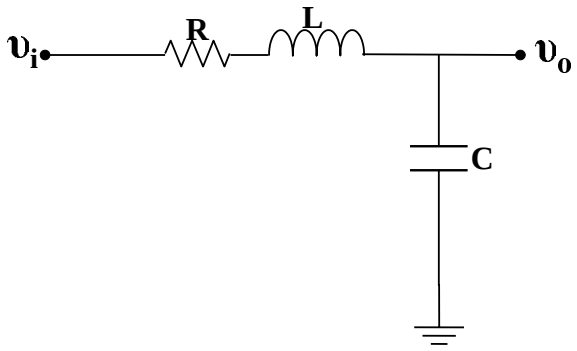
Πρόβλημα 1.44 **(α)** Βρείτε τον τύπο του φίλτρου του κυκλώματος του σχήματος (1.57) χωρίς να κάνετε μαθηματικούς υπολογισμούς. Απλά βασιστείτε στη συμπεριφορά των διαφόρων στοιχείων του κυκλώματος σε χαμηλές και υψηλές συχνότητες.
(β) Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος:

$$H(j\omega) = \frac{v_0(j\omega)}{v_i(j\omega)},$$

και να επαληθεύσετε το ερώτημα (α).
Λύση:
(α)

Στις χαμηλές συχνότητες ο πυκνωτής είναι ανοικτός ($Z_C = 1/j\omega C \to \infty$) και το πηνίο θα είναι βραχυκυκλωμένο ($Z_L = j\omega L \to 0$), άρα θα υπάρχει σήμα εξόδου v_o.
Στις υψηλές συχνότητες ο πυκνωτής είναι βραχυκυκλωμένος ($Z_C = 1/j\omega C \to 0$) επομένως αυτό το κύκλωμα είναι ένα βαθυπερατό φίλτρο.

(β)



Σχήμα 1.57

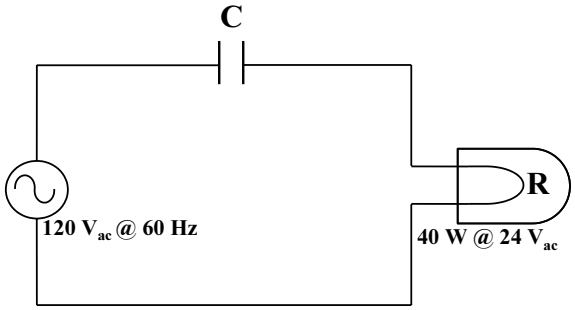
Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να βρεθεί από το διαιρέτη τάσης και θα είναι:

$$H(j\omega) = \frac{\upsilon_o(j\omega)}{\upsilon_i(j\omega)} = \frac{Z_C}{Z_C + Z_L + Z_R}$$

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{1/j\omega C}{R + j\omega L + 1/j\omega C} = \frac{1}{j - \omega^2 LC + j\omega CR + 1}.$$

Παρατηρούμε οτι η συνάρτηση μεταφοράς $H(j\omega)$ παίρνει τις ακόλουθες τιμές:
για $\omega \longrightarrow 0 \Rightarrow H(j\omega) = 1$, και
για $\omega \longrightarrow \infty \Rightarrow H(j\omega) = 0$,
δηλαδή είναι ένα βαθυπερατό φίλτρο.

Πρόβλημα 1.45 Το δικτύωμα του σχήματος (1.58) είναι ένα κύκλωμα που χρησιμοποιεί έναν πυκνωτή για να κατεβάσει τα 220 V εναλλασσόμενης τάσης συχνότητας 60 Hz (220 V_{ac} @ 60 Hz) στην τάση που απαιτείται για ένα λαμπτήρα πυρακτώσεως (ως μια αντίσταση). Να υπολογίσετε την απαιτούμενη χωρητικότητα του πυκνωτή για την τροφοδοσία ενός λαμπτήρα ισχύος 40 W @ 24 V_{ac}.



Σχήμα 1.58

Λύση:
Για 40 Watt στα 24 V_{ac} θα έχουμε:

$$I = \frac{P}{V} = \frac{40\ \text{W}}{24\ \text{W}} = 1,67\ \text{A}.$$

Ο λαμπτήρας συμπεριφέρεται ως μια αντίσταση:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{P}{I^2} = \frac{V^2}{P} = \frac{(24\ \text{V})^2}{40\ \text{W}} = 14,4\ \Omega.$$

Με όλα αυτά τα δεδομένα, το πρόβλημά μας θα μπορεί να παραφραστεί ως: "Ποιά τιμή της χωρητικότητας του πυκνωτή, όταν αυτός είναι σε σειρά με μια αντίσταση $R = 14,4\ \Omega$, θα αναγκάσει μια γεννήτρια των 120 V και συχνότητας 60 Hz να παρέχει ρεύμα 1,67 A; "
Η ισοδύναμη σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος θα είναι:

$$Z_{eq} = Z_C + Z_R = \frac{1}{j\omega C} + R.$$

Το ρεύμα είναι:

$$I = \frac{V_\gamma}{Z_{eq}},$$

όπου $V_\gamma = 220$ V. Επομένως, η ενεργός τιμή του ρεύματος είναι:

$$I = \frac{220\ \text{V}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2\pi f C}\right)^2 + R^2}}$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{220\pi}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{120}{I}\right)^2 - 14,4^2}}$$

$$\Rightarrow C = \left(\frac{1}{120\pi}\right)\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{220}{6,7}\right)^2 - 14,4^2}} \simeq 100\ \mu\text{F}.$$

Πρόβλημα 1.46 Επαναλάβατε το πρόβλημα 1.45 αντικαθιστώντας τον πυκνωτή με ένα ιδανικό πηνίο χωρίς αντίσταση.
Λύση:
Θα λύσουμε το πρόβλημα αυτό ακολουθώντας τα ίδια βήματα του προβλήματος (1.45), δηλαδή θα υπολογίσουμε το ρεύμα και την αντίσταση που απαιτείται για το λαμπτήρα, θα υπολογίσουμε την ολική σύνθετη αντίσταση, κλπ ..
Ένας άλλος τρόπος είναι να παρατηρήσουμε οτι η τάση στα άκρα της αντίστασης του λαμπτήρα και και η τάση στα άκρα του πηνίου έχουν διαφορά φάσης 90°:

$$V_g = IZ_{eq} = IR - Ij\omega L = |V_R| + k|V_C|.$$

Επομένως,

$$|V_g|^2 = |V_R|^2 + |V_L|^2$$

$$\Rightarrow |V_L|^2 = |V_g|^2 - |V_R|^2 \quad \text{και} \quad Z_L = \frac{V_L}{I_L},$$

όπου I_L είναι το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο και που προφανώς είναι:

$$I_L = I_R - I.$$

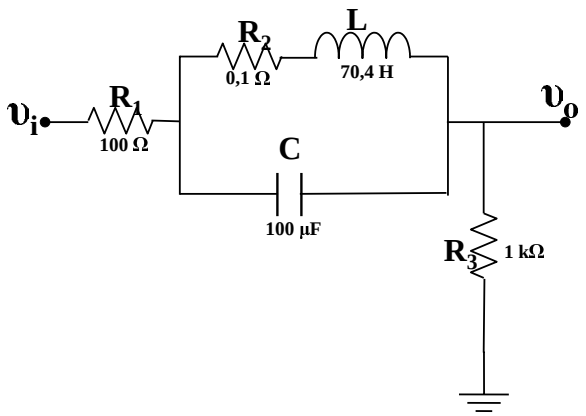
Η αυτεπαγωγή του πηνίου είναι:

$$L = \frac{|Z_L|}{\omega} = \frac{\sqrt{V_g^2 - V_R^2}}{I\omega}$$

$$\Rightarrow L = \frac{\sqrt{(240)^2 - (24)^2}}{1,67(120\pi)}\ \text{H}$$

$$\Rightarrow L \cong 0,2\ \text{H}.$$

Πρόβλημα 1.47 **(α)** Βρείτε τον τύπο του φίλτρου του κυκλώματος του σχήματος (1.59) χωρίς να κάνετε μαθηματικούς υπολογισμούς.
(β) Να βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος και να κατασκευάσετε με τη βοήθεια του MATLAB ένα γράφημα του $\log_{10}|H(j\omega)|$ ως συνάρτηση του λογάριθμου της συχνότητας. Θεωρήστε μια περιοχή συχνότητας στο διάστημα $\left[10^{-1}, 10^{4}\right]$ Hz.



Σχήμα 1.59

Λύση:
(α)

Είναι ένα ζωνοφρακτικό φίλτρο.

(β)

Από το διαιρέτη τάσης θα έχουμε:

$$\frac{\upsilon_o}{\upsilon_i} = \frac{R_3}{R_3 + R_1 + (R_2 + Z_L)||Z_C},$$

όπου η σύνθετη αντίσταση του παρονομαστή είναι:

$$R_1 + R_3 + (R_2 + Z_C)||Z_C$$

$$= \frac{-\omega^2 LC(R_1 + R_2) + j\omega[CR_2(R_1 + R_3) + L] + (R_1 + R_2 + R_3)}{-\omega^2 LCR_3 + j\omega CR_2R_3 + R_3}.$$

Επομένως, η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι:

$$H(j\omega) = \frac{\upsilon_o}{\upsilon_i}$$

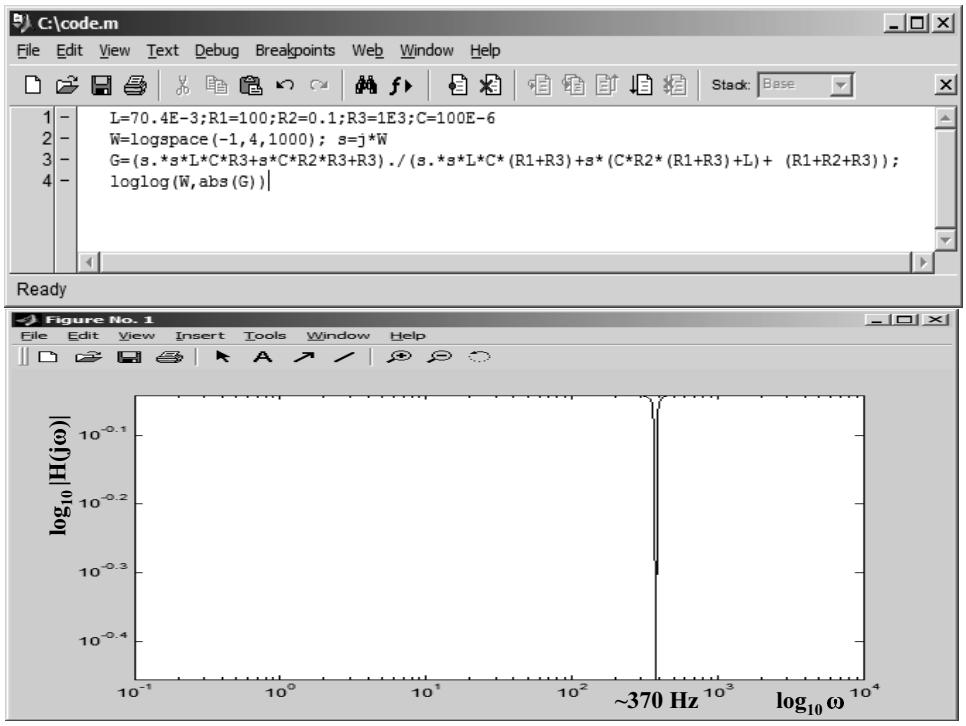
$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{-\omega^2 LCR_3 + j\omega CR_2R_3 + R_3}{-\omega^2 LC(R_1 + R_3) + j\omega[CR_2(R_1 + R_3) + L] + (R_1 + R_2 + R_3)}.$$

Το ζητούμενο γράφημα και ο κώδικας MATLAB απεικονίζονται στο σχήμα (1.60).

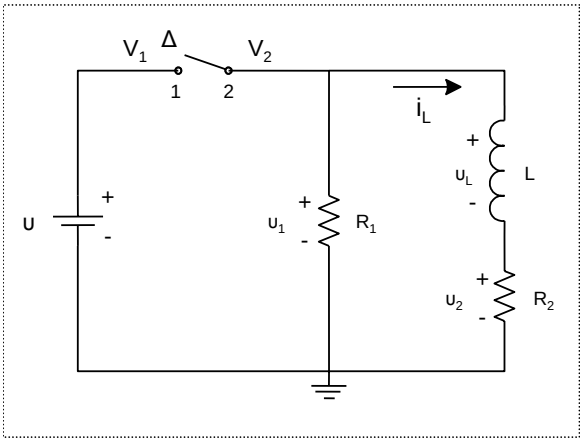
Πρόβλημα 1.48 Για το κύκλωμα του σχήματος (1.61):

$$\upsilon = 100 \text{ V},\ R_1 = 20\ \Omega,\ R_2 = 5\ \Omega,\ L = 10 \text{ H}.$$

Ο διακόπτης ανοίγει τη χρονική στιγμή $t = 0$. Να βρεθούν:



Σχήμα 1.60



Σχήμα 1.61

(α) Το $\frac{di_L}{dt}\Big|_{t=0_+}$
(β) Το $\upsilon_\Delta = V_1 - V_2$ για $t = 0_+$ (τάση στα άκρα του διακόπτη)
(γ) Ο ρυθμός μείωσης της ενέργειας του πηνίου για $t = 0_+$.
Λύση:
(α)

Έχουμε:

$$i_L = \frac{\upsilon}{R_2}\ , \quad \text{για } t \leq 0.$$

Το i_L είναι συνεχής συνάρτηση του χρόνου άρα:

$$i_L(0_-) = \frac{\upsilon}{R_2} = i_L(0_+) = \frac{100\ \text{V}}{5\ \Omega} = 20\ \text{A} = I_0.$$

Χρησιμοποιώντας το νόμο του Kirchhoff για τις τάσεις παίρνουμε:

$$L\frac{di_L}{dt} + i_L R_2 + i_L R_1 = 0.$$

Η διαφορική εξίσωση είναι ομογενής και άρα έχει λύση της μορφής $ke^{\rho t}$, όπου προφανώς:

$$\rho = -\frac{R_1 + R_2}{L}.$$

Άρα,

$$i_L(t) = ke^{-(R_1+R_2)t/L}.$$

Αφού $i_L(0_+) = I_0$, θα έχουμε

$$i_L(t) = I_0 e^{-(R_1+R_2)t/L}.$$

Επομένως,

$$\frac{di_L}{dt} = -I_0\frac{R_1 + R_2}{L}e^{-(R_1+R_2)t/L},$$

Για $t = 0_+$ έχουμε:

$$\frac{di_L(0_+)}{dt} = -I_0\frac{R_1 + R_2}{L},$$

οπότε

$$\frac{di_L(0_+)}{dt} = -20\frac{5 + 20}{10}\frac{\text{A}}{\text{s}} = -50\ \text{A/s}.$$

(β)

Το ρεύμα της R_1 έχει κατεύθυνση από κάτω προς τα πάνω, άρα η $V_2 = \upsilon_1$ είναι αρνητική:

$$V_2 = \upsilon_1 = -i_L R_1 = -I_0 R_1 e^{-(R_1+R_2)t/L},$$

και για $t = 0_+$,

$$\upsilon_1(0_+) = V_2 = -20 \times 20\ \text{V} = -400\ \text{V},$$

και επομένως

$$\upsilon_\Delta = [100 - (-400)]\ \text{V} = 500\ \text{V}.$$

(γ)

Προφανώς ο ρυθμός απώλειας ενέργειας του πηνίου βρίσκεται εύκολα, αφού:

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t).$$

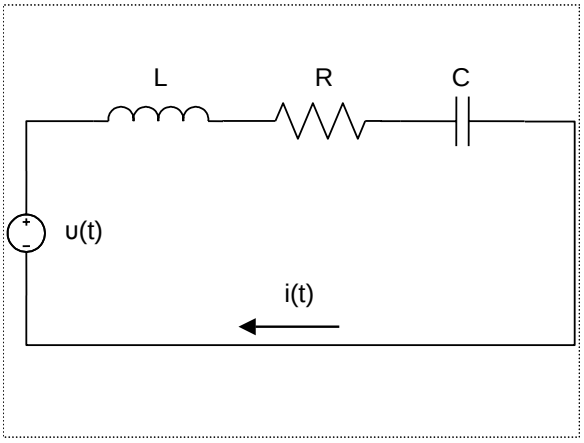
Έχουμε επομένως:

$$\frac{dW_L}{dt} = L i_L \frac{di_L}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dW_L(0_+)}{dt} = L I_0 \frac{di_L(0_+)}{dt}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dW_L}{dt}\right|_{(0_+)} = -10 \times 20 \times 50 \text{ J/s} = -10000 \text{ J/s}.$$

Πρόβλημα 1.49 Να βρεθεί το ρεύμα στο κύκλωμα του σχήματος (1.62), αν $\upsilon_t = \hat{\upsilon} \cos(\omega t + \phi)$.



Σχήμα 1.62

Λύση:
Ο φάσορας της τάσης είναι:

$$V = \hat{\upsilon} e^{j\phi_1},$$

όπου

$$\upsilon(t) = \mathcal{R}e[V e^{j\omega t}].$$

Η ολική μιγαδική εμπέδηση είναι:

$$Z = j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C},$$

όπου, όπως είναι γνωστό, ισχύουν:

$$Z_L = j\omega L, \quad Z_R = R, \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C}.$$

Επομένως,

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = |Z| e^{j\theta},$$

όπου

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad \text{και} \quad \theta = \arctan\left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)/R\right].$$

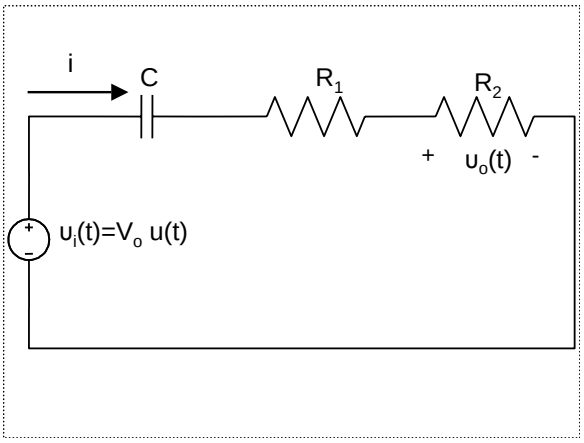
Ο φάσορας του ρεύματος είναι:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{\hat{v}}{|Z|}e^{j\phi_2},$$

όπου

$$\phi_2 = \phi_1 - \theta.$$

Πρόβλημα 1.50 Για το κύκλωμα του σχήματος (1.63), βρείτε την έξοδο, $v_o(t)$, για είσοδο $v_1(t) = V_o u(t),\ t > 0$, όπου $u(t)$ (ή $\theta(t)$) είναι η βηματική συνάρτηση ή συνάρτηση Heaviside. Θεωρήστε οτι δεν υπάρχει αρχική ενέργεια στο κύκλωμα.



Σχήμα 1.63

Λύση:
Η ολική μιγαδική (σύνθετη) αντίδραση (εμπέδηση) είναι:

$$Z = \frac{1}{sC} + R_1 + R_2,$$

επομένως:

$$I_s = \frac{V_1(s)}{Z} = \frac{V_1(s)}{\frac{1}{sC} + (R_1 + R_2)}.$$

Επιπλέον, έχουμε:

$$V_1(s) = V_0\mathcal{L}[u(t)] = V_0\frac{1}{s},$$

και επομένως

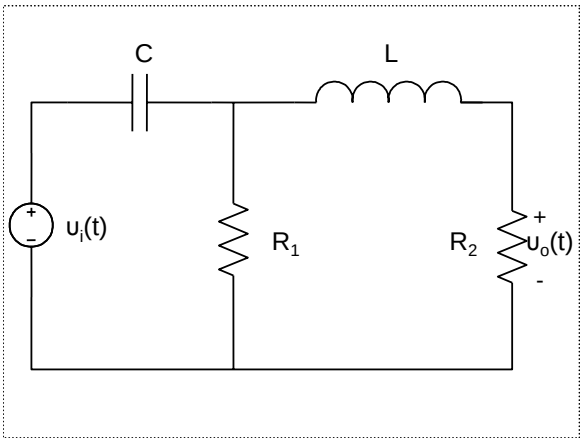
$$I(s) = \frac{V_0 C}{1 + (R_1 + R_2)Cs} = \frac{V_0/(R_1 + R_2)}{s + 1/(R_1 + R_2)C}$$

$$\Rightarrow V_0(s) = I(s)R_2 = \frac{V_0 R_2/(R_1 + R_2)}{s + 1/(R_1 + R_2)C}.$$

Από πίνακες βρίσκουμε οτι ο μετασχηματισμός Laplace της e^{-at} είναι $1/(s + a)$, οπότε:

$$V_o(s) \overset{\mathcal{L}^{-1}}{\longleftrightarrow} v_o(t) = \frac{V_0}{R_1 + R_2} R_2 e^{-t/[(R_1+R_2)C]}.$$

Πρόβλημα 1.51 Για το κύκλωμα του σχήματος (1.64), να βρεθεί η απόκριση σε κρουστική διέγερση. Δίνονται: $R_1 = R_2 = 1\ \Omega$, $L = 1$ H, $C = 1$ F.



Σχήμα 1.64

Λύση:
Από το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff έχουμε:

$$\frac{V_2(s) - V_1(s)}{1/sC} + \frac{V_2(s)}{R_1} + \frac{V_2(s)}{sL + R_2} = 0$$

$$\Rightarrow V_2(s) = \frac{sC}{sC + \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{sL + R_2}} V_1(s).$$

Από το διαιρέτη τάσης προκύπτει:

$$V_0(s) = \frac{R_2}{R_2 + sL} V_2(s) = \frac{sCR_2}{(sL + R_2)(sC + 1/R_1) + 1} V_1(s)$$

$$\Rightarrow \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = H(s) = \frac{sCR_2}{(sL + R_2)(sC + 1/R_1) + 1}.$$

Επομένως, από τα δεδομένα προκύπτει:

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 2}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{s}{(s - s_1)(s - s_2)},$$

όπου

$$s_1 = -1 + j \quad \text{και} \quad s_2 = -1 - j,$$

Όταν τα μεγέθη εισόδου-εξόδου αναφέρονται σε διαφορετικές θύρες, τότε η συνάρτηση $H(s)$ του κυκλώματος λέγεται συνάρτηση μεταφοράς. Αναλύουμε το $H(s)$ σε μερικά κλάσματα:

$$\frac{s}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{k_1}{s - s_1} + \frac{k_2}{s - s_2},$$

όπου

$$k_1 = \lim_{s \to s_1} [(s - s_1)F(s)] = \left. \frac{s}{s - s_2} \right|_{s=s_1},$$

και

$$k_2 = \lim_{s \to s_2} [(s - s_2)F(s)] = \left. \frac{s}{s - s_1} \right|_{s=s_2}.$$

Επομένως,

$$k_1 = \frac{s_1}{s_1 - s_2} = \frac{-1 + j}{-1 + j - (-1 - j)} = \frac{-1 + j}{2j} = \frac{1}{2}(1 + j),$$

και

$$k_2 = \frac{s_2}{s_2 - s_1} = \frac{-1 - j}{-1 - j - (-1 + j)} = \frac{-1 - j}{-2j} = \frac{1}{2}(1 - j).$$

Τελικά, η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$H(s) = \frac{1}{2}\frac{1 + j}{s - s_1} + \frac{1}{2}\frac{1 - j}{s - s_2},$$

και εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace παίρνουμε:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2}(1 + j)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s - s_1}\right] + \frac{1}{2}(1 - j)\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s - s_2}\right]$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2}(1 + j)e^{s_1(t)} + \frac{1}{2}(1 - j)e^{s_2(t)}$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2}(1 + j)e^{(-1+j)t} + \frac{1}{2}(1 - j)e^{(-1-j)t}$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{2}(1 + j)e^{-t}e^{jt} + \frac{1}{2}(1 - j)e^{-t}e^{-jt}$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{e^{-t}}{2}(\cos t + j\sin t + j\cos t - \sin t + \cos t - j\sin t - \cos t - \sin t)$$

$$\Rightarrow h(t) = e^{-t}(\cos t - \sin t).$$

Πρόβλημα 1.52 Να μελετηθεί το υψιπερατό φίλτρο του κυκλώματος του σχήματος (1.65).
Λύση:
Έχουμε τους φάσορες:

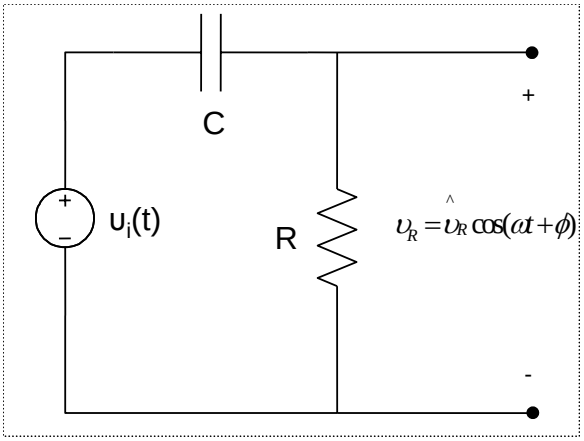
$$V = \hat{v}, \quad V_R = \hat{v}_R e^{j\phi}, \quad V_R = \frac{V}{1/(j\omega C) + R}R$$

Για τη συνάρτηση μεταφοράς (ή απολαβή, ή ενίσχυση, ή κέρδος) $H = H(j\omega)$ ισχύει:

$$H = \frac{V_R}{V} = \frac{R}{1/(j\omega C) + R} = \frac{1}{1 - j/\omega CR},$$

και

$$|H| = \frac{\hat{v}_R}{\hat{v}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2 R^2}}},$$



Σχήμα 1.65

$$H = \frac{V_R}{V} = \frac{1 + \dfrac{j}{\omega CR}}{1 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2 R^2}} R$$

$$\Rightarrow V_R = \frac{\hat{v}}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2 R^2}}} e^{j\phi},$$

όπου

$$\tan\phi = \frac{1}{\omega CR}$$

$$\Rightarrow \phi = \arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right).$$

Αν $\phi = 45^o$, τότε $\tan\phi = 1$.

$$1 = \frac{1}{\omega_b CR}$$

$$\Rightarrow \omega_b = \frac{1}{CR},$$

όπου η ω_b λέγεται κυκλική κρίσιμη συχνότητα ή κυκλική συχνότητα καμπής ή κυκλική συχνότητα γόνατος. Προφανώς, ισχύει:

$$H = \frac{1}{1 - j\omega_b/\omega} \quad \text{και} \quad |H| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega_b}{\omega}\right)^2}}.$$

Έχουμε:

$$|H|\big|_{\omega=\omega_b} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega_b}{\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707.$$

Όμως $A_{dB} = 20\log|H|$ και επομένως

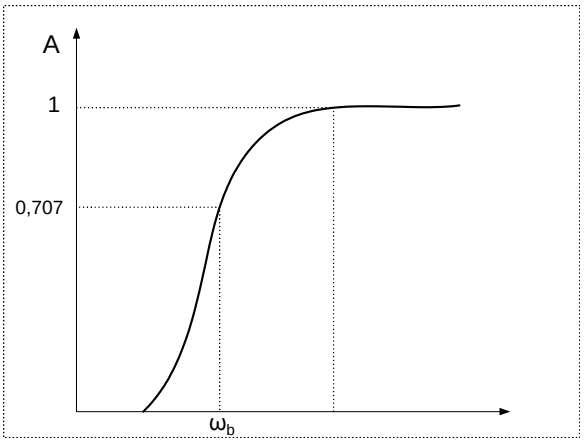
$$A_{db}(\omega_b) \simeq -3 \text{ dB}.$$

Εύκολα βρίσκουμε οτι,

$$|H| = \frac{\hat{\upsilon}_R}{\hat{\upsilon}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega_b}{\omega}\right)^2}} = \frac{\omega/\omega_b}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^2}},$$

και επομένως,

$$H = 20\log\left[\frac{\omega/\omega_b}{\left(1+(\omega/\omega_b)^2\right)^{1/2}}\right],$$



Σχήμα 1.66

$$\tan\phi = \frac{1}{\omega CR} = \frac{\omega_b}{\omega}.$$

$$\Rightarrow \phi = \arctan\frac{\omega_b}{\omega} = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\omega}{\omega_b}.$$

Ισχύει:

$$\lim_{\omega << \omega_b} A_{dB} \approx 20\log\frac{\omega}{\omega_b} = 20\log\omega - 20\log\omega_b.$$

Επομένως, η κλίση είναι:

$$\frac{dA_{dB}}{d\log\omega}\left(=\frac{\Delta A_{dB}}{\Delta\log\omega}\right) = 20\frac{\text{dB}}{\text{δεκαπλασιασμό συχνότητας}}.$$

Προφανώς το τελευταίο ισχύει διότι $\Delta\log\omega = 1$ σημαίνει δεκαπλασιασμό συχνότητας. Έυκολα προκύπτει οτι η κλίση είναι (περίπου):

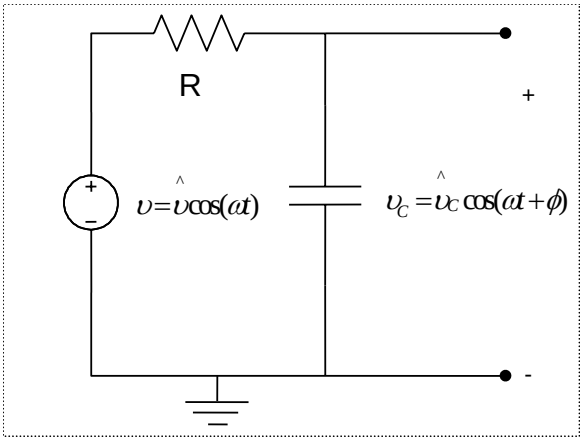
$$-6\frac{\text{dB}}{\text{οκτάβα (διπλασιασμό συχνότητας)}}.$$

Στην περίπτωση που η συνάρτηση μεταφοράς είναι της μορφής:

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 - j\omega_b/\omega},$$

όπου K πραγματική σταθερά (ίση με την απολαβή για $\omega = 0$), τότε μελετούμε τη συνάρτηση H′=H/K.

Πρόβλημα 1.53 Να μελετηθεί το βαθυπερατό φίλτρο του κυκλώματος του σχήματος (1.67).
Λύση:
Για τους φάσορες έχουμε:



Σχήμα 1.67

$$V = \hat{\upsilon},\ V_C = \hat{\upsilon}_C e^{j\phi},\ V_C = \frac{V}{R + 1/j\omega C}\frac{1}{j\omega C}.$$

Για τη συνάρτηση μεταφοράς $H = H(j\omega)$ έχουμε:

$$H = \frac{V_C}{V} = \frac{1}{1 + j\omega CR} = \frac{1 - j\omega CR}{1 + \omega^2 C^2 R^2}$$

$$\Rightarrow |H| = \frac{\hat{\upsilon}_C}{\hat{\upsilon}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}}$$

$$\Rightarrow \hat{\upsilon_C} = \hat{\upsilon}\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} e^{j\phi}.$$

Ισχύει $\tan\phi = -\omega CR$, άρα $\phi = \arctan(-\omega CR)$, οπότε όταν $\phi = -45^o$ ισχύει οτι $\omega_b CR = 1$. Επομένως,

$$\omega_b = \frac{1}{RC} \quad \text{(κρίσιμη κυκλική συχνότητα ή κυκλική συχνότητα καμπής ή γόνατος).}$$

Προφανώς, έχουμε:

$$H = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_b}},$$

$$\Rightarrow |H| = \frac{\hat{\upsilon}_C}{\hat{\upsilon}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_b}\right)^2}},$$

και η φάση είναι:

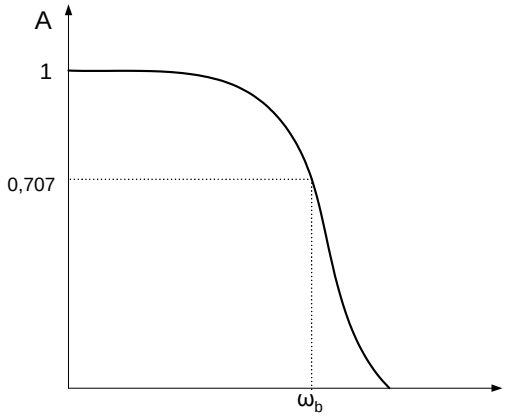
$$\tan\phi = -\frac{\omega}{\omega_b},$$

οπότε:

$$\phi = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_b}\right).$$

Επιπλέον,

$$A_{dB} = 20\log\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_b}\right)^2}}$$



Σχήμα 1.68

Όταν $\omega = \omega_b$ τότε $|H(j\omega_b)| = 1/\sqrt{2} \simeq 0,707$. Προφανώς αυτό σημαίνει μεταβολή κατά -3 dB, δηλαδή μείωση. Αν $\omega >> \omega_b$, τότε $A_{dB} \approx 20\log(\omega_b/\omega)$. Έχουμε, ανάλογα με τα προηγούμενα, κλίση -20 dB/δεκάδα ή (περίπου) -6 dB/οκτάβα.
Στην περίπτωση που η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega/\omega_b},$$

όπου K πραγματική σταθερά, τότε εξετάζουμε τη συνάρτηση $H' = H/K$.

Πρόβλημα 1.54 Ένα σήμα τάσης: $v(t) = \cos(\omega t)u(t)$ εφαρμόζεται σ¨ ένα κύκλωμα RC σε σειρά. Να δείξετε ότι το παραγόμενο ρεύμα είναι:

$$i(t) = \frac{R\omega^2C^2\cos(\omega t) - \omega C\sin(\omega t) + R^{-1}e^{-t/RC}}{1 + \omega^2C^2R^2}u(t).$$

Λύση:

Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέλη της σχέσης

$$v(t) = \cos(\omega t)u(t),$$

θα έχουμε:

$$V(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

Ως γνωστόν:

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)}$$

$$\Rightarrow I(s) = \frac{V(s)}{Z(s)} = \frac{1}{(R + 1/Cs)}\frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\Rightarrow I(s) = R^{-1}\frac{s^2}{(s + a)(s^2 + \omega^2)}, \qquad \text{όπου } a = \frac{1}{RC},$$

και η σύνθετη αντίσταση, $Z(s)$, του κυκλώματος θα είναι:

$$Z(s) = R + \frac{1}{Cs}.$$

Το ανάπτυγμα της $I(s)$ σε μερικά κλάσματα θα είναι :

$$I(s) = \frac{1}{R}\left[\frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+j\omega} + \frac{C}{s-j\omega}\right],$$

και προκύπτουν οι συντελεστές:

$$A = \frac{a^2}{a^2+\omega^2}, \qquad B = \frac{\omega}{2j(a-j\omega)}, \qquad C = -\frac{\omega}{2j(a+j\omega)}.$$

Παίρνοντας τον αντίστροφο LT , θα έχουμε:

$$\Rightarrow i(t) = \frac{1}{R}\left[Ae^{-at} + Be^{-j\omega t} + Ce^{-j\omega t}\right]u(t)$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{1}{R}\left[\frac{a^2}{a^2+\omega^2}e^{-at} + \frac{\omega}{2j(a-j\omega)}e^{-j\omega t} - \frac{\omega}{2j(a+j\omega)}e^{-j\omega t}\right]u(t)$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{1}{R}\left[\frac{a^2}{a^2+\omega^2}e^{-at} + \frac{\omega^2}{2(a^2+\omega^2)}\left(e^{-j\omega t} + e^{-j\omega t}\right) - \frac{a\omega}{2(a^2+\omega^2)}\left(e^{-j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)\right]u(t)$$

$$\Rightarrow i(t) = R^{-1}(a^2+\omega^2)^{-1}[a^2e^{-at} + \omega^2\cos\omega t - \omega a\sin\omega t]u(t)$$

$$\Rightarrow i(t) = (1+\omega^2C^2R^2)^{-1}\left[R^{-1}e^{-at} + R\omega^2C^2\cos\omega t - \omega C\sin\omega t\right]u(t).$$

Πρόβλημα 1.55 Μια εναλλασσόμενη τάση $v(t) = B\sin(\omega t)u(t)$ εφαρμόζεται σ¨ ένα κύκλωμα και το παραγόμενο ρεύμα είναι συνεχές, δηλαδή της μορφής $i(t) = Au(t)$.
Να βρείτε το κύκλωμα που μπορεί να δημιουργήσει το ρεύμα αυτό.
Λύση:

Αφού έχουμε συνεχές ρεύμα, ισχύει:

$$i(t) = Au(t).$$

Έστω ότι το κύκλωμα αποτελείται από ένα πηνίο L και ένα πυκνωτή C συνδεδεμένα παράλληλα. Επομένως, η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος θα είναι:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{sL} + Cs$$

$$\Rightarrow Z(s) = \frac{Ls}{LCs^2+1}.$$

Και κατά τα γνωστά :

$$V(s) = Z(s)I(s) = \left(\frac{Ls}{LCs^2+1}\right)\frac{A}{s}, \text{ αφού } \mathcal{L}[i(t)] = \mathcal{L}[u(t)] = \frac{A}{s}.$$

Επομένως, θα έχουμε:

$$V(s) = \left(\frac{1}{s^2+1/LC}\right)\frac{A}{C}$$

$$\Rightarrow V(s) = A\left(\frac{1/LC}{s^2+1/LC}\right)L.$$

Παίρνουμε τον αντίστροφο LT οπότε:

$$v(t) = AL\sin\left(\frac{t}{LC}\right)u(t).$$

Άρα το κύκλωμα που μπορεί να δημιουργήσει συνεχές ρεύμα είναι αυτό για το οποίο:

$$\omega = \frac{1}{LC},$$

και επομένως, η τάση $v(t)$ είναι:

$$v(t) = A\omega^{-1}C^{-1}sin(\omega t)u(t).$$

Πρόβλημα 1.56 Μια συνεχής τάση εφαρμόζεται σε ένα κύκλωμα που παράγει ένα εναλλασσόμενο ρεύμα

$$i(t) = \sin(\omega t)u(t)!$$

Να βρείτε το κύκλωμα που μπορεί να δημιουργήσει αυτό το εναλλασσόμενο ρεύμα, $i(t)$.
Λύση:

Έστω ότι το κύκλωμά μας αποτελείται από ένα πηνίο και ένα πυκνωτή σε σειρά. Τότε για την σύνθετη αντίσταση ή εμπέδηση $Z(s)$ ισχύει:

$$Z = Ls + \frac{1}{Cs}.$$

Κατά τα γνωστά :

$$V(s) = Z(s)I(s)$$

$$\Rightarrow V(s) = \left(Ls + \frac{1}{Cs}\right)\mathcal{L}\left[\sin(\omega t)u(t)\right]$$

$$\Rightarrow V(s) = \left(Ls + \frac{1}{Cs}\right)\frac{\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{LCs^2+1}{Cs(s^2+\omega^2)}\omega.$$

Αν $LC\omega^2 = 1$ τότε:

$$V(s) = \frac{1}{\omega CS} = \frac{\omega}{\omega^2 Cs} = \frac{L\omega}{s}.$$

Οπότε η συνεχής τάση που παράγει το δεδομένο εναλλασσόμενο ρεύμα $i(t)$ είναι:

$$v(t) = L\omega u(t), \quad \text{με } \omega^2 = \frac{1}{LC}.$$

Πρόβλημα 1.57 Να επιλύσετε, με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace, τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0,$$

με την αρχική συνθήκη $y(0^-) = a$, όπου a είναι μια σταθερά.
Λύση:

Θέλουμε να επιλύσουμε τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dy}{dx} + y(t) = 0.$$

Εφαρμόζουμε το LT :

$$sY(s) + Y(s) = 0 \Rightarrow (s+1)Y(s) = 0$$
$$\Rightarrow Y(s) = K\delta(s+1),$$

όπου η σταθερά K θα προσδιοριστεί από την αρχική συνθήκη του προβλήματος. Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο LT θα έχουμε:

$$y(t) = Ke^{-t},$$

όπου το $K = a$, διότι $y(0) = K = a$

$$\Rightarrow y(t) = ae^{-t}.$$

Πρόβλημα 1.58 Μια περιοδική τάση, $v(t)$, με περίοδο $T = 2a$, όπου η τάση $\hat{v}(t)$ σε μια περίοδο περιγράφεται από τη σχέση:

$$\hat{v}(t) = \begin{cases} V_0 & \text{για} \quad 0 < t < a, \\ -V_0 & \text{για} \quad a \le t < 2a \end{cases}$$

εφαρμόζεται σε ένα κύκλωμα RL σε σειρά. Να βρείτε το παραγόμενο ρεύμα, $i(t)$.
Λύση:

Από το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff για το κύκλωμα RL ισχύει:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = v(t).$$

Μετασχηματίζουμε σε Laplace οπότε έχουμε:

$$LsI(s) + RI(s) = V(s).$$

Όμως:

$$V(s) = \frac{V_0}{s}\tanh\left(\frac{as}{2}\right),$$

καθότι από την ιδιότητα του LT ενός περιοδικού σήματος θα έχουμε:

$$V(s) = \mathcal{L}\left[v(t)\right] = \frac{1}{1-e^{s2a}}\int_0^{2a}\hat{v}(t)dt$$

$$\Rightarrow V(s) = \frac{1}{1-e^{2as}}\left[\int_0^a V_0 e^{-st}dt + \int_a^{2a}(-V_0)e^{-st}dt\right]$$

$$\Rightarrow V(s) = \frac{1}{1-e^{s2a}}\left[\frac{V_0}{s}(1-e^{-sa}) - \frac{V_0}{s}(e^{-sa}-e^{-2as})\right]$$

$$\Rightarrow V(s) = \frac{V_0}{s}\frac{(1-e^{-as})^2}{(1-e^{-as})(1+e^{-as})}$$

$$\Rightarrow V(s) = \frac{V_0}{s}\frac{e^{as/2}-e^{-as/2}}{e^{as/2}+e^{-as/2}}$$

$$\Rightarrow V(s) = \frac{V_0}{s}\frac{\sinh(as/2)}{\cosh(as/2)}$$

$$\Rightarrow V(s) = \frac{V_0}{s}\tanh\left(\frac{as}{2}\right).$$

Εφαρμόζουμε τον αντίστροφο LT, για να βρούμε το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα:

$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{V_0}{s(R+Ls)}\tanh\left(\frac{as}{2}\right)\right],$$

όπου η σύνθεταη αντίσταση $Z = R + Ls$. Μετά από πράξεις:

$$i(t) = \frac{V_0}{R}e^{-Rt/L}\tanh\left(\frac{aR}{2L}\right) + \frac{2V_0}{\pi L}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left((2n-1)^{\pi t/a} - \varphi_n\right)}{(2\pi-1)\sqrt{a^2R^2+(2n-1)^2\pi^2L^2}},$$

όπου η γωνία φάσης φ_n είναι:

$$\varphi_n = \tan^{-1}\left[(2n-a)^{\pi L/aR}\right].$$

Πρόβλημα 1.59 Να βρείτε τον αντίστροφο LT:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+2}{s(s+3)(s+1)^2}\right].$$

Λύση:

Αναλύουμε σε μερικά κλάσματα:

$$\frac{(s+2)}{s(s+3)(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} + \frac{\Gamma}{(s+1)^2} + \frac{\Delta}{s+1},$$

απ'οπου βρίσκουμε:

$$A = sF(s)\Big|_{s=0} = \frac{2}{3},$$

$$B = (s+3)F(s)\Big|_{s=-3} = \frac{1}{12},$$

$$\Gamma = (s+1)^2F(s)\Big|_{s=-1} = -\frac{1}{2},$$

$$\Delta = \frac{d}{ds}\left[\frac{s+2}{s(s+3)}\right]\Big|_{s=-1} = -\frac{3}{4}.$$

Οπότε, με τον αντίστροφο LT :

$$f(t) = \frac{2}{3} + \frac{1}{12}e^{-3t} - \frac{1}{2}\left(t + \frac{3}{2}\right)e^{-t}.$$

Πρόβλημα 1.60 Να δείξετε ότι:

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)e^{-at}\right] = aF(a^2 + as),$$

όπου:

$$f(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} F(s).$$

Λύση:

Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace ισχύει:

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)e^{-at}\right] = \int_0^\infty f\left(\frac{t}{a}\right)e^{-at}e^{-st}dt$$

$$= \int_0^\infty f\left(\frac{t}{a}\right)e^{-(a+s)t}dt = a\int_0^\infty f(\tau)e^{-(a+s)a\tau}d\tau \ \ (\text{με } \frac{t}{a} = \tau)$$

$$= a\int_0^\infty f(\tau)e^{-(a+s)a\tau}d\tau = aF\Big(a(a+s)\Big) = aF(a^2 + as).$$

Πρόβλημα 1.61 Να δείξετε ότι:

$$\mathcal{L}\left[Ei(t)\right] = \frac{\ln(s+1)}{s}, \qquad \mathcal{L}\left[Ci(t)\right] = \frac{\ln(s^2+1)}{2s}, \qquad \mathcal{L}\left[Si(t)\right] = \frac{1}{s}\tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right),$$

όπου, $Ei(t), Ci(t)$, και $Si(t)$ είναι το εκθετικό ολοκλήρωμα, το ολοκλήρωμα συνημιτόνου και ημιτόνου αντίστοιχα.
Λύση:

Για το $Ei(t)$ έχουμε:

$$\mathcal{L}[Ei(t)] = \mathcal{L}\left[\int_t^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau}d\tau\right],$$

θέτουμε:

$$f(t) = \int_t^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau}d\tau \Rightarrow tf'(t) = -e^{-t}.$$

Εφαρμόζουμε LT:

$$-\frac{d}{ds}\left[sF(s) - f(0)\right] = -\frac{1}{1+s}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}\Big(sF(s)\Big) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow d\left[sF(s)\right] = \frac{ds}{s+1}$$

$$\Rightarrow sF(s) = \ln(s+1) + c.$$

Από το θεώρημα της τελικής τιμής θα έχουμε:

$$\lim_{s\to 0}[sF(s)] = \lim_{s\to 0}[\ln(s+1)+c] = \lim_{t\to\infty} f(t) = 0,$$

διότι:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \int_{\infty}^{\infty} \frac{e^{-\tau}}{\tau} = 0.$$

Επομένως:

$$c = 0 \Rightarrow sF(s) = \ln(s+1)$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{\ln(s+1)}{s}.$$

Για το $Ci(t)$ έχουμε :

$$Ci(t) = \int_{t}^{\infty} \frac{\cos\tau}{\tau} d\tau = f(t)$$

$$\Rightarrow f'(t)t = -\cos t.$$

Εφαρμόζουμε LT:

$$-\frac{d}{ds}[sF(s) - f(0)] = \frac{-s}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{ds}\Big(sF(s)\Big) = \frac{s}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow sF(s) = \frac{1}{2}\ln(s^2+1) + c,$$

αλλά από το θεώρημα της τελικής τιμής θα έχουμε:

$$\lim_{s\to 0}[sF(s)] = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{2}\ln(s^2+1)+c\right],$$

αλλά προφανώς:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$$

$$\Rightarrow c = 0$$

$$\Rightarrow sF(s) = \frac{1}{2}\ln(s^2+1)$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{\ln(s^2+1)}{2s}.$$

Για το $Si(t)$:

$$f(t) = \int_{0}^{t} \frac{\sin\tau}{\tau} d\tau$$

$$\Rightarrow tf'(t) = t\sin t$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{ds}[sF(s) - f(0)] = \frac{1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow sF(s) = -\tan^{-1}(s) + c = 0,$$

διότι από το θεώρημα της αρχικής τιμής θα έχουμε:

$$\lim_{s\to\infty}[sF(s)] = \lim_{t\to 0} f(t) = f(0) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{s\to\infty}[-\tan^{-1}(s) + c] = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} + c = 0$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{2}.$$

Επομένως θα έχουμε:

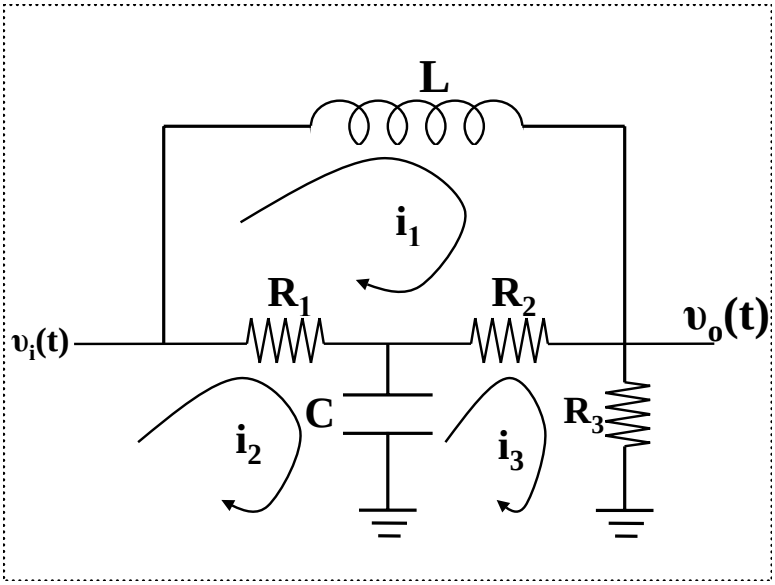
$$sF(s) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(s) = tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{\tan^{-1}(1/s)}{s}.$$

Πρόβλημα 1.62 Να βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς, $H(s) = V_o(s)/V_i(s)$, του κυκλώματος του σχήματος (1.69), όπου

$$v_i(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} V_i(s), \qquad v_o(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} V_o(s).$$

Θεωρήστε μηδενικές αρχικές συνθήκες.



Σχήμα 1.69

Λύση:

Από το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff για τους τρεις βρόχους του κυκλώματος:

$$v_i(t) = i_1 R_1 + \frac{1}{C}\int i_1(t)dt - R_1 i_2 - \frac{1}{C}\int i_3(t)dt \tag{1.0.19}$$

$$0 = R_1 i_2(t) + R_2 i_2(t) + L\frac{di_2}{dt} - R_1 i_1 - R_2 i_3 \tag{1.0.20}$$

$$0 = \frac{1}{C}\int i_3(t)dt - \frac{1}{C}\int i_1(t)dt + R_2 i_3(t) - R_2 i_2(t) + R_3 i_3(t) \tag{1.0.21}$$

$$v_0 = R_3 i_3(t) \tag{1.0.22}$$

Μετασχηματίζουμε τις σχέσεις (1.0.19), (1.0.20), (1.0.21), (1.0.22) κατά Laplace:

$$V_i(s) = R_1 I_1 + \frac{1}{Cs} I_1(s) - R_1 I_2(s) - \frac{1}{Cs} I_3(s)$$

$$0 = R_1 I_2 s(s) + R_2 I_2(s) + LsI_2(s) - R_1 I_1(s) - R_2 I_3(s)$$

$$0 = \frac{1}{Cs} I_3(s) - \frac{1}{Cs} I_1(s) + R_2 I_3(s) - R_2 I_2(s) + R_3 I_3(s)$$

$$V_0(s) = R_3 I_3(s)$$

ή σε μορφή ενός γραμμικού συστήματος, θα είναι:

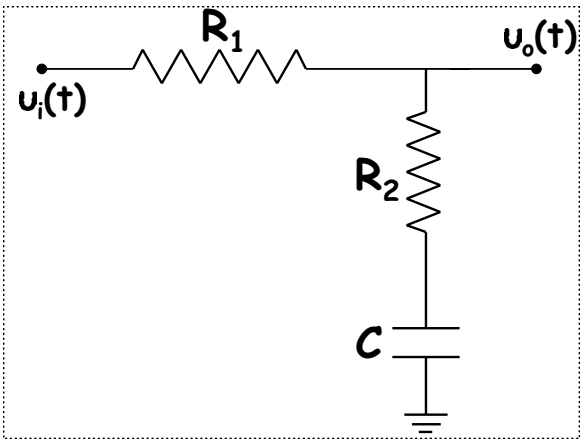
$$\begin{pmatrix} R_1 + 1/Cs & -R_1 & -1/Cs \\ -R_1 & R_1 + R_2 + Ls & -R_2 \\ -1/Cs & -R_2 & R_2 + R_3 + Ls \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1(s) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Επιλύοντας αυτό το σύστημα ως προς $I_3(s)$, προσδιορίζουμε το $V_0(s) = R_3 I_3(s)$ και επομένως για τη συνάρτηση μεταφοράς, $H(s)$, θα έχουμε:

$$H(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)}$$

$$\Rightarrow H(s) = R_3 \Bigg/ \left[\frac{1/Cs + R_2 + R_3 - R_2^2/(R_1 + R_2 + Ls)}{R_1 R_2/(R_1 + R_2 + Ls) + 1/Cs} \left(R_1 + \frac{1}{Cs} \right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1/Cs + R_2 + R_3 - R_2^2/(R_1 + R_2 + Ls)}{\left[R_1 R_2/(R_1 + R_2 + Ls) + 1/Cs \right] / (R_1 + R_2 + Ls) - 1/Cs} \right].$$

Πρόβλημα 1.63 **(α)** Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς, $H(s)$, του συστήματος του σχήματος (1.70), όπου οι τιμές των αντιστάσεων $R_1,\ R_2$ και του πυκνωτή C είναι γνωστά μεγέθη.



Σχήμα 1.70

(β) Βρείτε την απόκριση του συστήματος $v_o(t)$ (δηλαδή την τάση εξόδου), όταν το σήμα εισόδου είναι η μοναδιαία βηματική συνάρτηση πλάτους E, δηλαδή $v_i(t) = Eu(t)$.
Λύση:

(α)

Προφανώς για το σύστημα ισχύει:

$$V_o(s) = \frac{R_2 + 1/Cs}{R_1 + R_2 + 1/Cs} V_i(s)$$

Κι εφόσον

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)},$$

θα έχουμε:

$$H(s) = \frac{R_2 + 1/Cs}{R_1 + R_2 + 1/Cs} = \frac{R_2 Cs + 1}{(R_1 + R_2)Cs + 1}.$$

(β)

Το σήμα εισόδου u_i είναι $u_i(t) = Eu(t)$ οπότε:

$$V_i(s) = \frac{E}{s},$$

όπου

$$\upsilon_i(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} V_i(s), \quad \text{και}$$

$$V_o(s) = \frac{R_2 + 1/Cs}{R_1 + R_2 + 1/Cs}\frac{E}{s} = E\frac{\tau_1 s + 1}{s(\tau_2 s + 1)},$$

όπου $\tau_1 = R_2C, \quad \tau_2 = (R_1 + R_2)C$, και

$$\upsilon_o(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} V_o(s).$$

Λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace του $V_o(s)$, θα έχουμε:

$$V_o(s) = E\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/\tau_2}\left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1}\right)\right] \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} u_o(t) = E\left[1 - e^{-t/\tau_2}\left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_1}\right)\right]u(t).$$

Πρόβλημα 1.64 Βρείτε τη λύση $y(t)$, $t \geq 0$ της διαφορικής εξίσωσης:

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0,$$

με αρχικές συνθήκες $y(0^-) = 1$ και $y'(0^-) = 1$.
Λύση:

Παίρνοντας το μετασχηματισμό Laplace και στα δυο μέλη της διαφορικής εξίσωσης, θα έχουμε:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3sY(s) + 3y(0) + 2Y(s) = 0,$$

όπου $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$. Από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος, έχουμε:

$$Y(s) = \frac{s-2}{s^2 - 3s + 2} = \frac{1}{s-1}.$$

Με τη βοήθεια του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, έχουμε:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = e^t u(t).$$

Πρόβλημα 1.65 **(α)** Έστω ένα σήμα $x(t)$ περιγράφεται από τη σχέση:

$$x(t) = \left\{\begin{array}{ll} A & \text{για } 0 \leq t \leq T, \\ & \\ 0 & \text{αλλού} \end{array}\right\} = A\Pi(t - T/2),$$

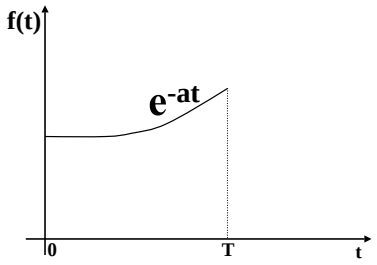
όπου $\Pi(t)$ είναι ο μοναδιαίος τετραγωνικός παλμός. Να βρείτε το μετασχηματισμό Laplace, $X(s)$.
(β) Τώρα θεωρείστε τον παλμό $f(t)$ του σχήματος (1.71). Να βρείτε το μετασχηματισμό Laplace, $F(s)$.
Λύση:

(α)
Ο τετραγωνικός παλμός $\Pi(t - T/2)$ μπορεί να γραφεί και ως $u(t) - u(t - T)$. Οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$x(t) = A\Pi(t - \frac{T}{2}) = A[u(t) - u(t - T)],$$

και συνεπώς μετασχηματίζοντας κατά Laplace προκύπτει:

$$F(s) = A\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-sT}\right] = \frac{A}{s}\left[1 - e^{-sT}\right].$$



Σχήμα 1.71

(β)
Η $f(t)$ μπορεί πλέον να γραφτεί ως εξής:

$$f(t) = e^{at}[u(t) - u(t-T)].$$

Οπότε μετασχηματίζοντας προκύπτει:

$$\mathcal{L}[u(t) - u(t-T)] = \frac{1 - e^{-sT}}{s}.$$

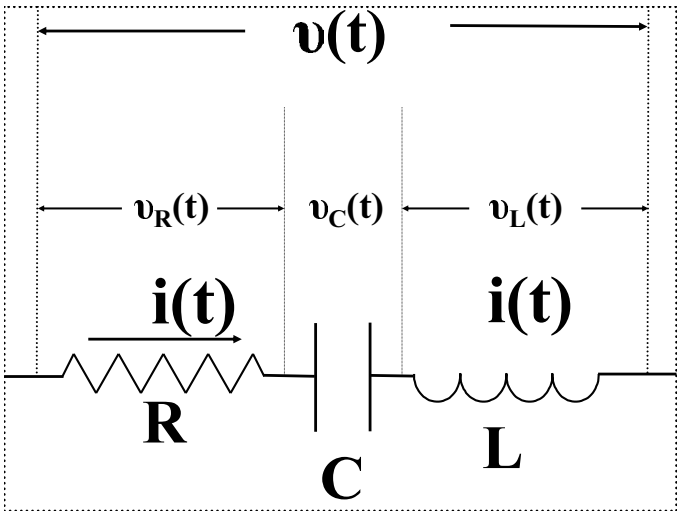
Γνωρίζουμε οτι:

$$\mathcal{L}[e^{at}g(t)] = G(s-a).$$

Άρα:

$$F(s) = \mathcal{L}[e^{at}\,(u(t) - u(t-T))] = \frac{1 - e^{-(s-a)T}}{s-a}.$$

Πρόβλημα 1.66 Βρείτε τη σύνθετη αντίσταση ενός RLC κυκλώματος σε σειρά, όπως φαίνεται στο σχήμα (1.72).



Σχήμα 1.72: *Ένα κύκλωμα RLC σε σειρά.*

Λύση:

Προφανώς η ολική τάση στα άκρα του κυκλώματος είναι:

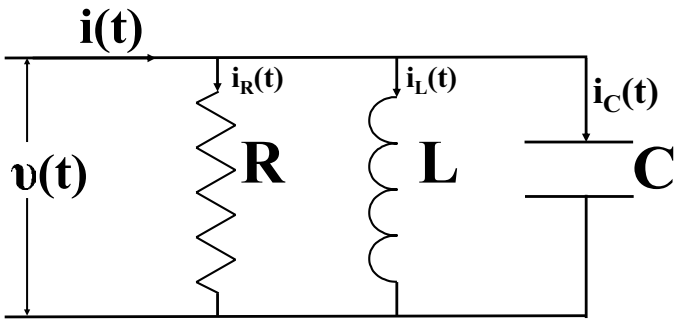
$$v(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t)$$

$$\Rightarrow \upsilon(t) = iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow V(s) = RI(s) + LsI(s) + \frac{1}{Cs}I(s)$$

$$\Rightarrow Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = R + Ls + \frac{1}{Cs}.$$

Πρόβλημα 1.67 Βρείτε τη σύνθετη αντίσταση ενός RLC κυκλώματος σε παράλληλη σύνδεση, όπως φαίνεται στο σχήμα (1.73).



Σχήμα 1.73: *Ένα κύκλωμα RLC σε παράλληλη σύνδεση.*

Λύση:

Προφανώς το ολικό ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα θα είναι:

$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t),$$

αφού εφαρμόσουμε το LT και στα δυο μέλη αυτής της σχέσης, θα έχουμε:

$$I(s) = I_R(s) + I_L(s) + I_C(s)$$

$$\Rightarrow I(s) = \frac{V(s)}{R} + \frac{V(s)}{Ls} + CsV(s)$$

$$\Rightarrow Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = \frac{1}{1/R + 1/(Ls) + Cs}.$$

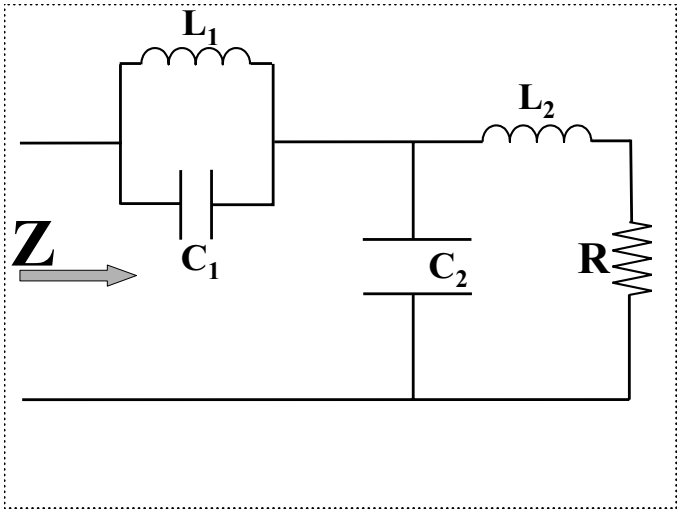
Πρόβλημα 1.68 Βρείτε τη σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος, του σχήματος (1.74).
Λύση:

Παρατηρούμε ότι το πηνίο L_2 και η αντίσταση R είναι συνδεδεμένα σε σειρά, επομένως: η σύνθετη αντίσταση του Z_1 είναι:

$$Z_1 = L_2 s + R.$$

Το $Z_1||Z_{C_2}$ είναι σε παράλληλη σύνδεση, επομένως:

$$\frac{1}{Z_2} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_{C_2}}$$



Σχήμα 1.74: *Σύνθετο ηλεκτρονικό κύκλωμα.*

$$\Rightarrow \frac{1}{Z_2} = \frac{1}{L_2 s + R} + C_2 s.$$

Το $Z_{L_1}||Z_{C_1}$, επομένως:

$$\frac{1}{Z_3} = \frac{1}{Z_{L_1}} + \frac{1}{Z_{C_1}}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{Z_3} = \frac{1}{L_1 s} + C_1 s,$$

και τελικά, το Z_2, Z_3 είναι σε σειρά, επομένως:

$$Z(s) = Z_2 + Z_3.$$

Πρόβλημα 1.69 Η κρουστική απόκριση ενός συστήματος είναι:

$$h(t) = e^{-2t}u(t).$$

Βρείτε την απόκριση $y(t)$ του συστήματος που οφείλεται στο σήμα εισόδου:

$$x(t) = tu(t)$$

Λύση:

Οι διάφοροι LT θα έχουν:

$$H(s) = \mathcal{L}\left[h(t)\right] = \mathcal{L}\left[e^{-2t}u(t)\right] = \frac{1}{s+2}$$

και

$$X(s) = \mathcal{L}\left[x(t)\right] = \mathcal{L}\left[tu(t)\right] = \frac{1}{s^2},$$

επομένως η απόκριση στο χώρο των μιγαδικών συχνοτήτων είναι:

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{s^2(s+2)} = \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{4s} + \frac{1}{4(s+2)},$$

και αντιστρέφοντας κατά Laplace, η απόκριση $y(t)$ είναι:

$$y(t) = \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2t}\right]u(t).$$

Πρόβλημα 1.70 Η συνάρτηση μεταφοράς ενός ΓΧΑ συστήματος συστήματος είναι:

$$H(s) = \frac{1}{(s+2)^3}.$$

Βρείτε την απόκριση $y(t)$ του συστήματος που οφείλεται στο σήμα εξόδου της μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης:

$$x(t) = u(t).$$

Λύση:

Για το ΓΧΑ σύστημα στο χώρο των μιγαδικών συναρτήσεων θα ισχύει:

$$Y(s) = H(s)X(s),$$

όπου

$$X(s) = \mathcal{L}\left[u(t)\right] = \frac{1}{s}.$$

Επομένως η απόκριση του συστήματος ως συνάρτηση της μιγαδικής συχνότητας θα είναι:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+2)^3}.$$

Θα αναλύσουμε τη $Y(s)$ με τη μέθοδο των μερικών κλασμάτων:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+2)^3} = \frac{A_1}{(s+2)^3} + \frac{A_2}{(s+2)^2} + \frac{A_3}{s+2} + \frac{A}{s},$$

όπου οι διάφοροι συντελεστές προσδιορίζονται ως εξής:

$$A = \left[sY(s)\right]_{s=0} = \left[\frac{1}{(s+2)^3}\right]_{s=0} = \frac{1}{8},$$

$$A_1 = \left[(s+2)^3 Y(s)\right]_{s=-2} = \left[\frac{1}{(s+2)^3}\right]_{s=-2} = -\frac{1}{2},$$

$$A_2 = \frac{d}{ds}\left[(s+2)^3 Y(s)\right]_{s=-2} = \frac{d}{ds}\left[\frac{1}{(s+2)^3}\right]_{s=-2} = -\frac{1}{4},$$

$$A_3 = \frac{d^2}{ds^2}\left[(s+2)^3 Y(s)\right]_{s=-2} = \frac{d^2}{ds^2}\left[\frac{1}{(s+2)^3}\right]_{s=-2} = -\frac{1}{4}.$$

Άρα η $Y(s)$ θα είναι:

$$Y(s) = -\frac{1}{2(s+2)^3} - \frac{1}{4(s+2)^2} - \frac{1}{4(s+2)} + \frac{1}{8s}$$

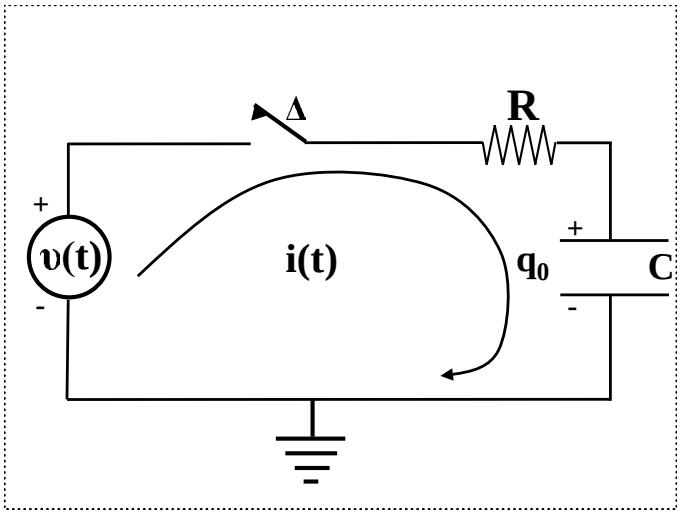
$$\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[Y(s)\right] = \left[-\frac{1}{4}t^2 e^{-2t} - \frac{1}{4}te^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{8}\right]u(t).$$

Πρόβλημα 1.71 Στο κύκλωμα του σχήματος (1.75) ο διακόπτης **Δ** κλείνει τη χρονική στιγμή $t = 0$. Ποιο είναι το ρεύμα $i(t)$ που διαρρέει το κύκλωμα; Αρχικό φορτίο $q(0) = q_0$ στον πυκνωτή. Θεωρήστε σταθερή τάση εισόδου $v(t) = V$.
Λύση:

Ο δεύτερος κανόνας του Kirchoff μας δίνει:

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = v(t)$$

$$\Rightarrow R\mathcal{L}\left[i(t)\right] + \frac{1}{C}\mathcal{L}\left[\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau\right] = \mathcal{L}\left[v(t)\right]$$



Σχήμα 1.75: *Σύνθετο ηλεκτρονικό κύκλωμα με διακόπτη.*

$$\Rightarrow RI(s) + \frac{1}{Cs}I(s) + \frac{q_0}{Cs} = \frac{V}{s},$$

διότι προφανώς ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{0} i(\tau)d\tau + \int_{0}^{t} i(\tau)d\tau = q_0 + \int_{0}^{t} i(\tau)d\tau.$$

Λύνοντας ως προς $I(s)$ θα έχουμε:

$$I(s) = \frac{V - q_0/C}{R}\frac{1}{s + 1/RC}$$

$$\Rightarrow i(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[I(s)\right] = \frac{V - q_0/C}{R}e^{-t/RC}.$$

Πρόβλημα 1.72 Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος (1.76) υποθέτοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες.
Λύση:

Ο δεύτερος κανόνας Kirchoff για τους δυο βρόχους θα μας δώσει:

$$Ri_1(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_1(\tau)d\tau - \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_2(\tau)d\tau = v_i(t),$$

$$\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_2(\tau)d\tau + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_2(\tau)d\tau - \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_1(\tau)d\tau + Ri_2(t) = 0$$

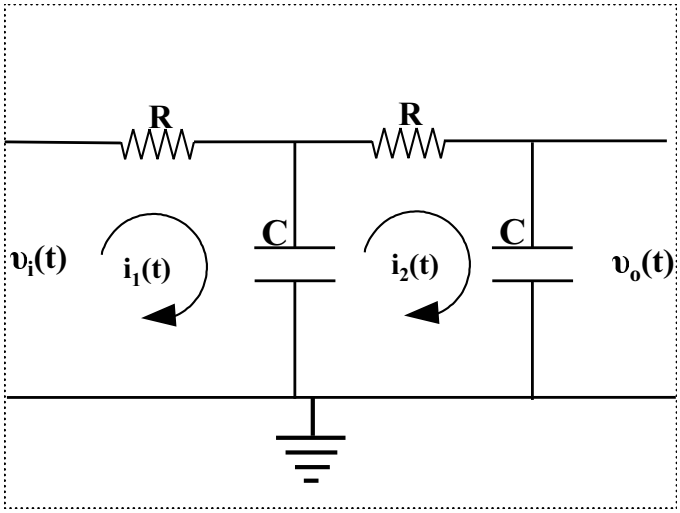
όπου η τάση στα άκρα του πυκνωτή C_2 είναι:

$$\frac{1}{C_2}\int_{-\infty}^{t} i_2(\tau)d\tau = v_o(t).$$

Ο μετασχηματισμός Laplace θα μας δώσει:

$$RI_1(s) + \frac{1}{Cs}I_1(s) - \frac{1}{Cs}I_2(s) = V_i(s),$$

$$\frac{1}{Cs}I_2(s) + \frac{1}{Cs}I_2(s) - \frac{1}{Cs}I_1(s) + RI_2(s) = 0,$$



Σχήμα 1.76: *Σύνθετο ηλεκτρονικό κύκλωμα.*

$$\frac{1}{Cs}I_2(s) = V_o(s).$$

Οι σχέσεις (1) και (1) αποτελούν ένα σύστημα δυο εξισώσεων με αγνώστους τα $I_1(s), I_2(s)$ και επομένως μπορούνε να γραφτούν σε μορφή πινάκων:

$$\begin{pmatrix} R+1/Cs & -1/Cs \\ -1/Cs & R+2/Cs \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_i(s) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Επομένως η συνάρτηση $I_2(s)$ θα είναι:

$$I_2(s) = \begin{vmatrix} R+1/Cs & V_i(s) \\ -1/Cs & 0 \end{vmatrix} \Big/ \left[(R+1/Cs)(R+2/Cs) - (1/Cs)^2\right]$$

$$\Rightarrow I_2(s) = \frac{V_i(s)}{Cs}\frac{1}{(R+1/Cs)(R+2/Cs) - (1/Cs)^2}.$$

Αν αντικαταστήσουμε αυτή την έκφραση του $I_2(s)$ στη σχέση (1) θα έχουμε:

$$\frac{V_i(s)}{(Cs)^2}\frac{1}{(R+1/Cs)(R+2/Cs) - (1/Cs)^2} = V_0(s)$$

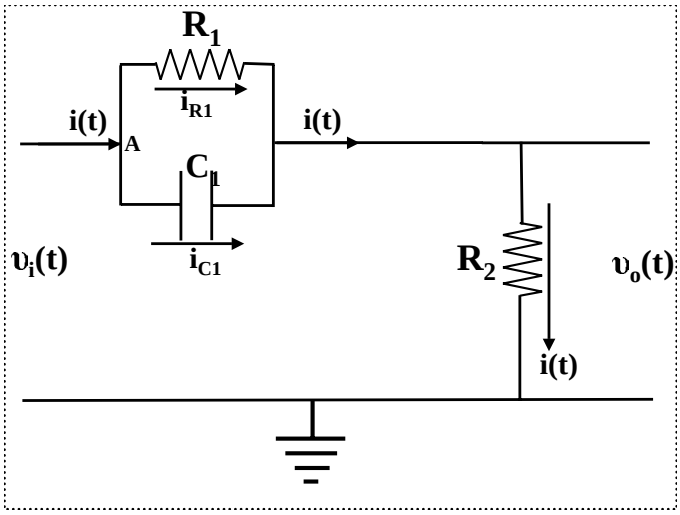
$$\Rightarrow \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{(R+1/Cs)(R+2/Cs)(Cs)^2 - 1}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{V_0(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{Cs\,(3R + R^2Cs + 1/Cs)}.$$

Πρόβλημα 1.73 Βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς του κυκλώματος (1.77) υποθέτοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες.
Λύση:

Από τον πρώτο κανόνα του Kirchoff για τον κόμβο A θα έχουμε:

$$i(t) = i_{C_1}(t) + i_{R_1}(t),$$



Σχήμα 1.77: *Σύνθετο ηλεκτρονικό κύκλωμα.*

όπου $i_{C_1}(t), i_{R_1}(t)$ είναι το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση R_1 και τον πυκνωτή C_1, που μπορούνε εκφραστούν από τις τάσεις στα άκρα του πυκνωτή ή της αντίστασης ως εξής:

$$i_{C_1} = C\frac{d}{dt}\left[v_i(t) - v_o(t)\right], \qquad i_{R_1} = \left[v_i(t) - v_o(t)\right]/R_1.$$

Επομένως η σχέση από τον πρώτο κανόνα του Kirchoff είναι:

$$C\frac{d}{dt}\left[v_i(t) - v_o(t)\right] + \frac{\left[v_i(t) - v_o(t)\right]}{R_1} = \frac{v_0(t)}{R_2}$$

$$\Rightarrow Cs[V_i(s) - V_o(s)] + \frac{1}{R_1}[V_i(s) - V_o(s)] = \frac{V_o(s)}{R_2}$$

$$\Rightarrow V_i(s)\left(\frac{1}{R_1} + Cs\right) = V_o(s)\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} + Cs\right)$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1/R_1 + Cs}{1/R_1 + 1/R_2 + Cs}.$$

Πρόβλημα 1.74 Η εξίσωση που διέπει τη χρονική εξέλιξη του φορτίου Q σε ένα κύκλωμα RLC σε σειρά δίδεται από τη διαφορική εξίσωση:

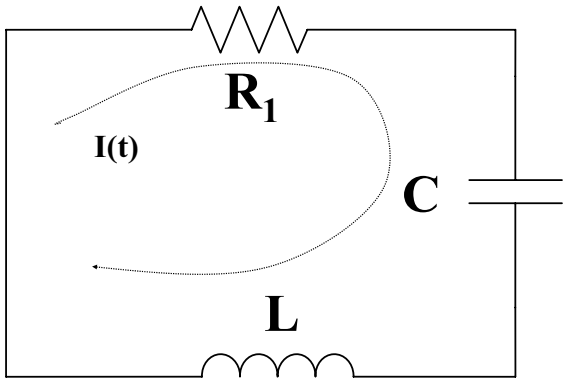
$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = 0.$$

Να δείξετε ότι αν $R^2 < 4L/C$, τότε το φορτίο μεταβάλλεται περιοδικά με πλάτος που ελαττώνεται με την πάροδο του χρόνου. Βρείτε το φορτίο $Q(t)$ και το ρεύμα $I(t) = dQ(t)/dt$, όταν $Q(0) = Q_0$ και $I(0) = 0$.
Λύση:

Η εξίσωση που κυβερνά την χρονική εξέλιξη του φορτίου σε ένα κύκλωμα RLC σε σειρά όπως φαίνεται στο σχήμα (1.78), είναι:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0.$$



Σχήμα 1.78

Αυτή η διαφορική εξίσωση περιγράφει ένα αρμονικό ταλαντωτή που περιέχει έναν όρο απόσβεσης, R/L. Αφού ορίσουμε τον τελεστή της παραγώγου $D \equiv d/dt$, η διαφορική εξίσωση (1) θα γραφτεί:

$$\left(D^2 + \frac{R}{L}D + \frac{1}{LC}\right) Q(t) = 0.$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, $(D^2 + (R/L)\, D + 1/LC)$ αυτής της διαφορικής εξίσωσης έχει δυο ρίζες:

$$\rho_{1,2} = \frac{-R \pm j\Delta}{2L},$$

όπου ο όρος Δ, είναι θετικός:

$$\Delta = \left(\frac{4L}{C} - R^2\right)^{1/2} > 0,$$

αφού $R^2 < 4L/C$.
Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (1) θα βρεθεί με την βοήθεια των δυο ριζών, $\rho_{1,2}$:

$$Q(t) = Ae^{\rho_1 t} + Be^{\rho_2 t},$$

όπου οι σταθερές A, B μπορούν να προσδιορισθούν από τις αρχικές συνθήκες $Q(0) = Q_0$ και $I(0) = 0$.
Επομένως το φορτίο, $Q(t)$ θα γραφτεί:

$$Q(t) = e^{-(R/2L)t}\left(Ae^{j(\Delta/2L)t} + Be^{-j(\Delta/2L)t}\right).$$

Μπορούμε να αναπτύξουμε τις μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις, $e^{\pm i(\Delta/2L)t}$ με την βοήθεια της σχέσης Euler:

$$e^{\pm j(\Delta/2L)t} = \cos\left(\frac{\Delta}{2L}t\right) \pm j\sin\left(\frac{\Delta}{2L}t\right),$$

επομένως η λύση για το φορτίο, $Q(t)$ θα είναι:

$$Q(t) = e^{-(R/2L)t}\left[C_1\cos\left(\frac{\Delta}{2L}t\right) + C_2\sin\left(\frac{\Delta}{2L}t\right)\right],$$

όπου C_1, C_2 είναι δυο νέες σταθερές που και αυτές μπορούν να προσδιορισθούν από τις αρχικές συνθήκες $Q(0) = Q_0$ και $I(0) = 0$.
Από το φορτίο $Q(t)$, εξίσωση (1) το ρεύμα, $I(t)$ είναι:

$$I(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{R}{2L}e^{-(R/2L)t}\left[C_1\cos\left(\frac{\Delta}{2L}t\right) + C_2\sin\left(\frac{\Delta}{2L}t\right)\right] +$$

$$e^{-(R/2L)t}\left[-\frac{C_1\Delta}{2L}\sin\left(\frac{\Delta}{2L}t\right)+\frac{C_2\Delta}{2L}\cos\left(\frac{\Delta}{2L}t\right)\right].$$

Η αρχική συνθήκη $Q(0)=Q_0$ από την εξίσωση (1) θα μας δώσει:

$$Q(0)=Q_0=C_1,$$

και η αρχική συνθήκη $I(0)=\dot{Q}(0)=0$ από την εξίσωση (1) θα μας δώσει:

$$\begin{aligned}0&=-\frac{R}{2L}C_1+C_2\frac{\Delta}{2L}\\ \Rightarrow\quad C_2&=\frac{C_1}{\Delta}\\ \Rightarrow\quad C_2&=\frac{Q_0}{\Delta}.\end{aligned}$$

Συνεπώς με αυτές τις εκφράσεις των σταθερών C_1, C_2 θα έχουμε για το φορτίο

$$Q(t)=Q_0e^{-(R/2L)t}\left[\cos\left(\frac{\Delta}{2L}t\right)+\frac{1}{\Delta}\sin\left(\frac{\Delta}{2L}t\right)\right].$$

Αν ορίσουμε μια γωνία ϕ έτσι ώστε:

$$\begin{aligned}\tan\phi&=\frac{1}{\Delta}\\ \Rightarrow\quad \cos\phi&=\frac{1}{(1+\tan^2\phi)^{1/2}}\\ \Rightarrow\quad \cos\phi&=\frac{\Delta}{(1+\Delta^2)^{1/2}},\end{aligned}$$

το φορτίο, $Q(t)$ θα είναι:

$$\begin{aligned}Q(t)&=Q_0e^{-(R/2L)t}\left[\cos\left(\frac{\Delta}{2L}t\right)+\tan\phi\sin\left(\frac{\Delta}{2L}t\right)\right]\\ \Rightarrow\quad Q(t)&=\frac{Q_0}{\cos\phi}e^{-(R/2L)t}\left[\cos\phi\cos\left(\frac{\Delta}{2L}t\right)+\sin\phi\sin\left(\frac{\Delta}{2L}t\right)\right]\\ \Rightarrow\quad Q(t)&=\frac{Q_0}{\cos\phi}e^{-(R/2L)t}\cos\left(\frac{\Delta}{2L}t-\phi\right),\end{aligned}$$

όπου η γωνία $\phi=\tan^{-1}(1/\Delta)$. Το ρεύμα $I(t)=\dot{Q}(t)$ θα είναι:

$$I(t)=\dot{Q}(t)=-\frac{Q_0R}{2L\cos\phi}e^{-(R/2L)t}\left[\cos\left(\frac{\Delta}{2L}t-\phi\right)+\frac{\Delta}{R}\sin\left(\frac{\Delta}{2L}t-\phi\right)\right].$$

Ομοίως, αν ορίσουμε μια νέα γωνία θ έτσι ώστε:

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\frac{\Delta}{R}=\left(\frac{4L}{R^2C}-1\right)^{1/2}\\ \Rightarrow\quad \theta&=\tan^{-1}\left(\frac{4L}{RC}-R\right),\end{aligned}$$

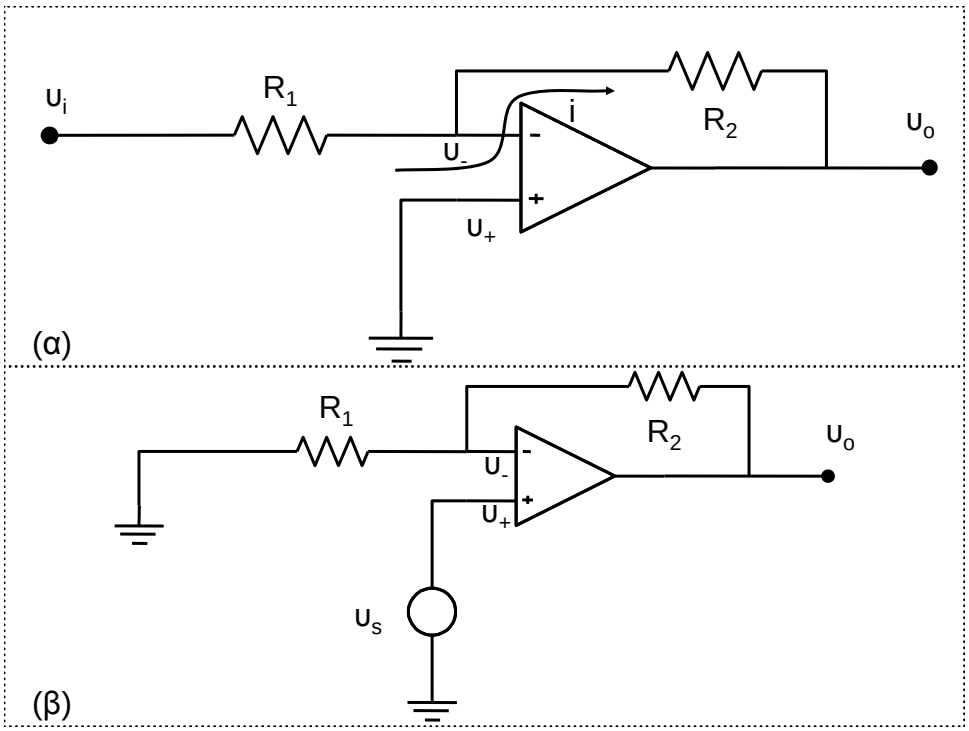
το ρεύμα $I(t)$ θα γραφτεί:

$$\begin{aligned}I(t)=\dot{Q}(t)&=-\frac{Q_0R}{2L\cos\phi}e^{-(R/2L)t}\left[\cos\left(\frac{\Delta}{2L}t-\phi\right)+\tan\theta\sin\left(\frac{\Delta}{2L}t-\phi\right)\right]\\ \Rightarrow\quad I(t)=\dot{Q}(t)&=-\frac{Q_0R}{2L\cos\phi\cos\theta}e^{-(R/2L)t}\cos\left(\frac{\Delta}{2L}t-\phi-\theta\right).\end{aligned}$$

2

Τελεστικοί Ενισχυτές

Πρόβλημα 2.1 Βρείτε το κέρδος ή ενίσχυση (Gain) για τα κυκλώματα του σχήματος (2.1). Υποθέστε οτι έχετε ιδανικούς τελεστικούς ενισχυτές.



Σχήμα 2.1

Λύση:

(α)

Από το κύκλωμα του σχήματος (2.1) έχουμε:

$$i = \frac{v_i - v_-}{R_1} = \frac{v_- - v_o}{R_2}, \tag{2.0.1}$$

δηλαδή όλο το ρεύμα πηγαίνει γύρω από τον ιδανικό τελεστικό ενισχυτή.
Από τη σχέση (2.0.1) έχουμε:

$$\frac{v_i}{R_1} = v_- \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) - \frac{v_0}{R_2} \tag{2.0.2}$$

Για την ενίσχυση, A, του τελεστικού ενισχυτή ισχύει:

$$v_- = -\frac{v_0}{A},$$

αλλά ο τελεστικός ενισχυτής είναι ιδανικός και επομένως η ενίσχυση τείνει στο άπειρο, άρα η τάση στον αρνητικό ακροδέκτη του ενισχυτή τείνει στο μηδέν, $v_- = 0$. Άρα, το κέρδος του κυκλώματος, από τη σχέση (2.0.2) είναι:

$$G = \frac{v_o}{v_i} = -\frac{R_2}{R_1}.$$

(β)

Το v_- μπορεί να βρεθεί από το διαιρέτη τάσης των αντιστάσεων R_1, R_2. Επομένως θα έχουμε:

$$v_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_o \quad \text{και}$$

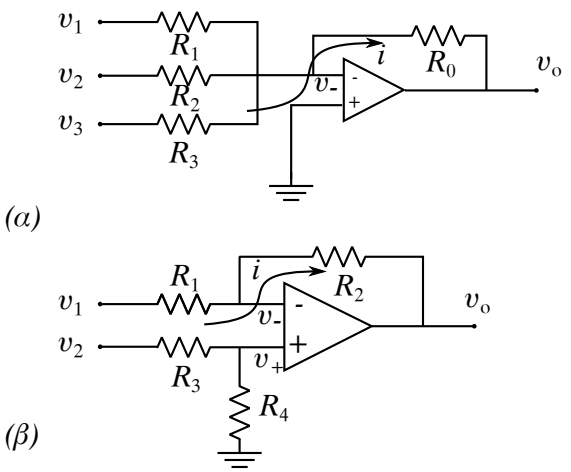
$$v_- = v_+ = v_S.$$

Άρα το κέρδος είναι:

$$G = \frac{v_o}{v_i} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1}.$$

Αν $R_2 = 0$ ή $R_1 = \infty$, τότε $G = 1$, δηλαδή έχουμε έναν ακολουθητή τάσης.

Πρόβλημα 2.2 Βρείτε την τάση εξόδου ως συνάρτηση των τάσεων εισόδου για τα κυκλώματα του σχήματος (2.2). Για το δεύτερο κύκλωμα να εξετάσετε την περίπτωση που $R_1/R_2 = R_3/R_4$. Υποθέστε ότι έχετε ιδανικούς τελεστικούς ενισχυτές.



Σχήμα 2.2

Λύση:
(α)

Για το ρεύμα i έχουμε:

$$i = \frac{v_1 - v_-}{R_1} + \frac{v_2 - v_-}{R_2} + \frac{v_3 - v_-}{R_3}, \tag{2.0.3}$$

και

$$i = \frac{v_- - v_o}{R_0}. \tag{2.0.4}$$

Για ιδανικό τελεστικό ενισχυτή ισχύει οτι $\upsilon_- = 0$. Επομένως, οι σχέσεις (2.0.3) και (2.0.4) θα μας δώσουν:

$$\upsilon_o = -\left[\frac{R_0}{R_1}\upsilon_1 + \frac{R_0}{R_2}\upsilon_2 + \frac{R_0}{R_3}\right].$$

(β)

Από τους δύο διαιρέτες τάσεις έχουμε:

$$\upsilon_+ = \frac{R_4}{R_3 + R_4}\upsilon_2,$$

$$\upsilon_- = \upsilon_1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2}(\upsilon_o - \upsilon_1).$$

Αλλά για τον ιδανικό τελεστικό ενισχυτή ισχύει οτι:

$$\upsilon_+ = \upsilon_-,$$

οπότε παίρνουμε:

$$\upsilon_1\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2}\right) + \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2}\right)\upsilon_o = \frac{R_4}{R_3 + R_4}\upsilon_2$$

$$\Rightarrow \upsilon_1 - \left(\frac{R_4}{R_2}\frac{R_1 + R_2}{R_3 + R_4}\right)\upsilon_2 = -\frac{R_1}{R_2}\upsilon_o$$

$$\Rightarrow \upsilon_1 - \frac{1 + R_1/R_2}{1 + R_3/R_4}\upsilon_2 = -\frac{R_1}{R_2}\upsilon_o.$$

Αν

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4},$$

τότε έχουμε:

$$\upsilon_o = \frac{R_2}{R_1}(\upsilon_2 - \upsilon_1),$$

δηλαδή η έξοδος είναι ανάλογη της διαφοράς των σημάτων εισόδου.

Πρόβλημα 2.3 Βρείτε την τάση εξόδου υ_o ως συνάρτηση του σήματος εισόδου, υ_i, για τα κυκλώματα του σχήματος (2.3). Να υποθέσετε οτι έχετε ιδανικούς τελεστικούς ενισχυτές.
Λύση:
(α)

Έχουμε

$$i = \frac{\upsilon_i}{R},$$

καθότι για τις τάσεις στους δύο ακροδέκτες ισχύει:

$$\upsilon_- = \upsilon_+ = 0,$$

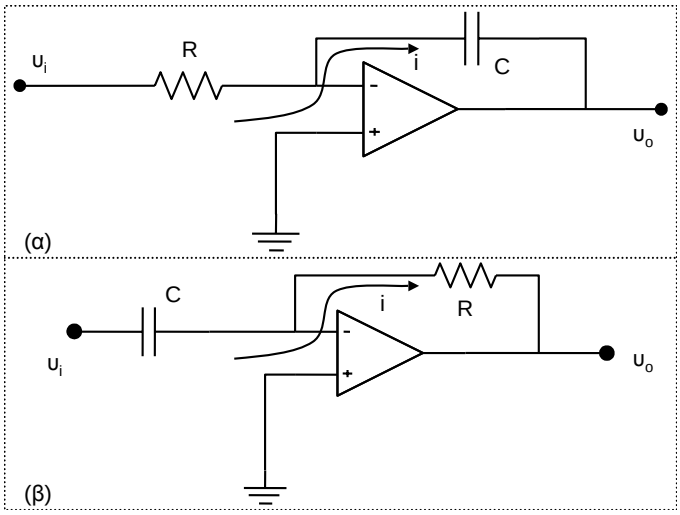
εφόσον υποθέσαμε οτι έχουμε ιδανικό τελεστικό ενισχυτή.
Κι επειδή

$$\upsilon_o = \frac{Q}{C} = -\frac{1}{C}\int i dt,$$

θα έχουμε:

$$\upsilon_o = -\frac{1}{RC}\int \upsilon_i(t)dt,$$

δηλαδή έχουμε ένα κύκλωμα ολοκληρωτή.



Σχήμα 2.3

(β)

Έχουμε:

$$v_o = -R_i,$$

διότι όπως προηγουμένως ισχύει:

$$v_- = v_+ = 0.$$

Επιπλέον,

$$v_i = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C}\int idt$$

$$\Rightarrow i = C\frac{dv_i}{dt}.$$

Επομένως, η τάση εξόδου v_o είναι:

$$v_o = -RC\frac{dv_i}{dt},$$

δηλαδή έχουμε ένα κύκλωμα διαφοριστή.

Πρόβλημα 2.4 Βρείτε την τάση εξόδου v_o ως συνάρτηση της τάσης εισόδου v_i για τα κυκλώματα του σχήματος (2.4). Να υποθέσετε οτι έχετε ιδανικούς τελεστικούς ενισχυτές.
Λύση:
(α)

Για την τάση εξόδου έχουμε:

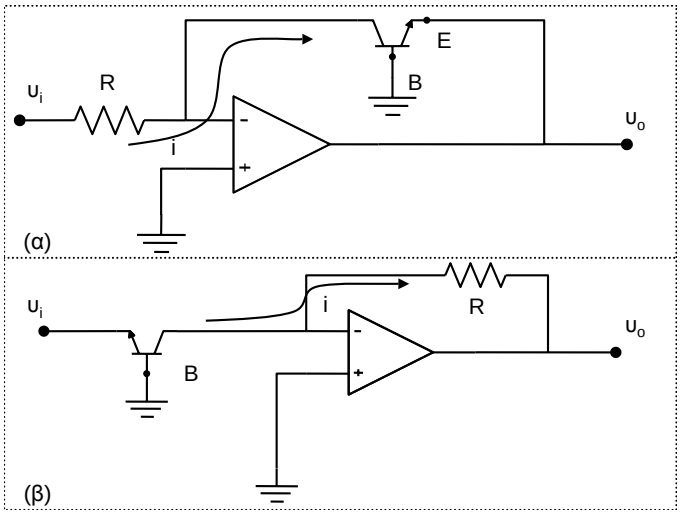
$$v_o = -v_{BE},$$

όπου v_{BE} είναι η τάση μεταξύ της βάσης και του εκπομπού του τρανζίστορ (βλέπε κεφάλαιο 4 σχετικά με τρανζίστορ). Επίσης έχουμε:

$$i = \frac{v_i - v_-}{R} = \frac{v_i}{R},$$

διότι έχουμε υποθέσει οτι ο τελεστικός ενισχυτής είναι ιδανικός, οπότε και ισχύει η σχέση:

$$v_- = v_+ = 0.$$



Σχήμα 2.4

Το ρεύμα του συλλέκτη του τρανζίστορ θα είναι:

$$i_c \simeq i_o e^{ev_{BE}/kT}$$
$$\Rightarrow v_{BE} = \frac{kT}{e} \ln\left(\frac{i_c}{i_o}\right),$$

όπου k είναι η σταθερά Boltzmann, T η θερμοκρασία, και $i_c = i = v_i/R$. Επομένως, η τάση εξόδου είναι:

$$v_o = -v_{BE} = -\frac{kT}{e} \ln\left(\frac{v_i}{Ri_o}\right),$$

δηλαδή έχουμε ένα κύκλωμα λογαριθμητή.

(β)

Για την τάση εξόδου v_o έχουμε:

$$v_o = -iR,$$

όπου:

$$i = i_c = i_o e^{ev_{BE}/kT} = i_o e^{ev_i/kT},$$

δηλαδή η v_o είναι:

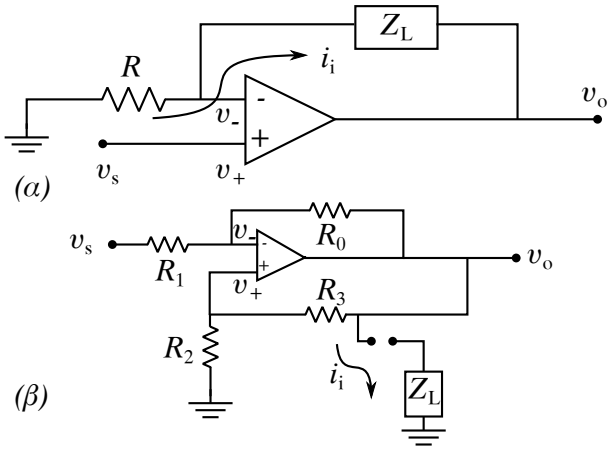
$$v_o = -iR = -i_o R e^{ev_{BE}/kT},$$

οπότε τελικά έχουμε ένα κύκλωμα εκθετικού.

Πρόβλημα 2.5 Βρείτε το ρεύμα i_L που διαρρέει το στοιχείο Z_L για τα κυκλώματα του σχήματος (2.5). Αυτά είναι δύο κυκλώματα γεννήτριας ρεύματος. Να υποθέσετε ιδανικούς τελεστικούς ενισχυτές. Για το κύκλωμα (β) να εξετάσετε την περίπτωση που

$$\frac{R_0}{R_1} = \frac{R_3}{R_2} = g,$$

όπου g είναι μια σταθερά.
Λύση:
(α)



Σχήμα 2.5

Το ρεύμα i_L υπολογίζεται πάνω στις αντιστάσεις R και Z_L ως ακολούθως:

$$i_L = \frac{0 - v_-}{R},$$

και

$$i_L = \frac{v_- - v_o}{Z_L},$$

όπου ισχύει

$$v_- = v_+ = v_S,$$

εφόσον έχουμε υποθέσει οτι ο τελεστικός ενισχυτής είναι ιδανικός.
Επομένως

$$i_L = -\frac{v_S}{R}.$$

(β)

Για το διαιρέτη τάσης πάνω στις αντιστάσεις R_1, R_0 έχουμε:

$$v_- = v_S + \frac{R_1}{R_0 + R_1}(v_o - v_S). \tag{2.0.5}$$

Το ολικό ρεύμα στις αντιστάσεις Z_L, R_2, R_3 θα είναι μηδέν καθώς ο τελεστικός ενισχυτής είναι ιδανικός. Επομένως έχουμε:

$$i_L + \frac{v_+ - v_o}{R_3} + \frac{v_+}{R_2} = 0. \tag{2.0.6}$$

Από τις σχέσεις (2.0.5) και (2.0.6) προκύπτει:

$$v_S\left(\frac{R_0}{R_0 + R_1}\right) + \left(\frac{R_1}{R_0 + R_1}\right) v_o = v_-,$$

και

$$i_L = \frac{v_o}{R_3} - \frac{v_+}{R_3}\left(\frac{R_2 + R_3}{R_2}\right).$$

Όμως γνωρίζουμε οτι για ένα ιδανικό τελεστικό ενισχυτή θα ισχύει:

$$v_+ = v_-.$$

Επίσης, έστω οτι θέτουμε

$$\frac{R_0}{R_1} = \frac{R_3}{R_2} = g.$$

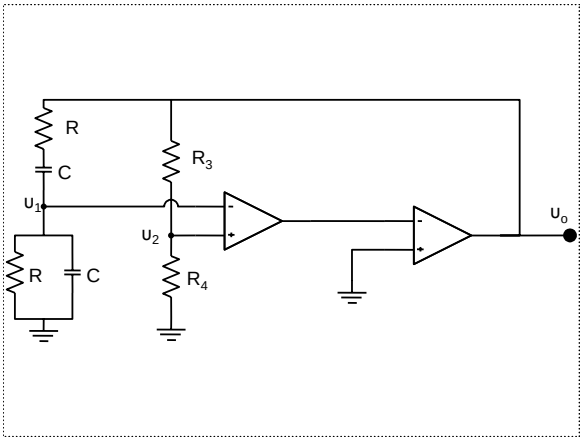
Τότε το ρεύμα θα είναι:

$$i_L = \frac{v_o}{R_3} - \frac{R_2 + R_3}{R_2}\frac{1}{R_3}\left[\frac{g}{1+g}v_S + \frac{1}{1+g}v_o\right]$$

$$\Rightarrow i_L = \frac{v_o}{R_3} - \frac{1}{R_3}(gv_S + v_0)$$

$$\Rightarrow i_L = -\frac{1}{R_3}v_S = -\frac{v_S}{R_2}.$$

Πρόβλημα 2.6 Για το κύκλωμα του σχήματος (2.6) να βρείτε την ευαισθησία της συχνότητας (Frequency sensitivity) $\mathcal{X} = (v_1 - v_2)/v_0$. Αυτό το κύκλωμα ονομάζεται ο ταλαντωτής της γέφυρας του Wein (Wein Bridge Oscillator).



Σχήμα 2.6

Λύση:
Η αντίσταση R και ο πυκνωτής χωρητικότητας C στο κάτω μέρος του v_1 είναι σε παράλληλη σύνδεση, επομένως η σύνθετη αντίσταση είναι:

$$Z_P = \frac{R/j\omega C}{R + 1/j\omega C} = \frac{R}{1 + j\omega RC},$$

ενώ πάνω από το v_1 είναι σε σειρά:

$$Z_S = R + \frac{1}{j\omega C} = \frac{1 + j\omega RC}{j\omega C}.$$

Η τάση εξόδου είναι:

$$v_o = A^2(v_1 - v_2), \tag{2.0.7}$$

διότι οι δύο τελεστικοί ενισχυτές φέρουν την ίδια ενίσχυση Α.
Από τους δύο διαιρέτες τάσης στα $v_1,\ v_2$ θα έχουμε:

$$v_2 = \frac{R_4}{R_3 + R_4}v_o, \tag{2.0.8}$$

$$v_1 = \frac{Z_P}{Z_S + Z_P}v_o = \frac{1}{1 + Z_S/Z_P}v_o. \tag{2.0.9}$$

Από τις σχέσεις (2.0.7) και (2.0.8) θα έχουμε:

$$v_o\left(1+\frac{A^2R_4}{R_3+R_4}\right)=A^2v_1. \tag{2.0.10}$$

Από τη σχέση (2.0.9), και μετά από αντικατάσταση των $Z_P,\ Z_S$ θα έχουμε:

$$v_o=\frac{1}{1+\dfrac{(1+j\omega R_C)^2}{j\omega RC}}=v_1$$

$$\Rightarrow v_0\left(\frac{j\omega RC}{j\omega RC+(1-\omega^2R^2C^2)+2j\omega RC}\right)=v_1$$

$$\Rightarrow v_1=v_o\frac{\omega RC}{3\omega RC-j(1-\omega^2R^2C^2)}. \tag{2.0.11}$$

Από τη σχέση (2.0.11) συμπεραίνουμε οτι το φανταστικό μέρος του v_1 θα πρέπει να είναι μηδέν καθώς η εξίσωση (2.0.10) δεν περιέχει μιγαδικούς αριθμούς. Επομένως:

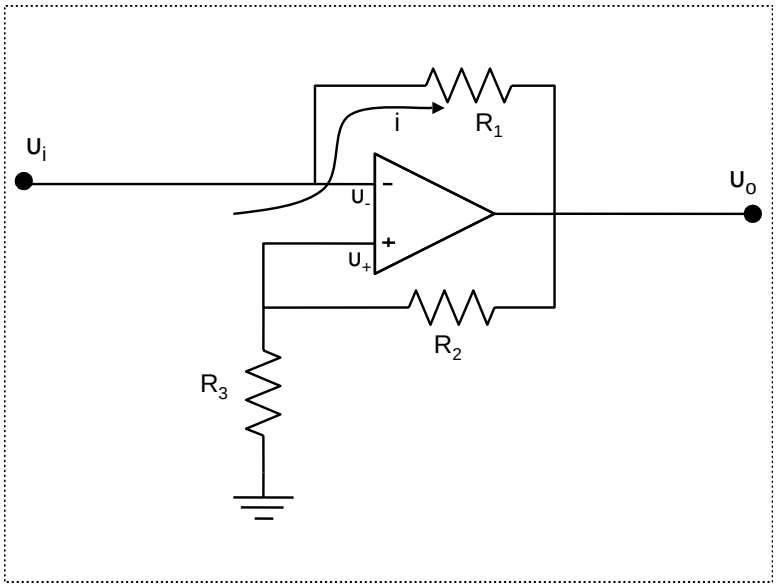
$$\omega_0=\frac{1}{RC}.$$

Η ευαισθησία της συχνότητας είναι:

$$\mathcal{X}=\frac{v_1-v_2}{v_o}=\frac{1}{3-j\left(\dfrac{\omega_0}{\omega}-\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)}-\frac{1}{1+R_3/R_4},$$

όπου έχουν χρησιμοποιηθεί οι σχέσεις (2.0.8) και (2.0.11).

Πρόβλημα 2.7 Βρείτε την έκφραση για την αντίσταση εισόδου, $R_i=v_i/i$ για τον ιδανικό τελεστικό ενισχυτή του σχήματος (2.7).



Σχήμα 2.7

Λύση:
Για το διαιρέτη τάσης στο σημείο v_+ έχουμε:

$$v_+ = \frac{R_3}{R_2 + R_3} v_o,$$

αλλά $v_+ = v_- = v_i$, διότι έχουμε να κάνουμε με ιδανικό τελεστικό ενισχυτή. Επομένως:

$$v_i = \frac{R_3}{R_2 + R_3} v_o$$

$$\Rightarrow \frac{v_i}{v_o} = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \equiv G,$$

όπου G είναι το κέρδος (Gain) του κυκλώματος.
Για το ρεύμα i έχουμε:

$$i = \frac{v_i - v_o}{R_1}$$

$$\Rightarrow i = -\frac{R_2 v_o}{R_1(R_2 + R_3)}.$$

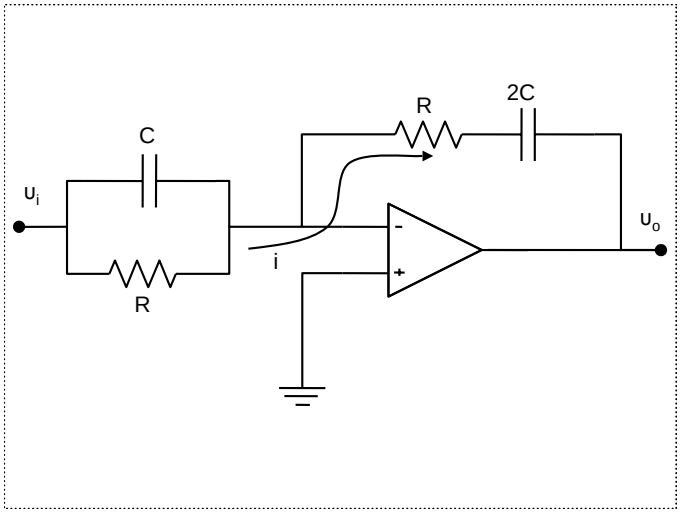
Επομένως η αντίσταση εισόδου είναι:

$$R_i = \frac{v_i}{i} = \frac{v_i \dfrac{R_3}{R_2 + R_3}}{-R_2 v_o/(R_2 + R_3)R_1}$$

$$\Rightarrow R_i = -\frac{R_1 R_3}{R_2}.$$

Αν $R_1 = R_2$ τότε $R_i = -R_3$, δηλαδή αυτό είναι κύκλωμα που αντιστρέφει τις σύνθετες αντιστάσεις στα αρνητικά (negative-impedance converter - NIC).

Πρόβλημα 2.8 Ένας ιδανικός τελεστικός ενισχυτής συνδέεται στο κύκλωμα του σχήματος (2.8). Βρείτε μια έκφραση για το v_o ως συνάρτηση του v_i και άλλων παραμέτρων του προβλήματος. (Η v_i δεν έχει κάποια σταθερή συχνότητα, αλλά είναι ένα τυχαίο σήμα - μην έχετε ω στην απάντησή σας.)



Σχήμα 2.8

Λύση:
Το ρεύμα i είναι:

$$i = \frac{v_i - v_-}{R} + C\frac{d(v_i - v_-)}{dt}. \tag{2.0.12}$$

Επιπλέον ισχύει:

$$v_- - v_o = iR + \frac{1}{2C}\int i\,dt, \tag{2.0.13}$$

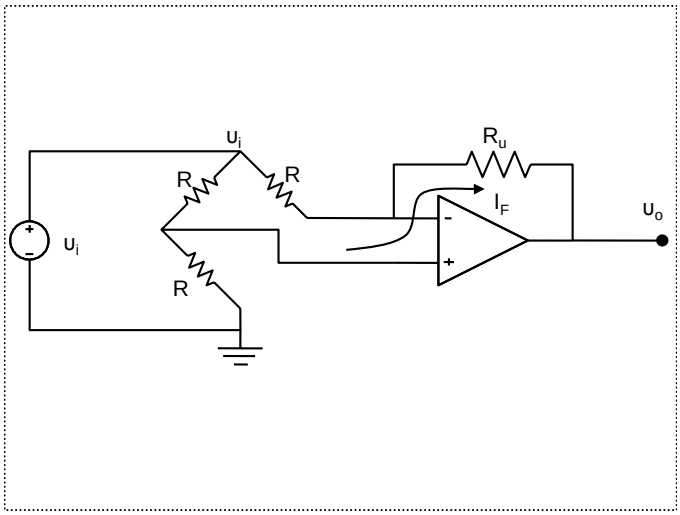
όπου υποθέσαμε οτι έχουμε ιδανικό τελεστικό ενισχυτή, οπότε:

$$v_+ = v_- = 0.$$

Από τις σχέσεις (2.0.12) και (2.0.13) παίρνουμε:

$$v_o = -\left[\frac{3}{2}v_i + RC\frac{dv_i}{dt} + \frac{1}{2RC}\int v_i dt\right].$$

Πρόβλημα 2.9 Το κύκλωμα του σχήματος (2.9) φέρει έναν τελεστικό ενισχυτή στη γέφυρα Wheatstone με μία άγνωστη αντίσταση R_u στην ανάδραση. Έστω οτι η αντίσταση R_u μπορεί να γραφτεί ως $R_u = R(1+x)$, με $-1 < x < \infty$. Να δείξετε οτι όταν $x = 0$ τότε η γέφυρα είναι σε ισορροπία, δηλαδή $v_o = 0$. Επίσης να δείξετε οτι για $x \neq 0$, το σήμα εξόδου v_o μεταβάλλεται γραμμικά με το x.



Σχήμα 2.9

Λύση:
Από το διαιρέτη τάσης έχουμε οτι:

$$v_+ = \frac{R}{2R}v_i = \frac{v_i}{2} = v_-,$$

και

$$v_- = v_i - I_F R.$$

Επιπλέον:

$$I_F = \frac{v_i - v_o}{R + R_u}.$$

Επομένως:

$$\frac{v_i}{2} = v_i - \frac{v_i - v_o}{R + R_u}R$$

$$\Rightarrow 2(v_i - v_o)R = (R + R_u)v_i$$

$$\Rightarrow 2(v_i - v_o) = [1 + (1 + x)]v_i$$

$$\Rightarrow 2(v_i - v_o) = (2 + x)v_i.$$

Για $x = 0$ θα έχουμε:

$$2(v_i - v_o) = 2v_i$$
$$\Rightarrow v_o = 0.$$

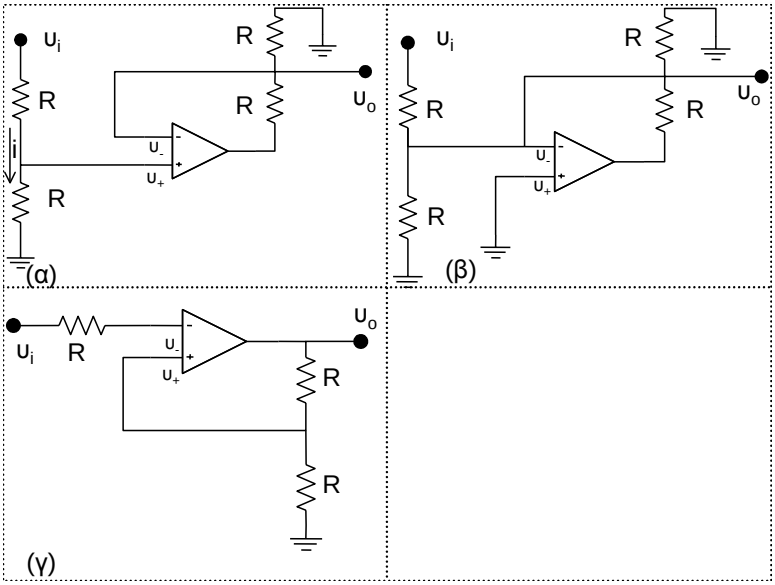
Γενικά, όταν $x \neq 0$ θα έχουμε:

$$v_i - v_o = \left(1 + \frac{x}{2}\right) v_i$$

$$\Rightarrow v_o = -\frac{x}{2} v_i,$$

δηλαδή η v_o θα είναι ανάλογη του v_i.

Πρόβλημα 2.10 Υποθέστε ιδανικούς τελεστικούς ενισχυτές ($R_i = \infty,\ R_0 = 0,\ A = \infty$). Να βρείτε το κέρδος και την αντίσταση εισόδου R_i για τα κυκλώματα του σχήματος (2.10).



Σχήμα 2.10

Λύση:
(α)

Από το σχήμα (2.10α), το v_+ από το διαιρέτη τάσης θα είναι:

$$v_+ = \frac{R}{2R} v_i$$

$$\Rightarrow v_+ = \frac{v_i}{2}.$$

Για το ρεύμα i έχουμε:

$$i = \frac{v_i - 0}{2R}$$

$$\Rightarrow \frac{v_i}{i} = 2R$$

$$\Rightarrow R_i = \frac{v_i}{i} = 2R.$$

Η έξοδος είναι:

$$v_o = v_- = v_+ = \frac{v_i}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{v_o}{v_i} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow G = \frac{v_o}{v_i} = \frac{1}{2}.$$

(β)

Από το σχήμα (2.10β), έχουμε:

$$v_- = v_+ = 0$$

$$\Rightarrow R_i = R,$$

και

$$v_o = v_- = 0.$$

Επομένως το κέρδος είναι:

$$G = \frac{v_o}{v_i} = 0.$$

(γ)

Από το σχήμα (2.10γ), εφόσον η αντίσταση R είναι συνδεδεμένη απευθείας στον ιδανικό τελεστικό ενισχυτή, θα έχουμε:

$$R_i = \infty,$$

και

$$v_+ = v_i = v_- = \frac{v_o}{2}.$$

Επομένως το κέρδος είναι:

$$G = \frac{v_o}{v_i} = 2.$$

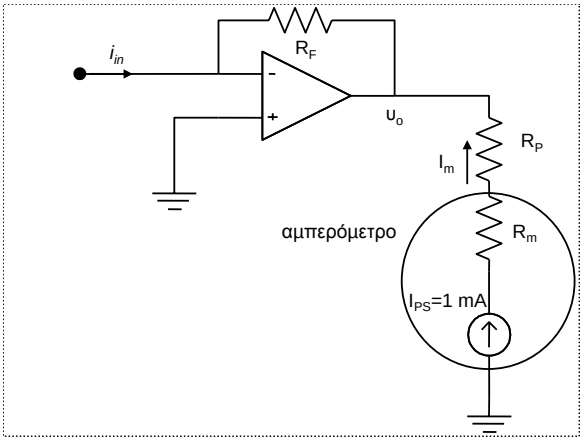
Πρόβλημα 2.11 Χρησιμοποιήστε ένα ιδανικό τελεστικό ενισχυτή και ένα αμπερόμετρο με μέγιστη κλίμακα 1 mA για να σχεδιάσετε ένα ιδανικό αμπερόμετρο με 5 mA μέγιστη κλίμακα. Σχεδιάστε το έτσι ώστε το μέτρο να μην οδηγείται πάνω από 150% της μέγιστης κλίμακας. Υποθέστε οτι η έξοδος του τελεστικού ενισχυτή μπορεί να μεταβάλλεται από $+13$ V μέχρι -13 V. Επιπλέον η εσωτερική αντίσταση του αμπερομέτρου είναι $R_m = 500$ Ω.

Λύση:

Για τάση εξόδου $v_o = -13$ V θέλουμε $I_{meter} = -1.5$ mA. Το ρεύμα από το αμπερόμετρο είναι:

$$I_m = \frac{v_o}{R_p + R_m} = -1.5 \Rightarrow R_p = 8167\ \Omega.$$

Για $I_m = -1$ A, η τάση εξόδου είναι $v_o = -9,667$ V και για

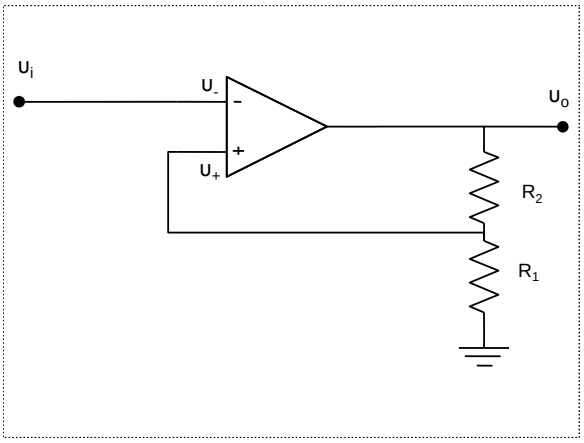


Σχήμα 2.11

$$i_{in} = 5 \text{ mA} = -\frac{\upsilon_o}{R_F}$$

$$\Rightarrow R_F = \frac{-\upsilon_o}{5 \text{ mA}} = \frac{8,667}{5 \times 10^{-3}} \ \Omega = 1,733 \ \Omega.$$

Πρόβλημα 2.12 Βρείτε το κέρδος (ενίσχυση) G του κυκλώματος του σχήματος (2.12). Υποθέστε ένα ιδανικό τελεστικό ενισχυτή.



Σχήμα 2.12

Λύση:
Από το κύκλωμα έχουμε τη σχέση:

$$\upsilon_+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2}\upsilon_o, \tag{2.0.14}$$

διότι αναλύουμε ένα διαιρέτη τάσης. Για ιδανικό τελεστικό ενισχυτή έχουμε:

$$\upsilon_+ = \upsilon_- = \upsilon_i. \tag{2.0.15}$$

Επομένως από τις σχέσεις (2.0.14) και(2.0.15) έπεται οτι:

$$v_i = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_o.$$

Έπομένως η ενίσχυση θα είναι:

$$G = \frac{v_o}{v_i} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1},$$

δηλαδή το κύκλωμα είναι ένας ενισχυτής με θετική ενίσχυση.

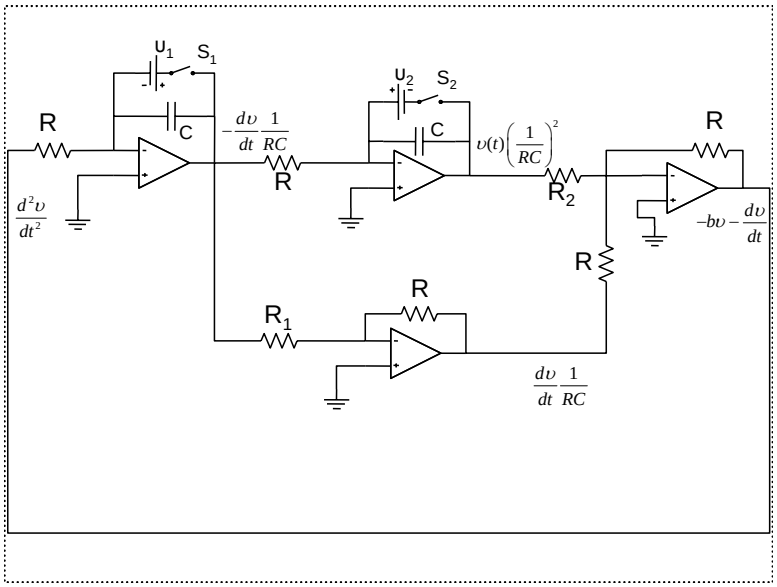
Πρόβλημα 2.13 Να επιλύσετε τη διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + a\frac{dv}{dt} + bv = 0,$$

με ένα σύνολο τελεστικών ενισχυτών, αντιστάσεων R και πυκνωτών χωρητικότητας C. Τα $a,\ b$ είναι σταθερές.
Λύση:
Παρατηρούμε οτι η διαφορική εξίσωση γράφεται ως:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = -a\frac{dv}{dt} - bv.$$

Το κύκλωμα που περιγράφει τη λύση της διαφορικής εξίσωσης δίνεται στο σχήμα (2.13). Από το σχήμα παρατηρούμε οτι:



Σχήμα 2.13

$$a = \frac{R}{R_1}\frac{1}{RC}, \qquad b = \frac{R}{R_2}\left(\frac{1}{RC}\right)^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{R_1 C}, \qquad b = \frac{1}{R R_2 C^2}.$$

Ο όρος d^2v/dt^2 οδηγείται σε ένα ολοκληρωτή με τελεστικό ενισχυτή 1 και μας δίνει ως έξοδο:

$$-\frac{1}{RC}\int \frac{d^2 v}{dt^2} dt = -\frac{1}{RC}\frac{dv}{dt},$$

το οποίο αποτελεί την είσοδο του ολοκληρωτή με τελεστικό ενισχυτή 2, με αποτέλεσμα να έχουμε έξοδο:

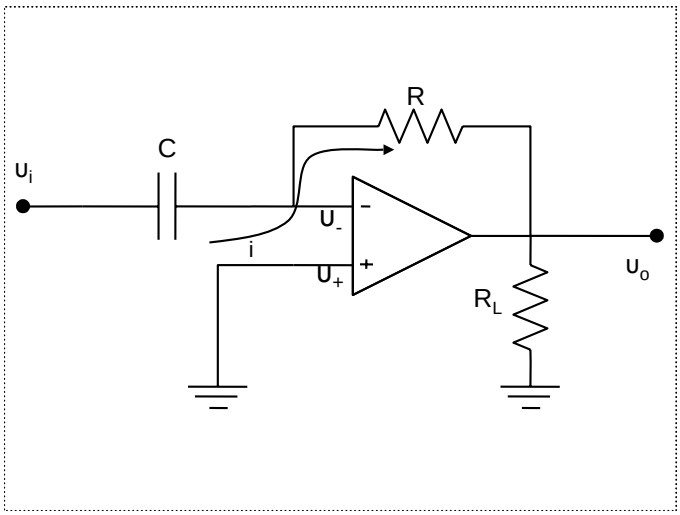
$$-\frac{1}{RC}\int\left(-\frac{dv}{dt}\frac{1}{RC}\right)=+\left(\frac{1}{RC}\right)^2 v(t).$$

Ο αντιστροφέας φάσης με τον τελεστικό ενισχυτή 3 μας δίνει:

$$-\left(\frac{1}{RC}\right)^2 v(t)\left(\frac{R}{R_2}\right), \quad \text{κ.λ.π}$$

Οι διακόπτες $S_1,\ S_2$ και οι αντίστοιχες τάσεις $V_1,\ V_2$ χρησιμποιούνται για να εισάγουμε τις αντίστοιχες συνθήκες. Οι διακόπτες ανοίγονται μόλις αρχίσει η λειτουργία του κυκλώματος.

Πρόβλημα 2.14 Βρείτε την τάση εξόδου του κυκλώματος του σχήματος (2.14) και δώστε ένα γράφημα της τάσης εξόδου $v_o(t)$ ως συνάρτηση του χρόνου για το σήμα εισόδου $v_i(t)$ του σχήματος (2.15). Θεωρήστε: $C = 1$ μF, $R = 10$ kΩ, $R_L = 1$ kΩ.



Σχήμα 2.14

Λύση:
Το κύκλωμα είναι ένας διαφοριστής, διότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$i=\frac{v_- - v_o}{R}, \quad v_+ = v_- = 0,$$

$$i = C\frac{d(v_i - v_-)}{dt} = C\frac{dv_i}{dt}.$$

Επομένως:

$$v_o = -RC\frac{dv_i}{dt}.$$

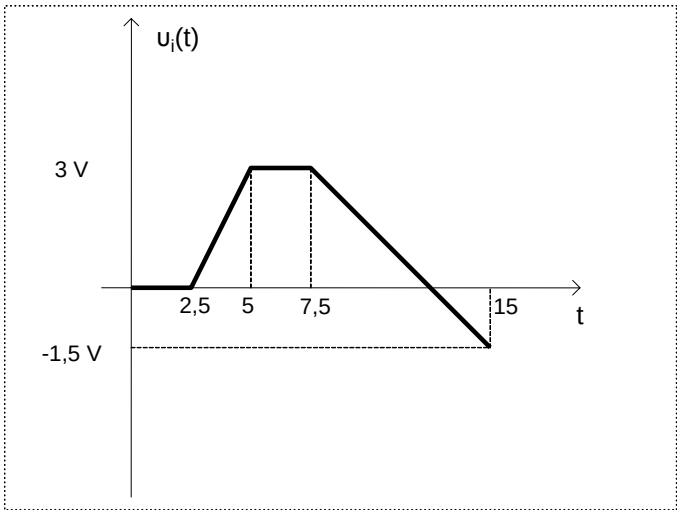
Άρα η παράγωγος είναι η κλίση για το σήμα εισόδου που φαίνεται στο σχήμα. Δηλαδή είναι μηδέν για:

$$t < 2,5 \text{ ms}, \qquad 5,0 \text{ ms} < t < 7,5 \text{ ms} \qquad \text{και} \qquad t > 15 \text{ ms}.$$

Για $2,5 \text{ ms} < t < 5 \text{ ms}$ το σήμα εξόδου είναι:

$$v_o(t) = (10\times 10^3)(1\times 10^{-6})\times\frac{3-0}{5\times 10^{-3} - 2.5\times 10^{-3}} = -12 \text{ V}.$$

Για $7,5 \text{ ms} < t < 15 \text{ ms}$ έχουμε:



Σχήμα 2.15

$$v_o(t) = -10 \times 10^3 \frac{(-1,5) - (+3)}{15 \times 10^{-3} - 7,5 \times 10^{-3}} = 6 \text{ V}.$$

Πρόβλημα 2.15 Με τη βοήθεια όχι περισσότερων από δύο τελεστικών ενισχυτών να σχεδιάσετε ένα κύκλωμα που να δέχεται τρεις εισόδους $v_1,\ v_2,\ v_3$ και μια σταθερή πηγή τάσης $+12$ V για να έχετε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$v_o = 3v_1 - 6v_2 + v_3 - 6.$$

Υπόδειξη: έχετε στη διάθεσή σας ένα σύνολο από αντιστάσεις.
Λύση:
Προφανώς το σήμα εξόδου v_o γράφεται ως εξής:

$$v_o = 3v_1 - 6v_2 + v_3 - 6 = v_3 + 3v_1 - 6v_2 - 6$$

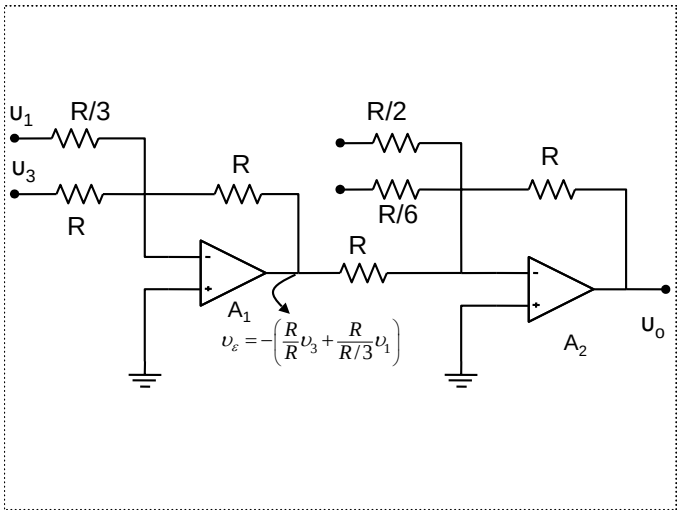
$$\Rightarrow v_o = -\left[-(3v_1 + v_3)\right] - \left[6v_2 + 6\right]$$

$$\Rightarrow v_o = -\left[\underbrace{-\left(v_1 \frac{R}{R/3} + v_3 \frac{R}{R}\right)}_{v_E}\right] - \left[v_2 \frac{R}{R/6} + 12 \frac{R}{R/2}\right],$$

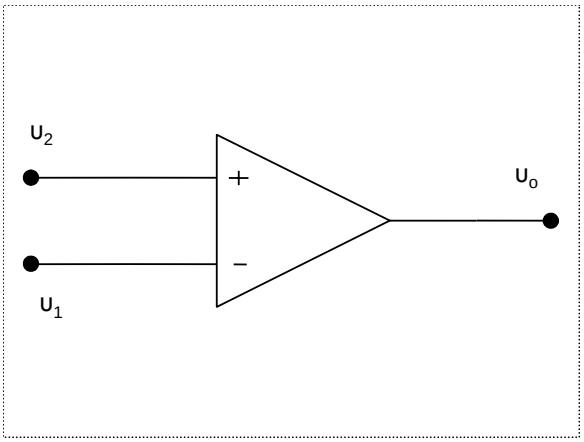
όπου R είναι μια τυχαία αντίσταση. Επομένως αν έχουμε δύο ιδανικούς τελεστικούς ενισχυτές $A_1,\ A_2$, μπορούμε να έχουμε δύο ανάστροφους ενισχυτές, όπως φαίνεται στο σχήμα (2.16).

Πρόβλημα 2.16 Δώστε ένα συγκριτή τάσης και εξηγήστε τη χρήση του.
Λύση:
Ένας τελεστικός ενισχυτής μπορεί να είναι ένας συγκριτής τάσης, καθότι ισχύει $v_o = A(v_2 - v_1)$ για v_o που είναι μικρότερο από μια οριακή τιμή, η οποία καθορίζεται από το τροφοδοτικό που χρειάζεται για τη λειτουργία του τελεστικού ενισχυτή. Μια τυπική τιμή γι' αυτό είναι $v_p = +12$ V. Το v_o μπορεί να ξεπεράσει αυτή την οριακή τιμή όταν:

$$v_2 - v_1 \geq \frac{v_p}{A} \cong \frac{12 \text{ V}}{10^6} = 12 \ \mu\text{V},$$



Σχήμα 2.16



Σχήμα 2.17

όπου A είναι η ενίσχυση του τελεστικού ενισχυτή. Επομένως θα έχουμε:

$$\upsilon_o = +\upsilon_L \quad \text{όταν} \quad \upsilon_2 > \upsilon_1 + \frac{\upsilon_p}{A},$$

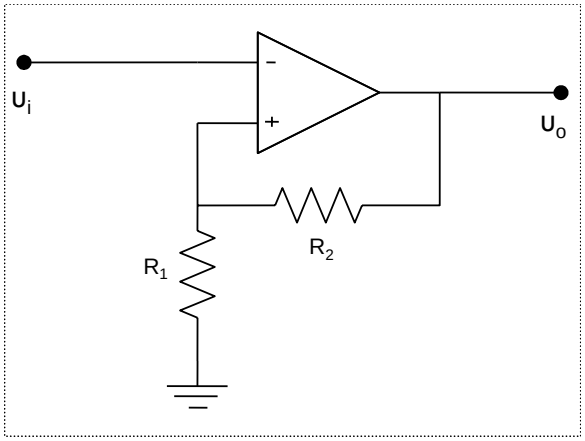
και

$$\upsilon_o = -\upsilon_L \quad \text{όταν} \quad \upsilon_2 > \upsilon_1 - \frac{\upsilon_L}{A}.$$

Αλλά η ποσότητα $\upsilon_L/A \cong 12$ μV, δηλαδή πολύ μικρή, επομένως το υ_o είναι το αποτέλεσμα της σύγκρισης του υ_2 με το υ_1. Δηλαδή:

$$\upsilon_o = \begin{cases} +\upsilon_L & \text{όταν} \quad \upsilon_2 > \upsilon_1, \\ -\upsilon_L & \text{όταν} \quad \upsilon_2 < \upsilon_1. \end{cases}$$

Πρόβλημα 2.17 Δώστε ένα κύκλωμα Schmitt Trigger και εξηγήστε τη χρήση του.
Λύση:



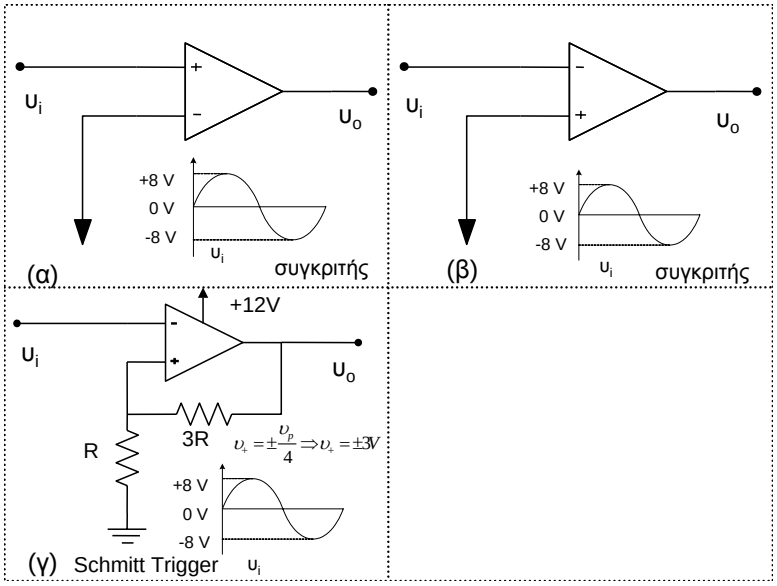
Σχήμα 2.18

Αυτό το κύκλωμα είναι το ίδιο με το συγκριτή τάσης, όπου η τάση που εφαρμόζεται στο θετικό ακροδέκτη του τελεστικού ενισχυτή υπολογίζεται από την έξοδο υ_o. Εφόσον η έξοδος είναι $\upsilon_o = \pm\upsilon_p$ (όπου υ_p είναι η οριακή τιμή που καθορίζεται από το τροφοδοτικό), θα ισχύει:

$$\upsilon_+ = \pm\upsilon_p \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

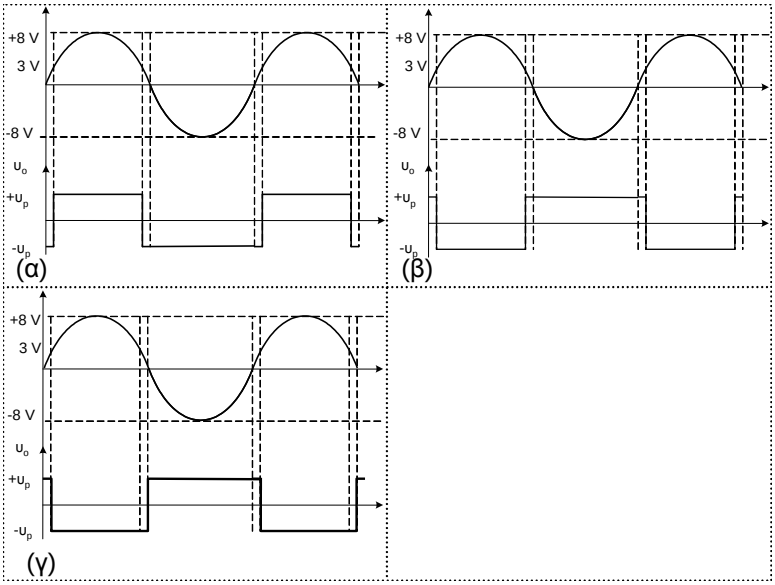
Η διαφορά του από το συγκριτή του προηγούμενου κυκλώματος είναι οτι το υ_i συγκρίνεται με διαφορετικές τάσεις σε κάθε νέα μετάπτωση. Ειδικότερα, για παράδειγμα σε κάποια στιγμή το υ_+ συγκρίνεται με το $+\upsilon_p(R_1/(R_1 + R_2))$ μέχρις ότου το υ_o κάνει τη μετάπτωση $+\upsilon_p \longrightarrow -\upsilon_p$ και μετέπειτα συγκρίνεται με το $-\upsilon_p R_1/(R_1 + R_2)$.

Πρόβλημα 2.18 Βρείτε τις εξόδους των κυκλωμάτων του σχήματος (2.19).



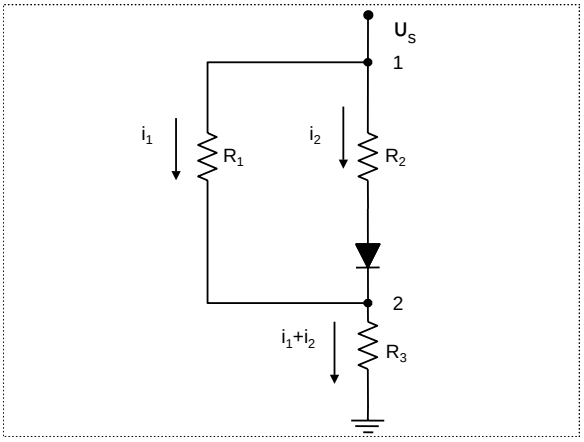
Σχήμα 2.19

Λύση:
Οι έξοδοι των κυκλωμάτων του σχήματος (2.19) απεικονίζονται στο σχήμα (2.20).



Σχήμα 2.20

Πρόβλημα 2.19 Για το κύκλωμα του σχήματος (2.21), βρείτε το ρεύμα που διαρρέει τη δίοδο D. Θεωρήστε $R_1 = R_2 = 1$ kΩ, $R_3 = 2$ kΩ και $v_S = 10$ V, και τάση διόδου $v_D = 0,7$ V.



Σχήμα 2.21

Λύση:
Προφανώς η τάση στα άκρα του R_1 είναι ίση με την τάση στα άκρα του R_2 και της διόδου D.

$$i_1 R_1 = i_2 R_2 + v_D$$
$$\Rightarrow i_1 = \frac{R_2}{R_1} i_2 + \frac{v_D}{R_1}. \tag{2.0.16}$$

Επιπλέον η τάση εισόδου v_S είναι:

$$v_S = R_1 i_1 + R_3(i_1 + i_2). \tag{2.0.17}$$

Από τις σχέσεις (2.0.16) και (2.0.17) προκύπτει:

$$R_2 i_2 + v_D + \frac{R_3 R_2}{R_1} i_2 + \frac{R_3}{R_1} v_D + R_3 i_2 = v_S$$

$$\Rightarrow \left(R_2 + R_3 + \frac{R_3 R_2}{R_4} \right) i_2 = v_S - \left(1 + \frac{R_3}{R_1} \right) v_D$$

$$\Rightarrow 5 i_2 = v_S - 3 v_D$$

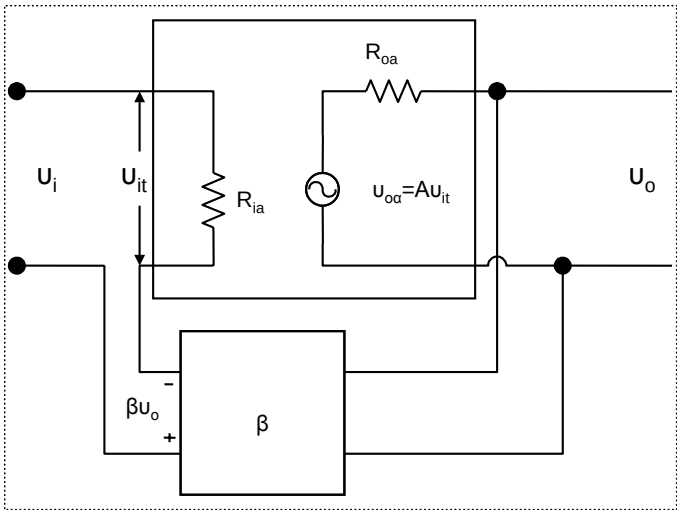
$$\Rightarrow i_2 = \frac{v_S - 3 v_D}{5 \text{ k}\Omega} = 1,58 \text{ mA}.$$

Πρόβλημα 2.20 Θεωρήστε έναν ενισχυτή με ανάδραση, όπως φαίνεται στο σχήμα (2.22).
(α) Δείξτε οτι η ενίσχυση του κυκλώματος είναι:

$$G = \frac{v_o}{v_i} = \frac{A}{1 - \beta A}.$$

(β) Δείξτε οτι η αντίσταση εισόδου του κυκλώματος είναι:

$$R_i = \frac{v_i}{i_i} = R_{ia}(1 - \beta A).$$



Σχήμα 2.22

Λύση:
(α)

Από τους δύο βρόχους του κυκλώματος θα έχουμε τις εξισώσεις:

$$v_i = -\beta v_o + v_{it}$$

$$\Rightarrow v_{it} = v_i + \beta v_o.$$

Επομένως το σήμα εξόδου θα είναι:

$$v_o = A v_{it} = A(v_i + \beta v_o)$$

$$\Rightarrow v_o(1 - A\beta) = A v_i.$$

Άρα η ενίσχυση του κυκλώματος θα είναι:

$$G = \frac{v_o}{v_i} = \frac{A}{1-\beta A}.$$

(β)

Για το ρεύμα εισόδου έχουμε:

$$i_i = \frac{v_{it}}{R_{ia}}.$$

Επίσης ισχύει:

$$v_{it} = v_i + \beta v_o = v_i + \beta G v_i = v_i \left(1 - \frac{\beta A}{1-\beta A}\right)$$

$$\Rightarrow v_{it} = \frac{1}{1-\beta A} v_i.$$

Η αντίσταση εισόδου R_i είναι:

$$R_i = \frac{v_i}{i_i} = \frac{v_i}{v_{it}} R_{ia}$$

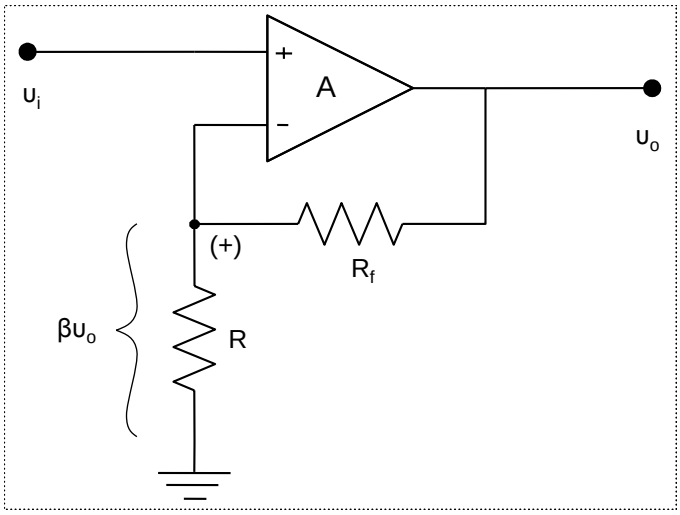
$$\Rightarrow R_i = R_{ia} \frac{v_{in}}{v_{in}\left(\frac{1}{1-\beta A}\right)}.$$

$$\Rightarrow R_i = R_{ia}(1-\beta A).$$

Πρόβλημα 2.21 Σχεδιάστε ένα τελεστικό ενισχυτή μη αναστροφής, αναγνωρίστε τον παράγοντα ανάδρασης β ως συνάρτηση των αντιστάσεων R και δείξτε οτι η ενίσχυσή του είναι:

$$G = \frac{v_o}{v_i} = \frac{A}{1 + AR_1/(R_1+R_2)}.$$

Επίσης δείξτε οτι αυτή η έκφραση μας δίνει την ακριβή λύση που ήδη έχετε δει για την περίπτωση που $A \longrightarrow \infty$.
Λύση:
Το κύκλωμα ενός τελεστικού ενισχυτή μη αναστροφής δίνεται στο κύκλωμα του σχήματος (2.23).



Σχήμα 2.23

Από το διαιρέτη τάσης, έχουμε:

$$-\beta v_o = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_f}\right) v_o.$$

Επομένως, ο παράγοντας της ανάδρασης θα είναι:

$$\beta = \frac{R_1}{R_1 + R_f}.$$

Προφανώς η τάση εισόδου είναι:

$$v_i = v_{it} + \beta v_o$$

$$\Rightarrow v_{1t} = v_i - \beta v_o.$$

Επιπλέον ισχύει:

$$v_o = A v_{1t} = A(v_i - \beta v_o)$$

$$\Rightarrow v_o = v_i \frac{A}{1 + \beta A}$$

$$\Rightarrow G = \frac{v_o}{v_i} = \frac{A}{1 + \beta A} = \frac{A}{1 + A\left(\dfrac{R_L}{R_i + R_f}\right)}.$$

Παρατηρούμε οτι:

$$\lim_{A\to\infty} G = \lim_{A\to\infty} \frac{A}{1 + \beta A} = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{\beta + 1/A} = \frac{1}{\beta}.$$

Επομένως:

$$\lim_{A\to\infty} G = \frac{1}{\beta} = \frac{R_1 + R_f}{R_1} = 1 + \frac{R_f}{R_i},$$

που είναι η γνωστή σχέση της ενίσχυσης ενός κυκλώματος με αναστροφέα που περιέχει ένα ιδανικό τελεστικό ενισχυτή.

Πρόβλημα 2.22 Βρείτε την τάση εξόδου του κυκλώματος του σχήματος (2.24) ως συνάρτηση των v_1, v_2, θεωρώντας τους τελεστικούς ενισχυτές ιδανικούς.
Λύση:
Από το κύκλωμα, και θεωρώντας ιδανικούς τελεστικούς ενισχυτές, έχουμε:

$$i_1 = \frac{v_1}{R_1}, \qquad i_2 = i_1, \qquad v_3 = -R_2 i_2.$$

Επομένως, συνδυάζοντας τις τρεις αυτές εξισώσεις θα έχουμε:

$$v_3 = -\frac{R_2}{R_1} v_1 = -2v_1.$$

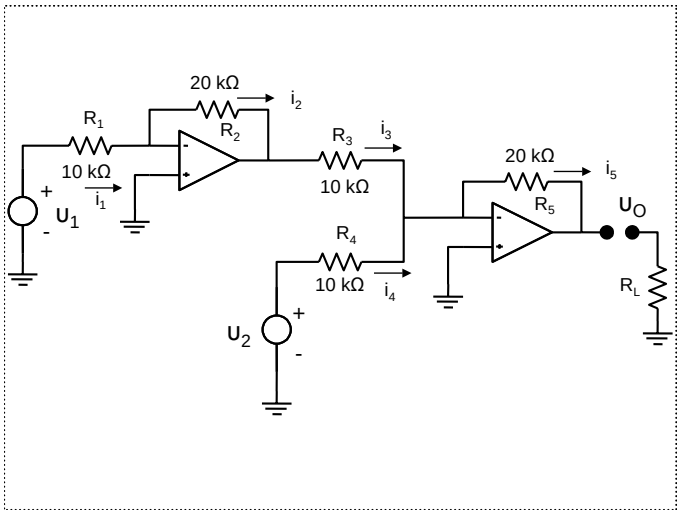
Επιπλέον θα ισχύουν οι εξισώσεις:

$$i_3 = \frac{v_3}{R_3}, \qquad i_4 = \frac{v_2}{R_4}, \qquad i_5 = i_3 + i_4, \qquad v_o = -R_5 i_5.$$

Συνδυάζοντας αυτές τις εξισώσεις θα έχουμε:

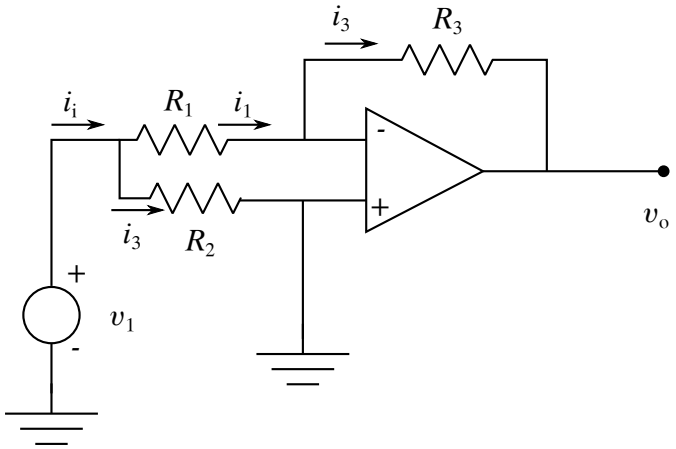
$$v_o = -\frac{R_5}{R_4} v_2 + \frac{R_2 R_5}{R_1 R_3} v_1$$

$$\Rightarrow v_o = 4v_1 - 2v_2.$$



Σχήμα 2.24

Πρόβλημα 2.23 Βρείτε την ενίσχυση τάσης $A_\upsilon = \upsilon_o/\upsilon_i$ και την αντίσταση εισόδου $R_i = \upsilon_i/i_i$ του κυκλώματος του σχήματος (2.25). Υποθέστε $R_1 = R_2 = R_3 = R$.



Σχήμα 2.25

Λύση:
Για το κύκλωμα θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$i_3 = i_1 = \frac{\upsilon_i}{R_1}, \qquad \upsilon_o = -R_3 i_3,$$

από τις οποίες προκύπτει οτι:

$$\upsilon_o = -\frac{R_3}{R_1}\upsilon_i$$

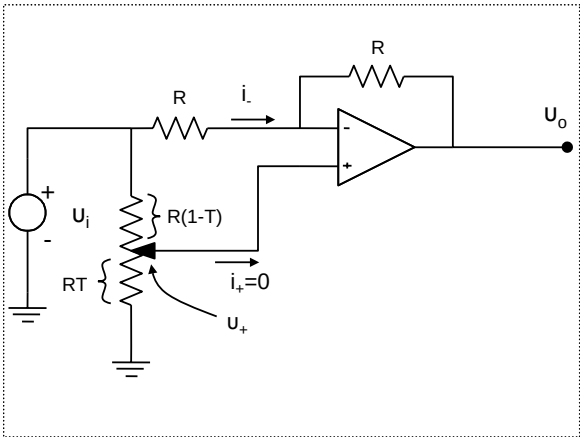
$$\Rightarrow A_\upsilon = \frac{\upsilon_o}{\upsilon_i} = -\frac{R_3}{R_1} = -1.$$

Η αντίσταση εισόδου θα είναι:

$$R_i = \frac{v_i}{i_i} = \frac{v_i}{i_1 + i_2} = \frac{v_i}{\frac{v_i}{R_1} + \frac{v_i}{R_2}}$$

$$\Rightarrow R_i = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R}{2}.$$

Πρόβλημα 2.24 Βρείτε το κέρδος τάσης ως συνάρτηση του T ($0 \leqq T \leqq 1$) για το κύκλωμα του σχήματος (2.26). Υποθέστε ιδανικό τελεστικό ενισχυτή.



Σχήμα 2.26

Λύση:
Από το διαιρέτη τάσης μεταξύ των αντιστάσεων RT και $R(1-T)$ θα έχουμε για την τάση v_+:

$$v_+ = \frac{RT}{R(1-T) + RT} v_i = v_i T.$$

Για ιδανικό τελεστικό ενισχυτή ισχύει:

$$v_+ = v_-.$$

Για το i_- έχουμε:

$$i_- = \frac{v_i - v_-}{R} = \frac{v_i}{R}(1-T).$$

Η τάση εξόδου θα είναι:

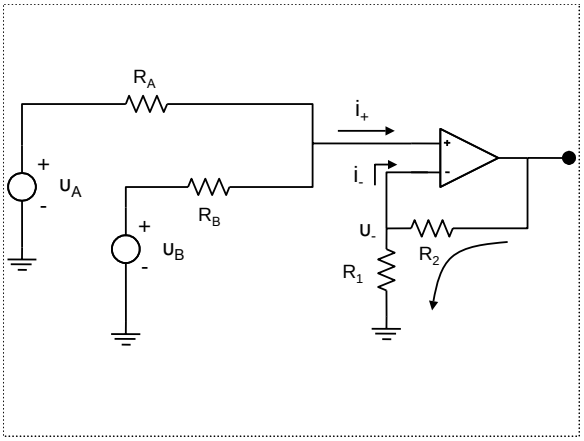
$$v_o = -Ri_- + v_- = -v_i(1-T) + v_i T = v_i(2T-1).$$

Επομένως η ενίσχυση τάσης θα είναι:

$$A_v = \frac{v_o}{v_i} = 2T - 1.$$

Πρόβλημα 2.25 Βρείτε την τάση εξόδου, v_o, του κυκλώματος του σχήματος (2.27) ως συνάρτηση των αντιστάσεων και των τάσεων εισόδου v_A, v_B. Θεωρήστε ιδανικούς τελεστικούς ενισχυτές.
Λύση:
Για ιδανικό τελεστικό ενισχυτή το ρεύμα εισόδου είναι:

$$i_- = 0 = i_+ \quad \text{και} \quad v_- = v_+.$$



Σχήμα 2.27

Επομένως, θα έχουμε:

$$\frac{v_+ - v_A}{R_A} + \frac{v_+ - v_B}{R_B} = 0$$

$$\Rightarrow v_- = \frac{v_A R_B + v_B R_A}{R_A + R_B}. \tag{2.0.18}$$

Από το διαιρέτη τάσης μεταξύ των αντιστάσεων $R_1,\ R_2$ θα έχουμε:

$$v_- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_o. \tag{2.0.19}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.0.18) και (2.0.19) θα πάρουμε:

$$v_o = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{v_A R_B + v_B R_A}{R_A + R_B}$$

$$\Rightarrow v_o = A_A v_A + A_B v_B,$$

όπου

$$A_A = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{R_B}{R_A + R_B},$$

και

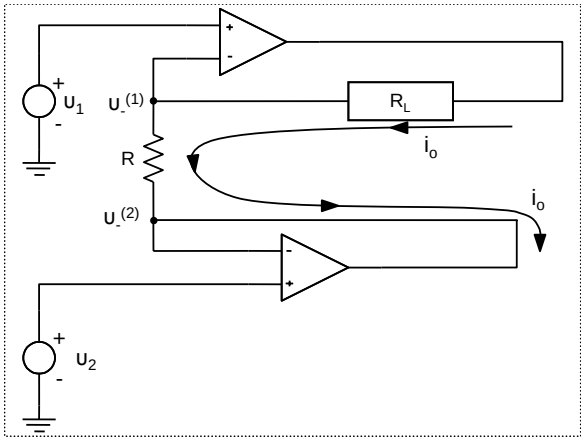
$$A_B = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{R_A}{R_A + R_B}.$$

Πρόβλημα 2.26 Βρείτε το ρεύμα i_o που διαρρέει την αντίσταση φόρτου R_L, όπως φαίνεται στο κύκλωμα του σχήματος (2.28), ως συνάρτηση των αντιστάσεων και των τάσεων $v_1,\ v_2$. Εξαρτάται από την αντίσταση φόρτου R_L; Ποιά είναι η αντίσταση εξόδου όπως φαίνεται από τη θέση της αντίσταση φόρτου R_L; Θεωρήστε ιδανικούς τελεστικούς ενισχυτές.

Λύση:

Εφόσον έχουμε ιδανικούς τελεστικούς ενισχυτές, τα ρεύματα εισόδου στους ενισχυτές είναι μηδέν. Επομένως το ρεύμα i_o θα διαρρέει μόνο την αντίσταση R καθώς και την αντίσταση φόρτου R_L. Επομένως το ρεύμα i_o θα εκφράζεται μέσω της πτώσης τάσης στα άκρα της R:

$$v_-^{(1)} - v_-^{(2)} = i_o R$$



Σχήμα 2.28

$$\Rightarrow i_o = \frac{v_-^{(1)} - v_-^{(2)}}{R}. \tag{2.0.20}$$

Επιπλέον, για τις τάσεις στα άκρα των ιδανικών τελεστικών ενισχυτών ισχύει:

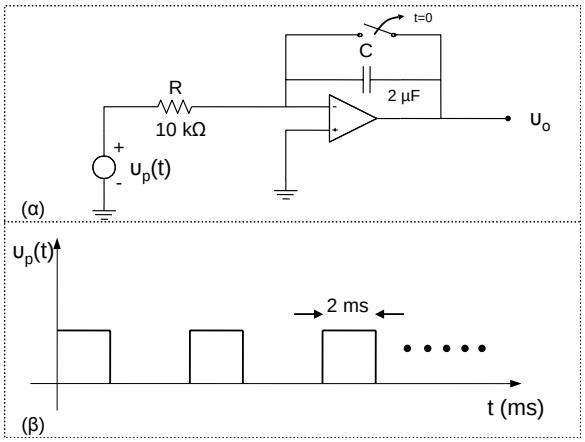
$$v_-^{(1)} = v_1 \quad \text{και} \quad v_i^{(2)} = v_2. \tag{2.0.21}$$

Επομένως από τις σχέσεις (2.0.20) και (2.0.21) θα έχουμε:

$$i_o = \frac{v_1 - v_2}{R},$$

δηλαδή το ρεύμα i_o είναι ανεξάρτητο της αντίστασης φόρτου R_L. Εφόσον το ρεύμα i_o είναι ανεξάρτητο της αντίστασης φόρτου R_L, συμπεραίνουμε οτι η αντίσταση εξόδου είναι άπειρη.

Πρόβλημα 2.27 Δώστε ένα γράφημα για την τάση εξόδου v_o του κυκλώματος του σχήματος (2.29α) για ένα σήμα εισόδου v_i, όπως φαίνεται στο σχήμα (2.29β). Μερικές φορές ένα τέτοιο κύκλωμα χρησιμοποιείται για την καταμέτρηση παλμών. Υποθέστε οτι η ελάχιστη τάση εξόδου του τελεστικού ενισχυτή είναι -10 V. Πόσους παλμούς μπορεί να καταμετρήσει το κύκλωμα μας; Θεωρήστε ιδανικό τελεστικό ενισχυτή.



Σχήμα 2.29

Λύση:
Το κύκλωμα αυτό είναι ένας ολοκληρωτής με τάση εξόδου:

$$\upsilon_o = -\frac{1}{RC}\int_0^t \upsilon_p(t)dt = -50\int_0^t \upsilon_p(t)dt,$$

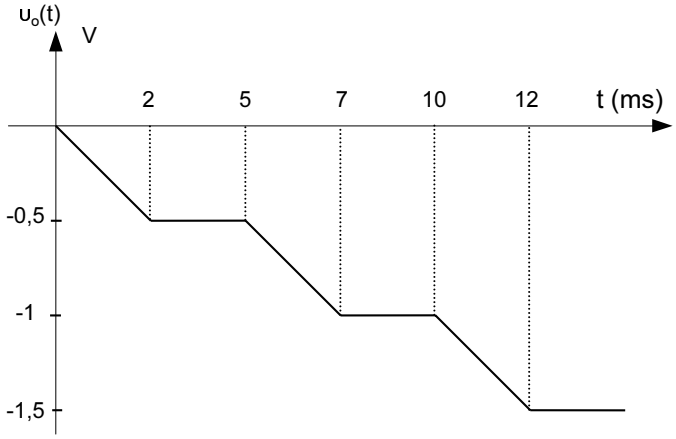
όπου

$$RC = (10\ \text{k}\Omega)(2\ \mu\text{F}) = 20\ \text{ms}.$$

Επομένως, για την ολοκλήρωση του πρώτου παλμού θα έχουμε:

$$\upsilon_o = -50\int_0^{2\ \text{ms}} (5\ \text{V})dt = -0,5\ \text{V}.$$

Η συνολική τάση εξόδου υ_o δίνεται στο σχήμα (2.30). Επομένως κάθε παλμός θα μειώνεται κατά $-0,5$ V. Δηλαδή για να φτάσουμε τα -10 V θα πρέπει να έχουν καταμετρηθεί 20 παλμοί.



Σχήμα 2.30

Πρόβλημα 2.28 Δώστε ένα γράφημα για την τάση εξόδου $\upsilon_o(t)$ του κυκλώματος του σχήματος (2.31α) για το σήμα εισόδου του σχήματος (2.31β). Θεωρήστε ένα ιδανικό τελεστικό ενισχυτή.
Λύση:
Το κύκλωμα είναι ένα κύκλωμα διαφοριστή με τάση εξόδου:

$$\upsilon_o = -RC\frac{d\upsilon_i}{dt} = -10^{-3}\frac{d\upsilon_i}{dt}.$$

Επομένως η τάση εξόδου υ_o είναι αυτή που απεικονίζεται στο σχήμα (2.32).

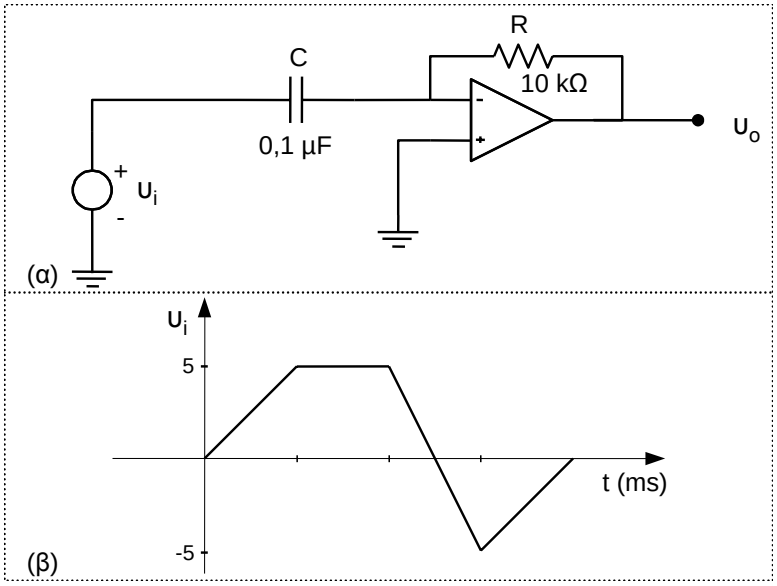
Πρόβλημα 2.29 Για το κύκλωμα του σχήματος (2.33), βρείτε την εξίσωση που συσχετίζει την τάση εισόδου υ_i με την τάση εξόδου υ_o και τις παραμέτρους $R,\ L,\ C$.
Λύση:
Προφανώς θα έχουμε:

$$i_1 = i_2 + i_3, \tag{2.0.22}$$

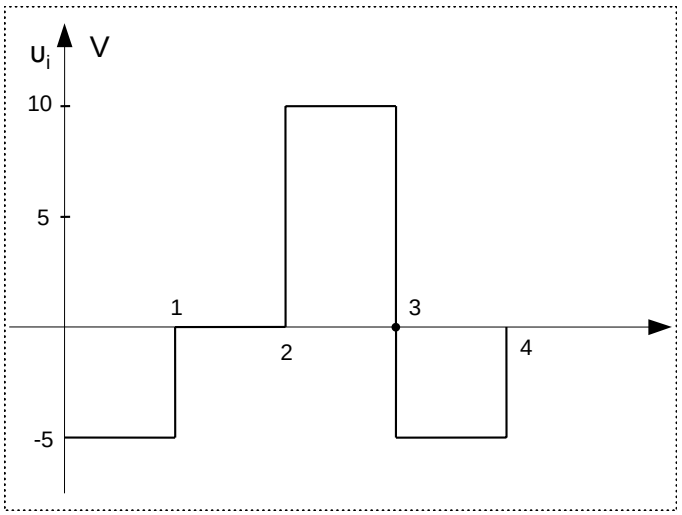
και για ιδανικό τελεστικό ενισχυτή, ισχύει:

$$\upsilon_- = \upsilon_+ = 0,$$

$$i_1 = \frac{\upsilon_i - \upsilon_-}{R} = \frac{\upsilon_i}{R}, \tag{2.0.23}$$



Σχήμα 2.31



Σχήμα 2.32

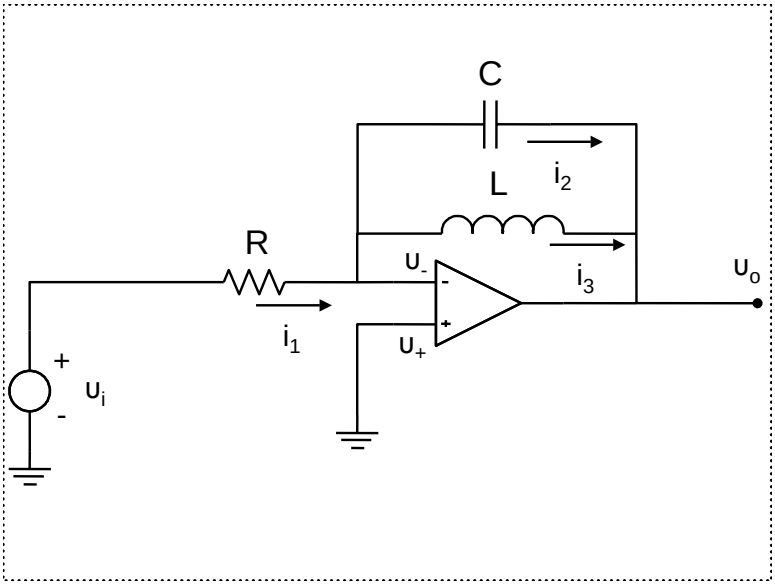
$$i_2 = C\frac{\mathrm{d}(\upsilon_- - \upsilon_o)}{\mathrm{d}t} = -C\frac{\mathrm{d}\upsilon_o}{\mathrm{d}t}, \tag{2.0.24}$$

$$i_3 = \frac{1}{L}\int(\upsilon_- - \upsilon_o)\mathrm{d}t = -\frac{1}{L}\int \upsilon_o \mathrm{d}t \tag{2.0.25}$$

Από τις σχέσεις (2.0.22), (2.0.23), (2.0.24) και (2.0.25) θα έχουμε

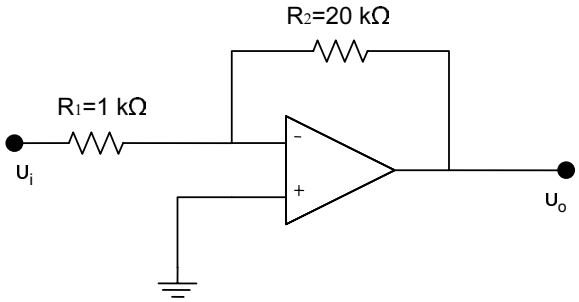
$$\frac{\upsilon_i}{R} = -C\,\frac{\mathrm{d}\upsilon_o}{\mathrm{d}t} - \frac{1}{L}\int \upsilon_o \mathrm{d}t.$$

Πρόβλημα 2.30 Δίνεται ο ενισχυτής του σχήματος (2.34). Η συχνότητα καμπής του τελεστικού ενισχυτή (κύκλωμα ανοιχτού βρόχου) είναι $f_b = 20$ Hz. Η ενίσχυση (απολαβή) του τελεστικού ενισχυτή (κύκλωμα



Σχήμα 2.33

ανοιχτού βρόχου για χαμηλές συχνότητες, $\omega \approx 0$) είναι $A_0 = 100000$. Να υπολογιστεί η τιμή της ενίσχυσης A_0' του κυκλώματος κλειστού βρόχου ($\omega = 0$). Να υπολογιστεί για το κύκλωμα του ενισχυτή κλειστού βρόχου η συχνότητα καμπής f_b'.



Σχήμα 2.34

Λύση:
Για $f_b = 20$ Hz, έχουμε:

$$\omega_b = 2\pi \times 20 \text{ Hz} = 125,6 \text{ rad/s}$$

$$\omega_f = \omega_b A_0 = 125,6 \times 100000 \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow \omega_f = 1,26 \times 10^7 \text{ rad/s}.$$

Γνωρίζουμε οτι η ενίσχυση $A_f(\omega)$ είναι:

$$A_f(\omega) = -\frac{R_2/R_1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_b A_0/(1 + R_2/R_1)}}$$

$$\Rightarrow A'(0) = -R_2/R_1 = 20,$$

$$\omega_b' = \frac{\omega_f}{1 + R_2/R_1} = \frac{1,26 \times 10^7 \text{ rad/s}}{1 + 20} = 6 \times 10^5 \text{ rad/s},$$

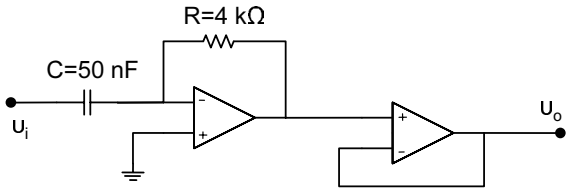
και

$$f_b' = \frac{\omega_b'}{2\pi} = 0,55 \times 10^4 \text{ Hz}.$$

Πρόβλημα 2.31 Δίνεται η διάταξη του σχήματος (2.35). Οι τελεστικοί ενισχυτές να θεωρηθούν ιδανικοί. Δίνεται οτι η τάση εισόδου είναι:

$$v_i = 1,0 \cos(2\pi \times 10^3 t + \pi/4)$$

όπου το v_i είναι σε volt και τ[illegible] ιρτηση του χρόνου.



Σχήμα 2.35

Λύση:
Το κύκλωμα αποτελείται από ένα διαφοριστή (στο πρώτο μέρος του κυκλώματος) και ένα ακολουθητή. Ο διαφοριστής θα μας δώσει:

$$v_o' = -RC\frac{dv_i}{dt}$$

$$\Rightarrow v_o' = 4 \times 10^3 \times 50 \times 10^{-9} \times 1,0 \times 20 \times 10^3 \sin(2\pi \times 10^3 t + \pi/4)$$

$$\Rightarrow v_o' = 1,256 \sin(2\pi \times 10^3 t + \pi/4),$$

και ο ακολουθητής απλά θα μεταφέρει το v_o' στην έξοδό του, με αποτέλεσμα η έξοδος του κυκλώματος να είναι:

$$v_o = v_o' = 1,256 \sin(2\pi \times 10^3 t + \pi/4).$$

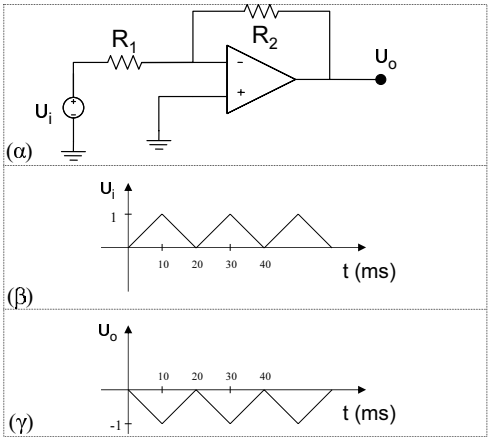
Πρόβλημα 2.32 Δίνεται το κύκλωμα ενισχυτή του σχήματος (2.36α). Να βρεθεί η τιμή της ενίσχυσης τάσης και να σχεδιαστεί η τάση εξόδου v_o, ως συνάρτηση του χρόνου, αν η τάση εισόδου v_i είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα (2.36β)
Λύση:
Η ενίσχυση είναι:

$$A_f = \frac{v_o}{v_i} = -\frac{R_2}{R_1} = -1$$

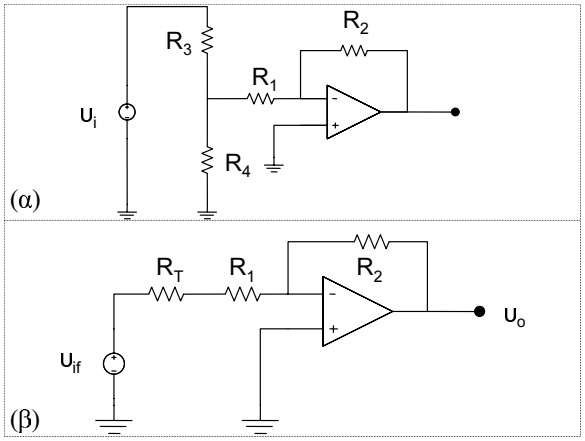
$$\Rightarrow v_o = A_f v_i = -v_i.$$

Επομένως η έξοδος δίνεται στο σχήμα (2.36γ).

Πρόβλημα 2.33 Δίνεται η διάταξη του σχήματος (2.37α). Ο τελεστικός ενισχυτής είναι ιδανικός. Να βρεθεί η τιμή της ενίσχυσης τάσης.
Λύση:



Σχήμα 2.36



Σχήμα 2.37

Το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin είναι στο σχήμα (2.37β) με τάση και αντίσταση Thevenin:

$$v_{if} = v_i \frac{R_4}{R_3 + R_4} \quad , \quad R_T = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}.$$

Η ενίσχυση A'_f είναι:

$$A'_f = \frac{v_o}{v_{if}} = -\frac{R_2}{R_1 + R_T} = -\frac{R_2}{R_1 + R_3 R_4/(R_3 + R_4)}$$

$$\Rightarrow \frac{v_o}{v_i R_4/(R_3 + R_4)} = -\frac{R_2}{R_1 + \dfrac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}}.$$

$$\Rightarrow \frac{v_o}{v_i} = -\frac{R_2 \dfrac{R_4}{R_3 + R_4}}{R_1 + \dfrac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}}$$

Επομένως, η ενίσχυση του κυκλώματος είναι:

$$A_f = \frac{v_o}{v_i} = -\frac{R_2 R_4/(R_3 + R_4)}{R_1 + \dfrac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}}.$$

$$\Rightarrow A_f = 0,667.$$

Πρόβλημα 2.34 Έστω ο αναστρέφων τελεστικός ενισχυτής με ανασύζευξη του σχήματος (2.38). Έστω οτι η ενίσχυση ανοικτού βρόχου είναι:

$$A = \frac{A_o}{1 + j\omega/\omega_b}, \quad a_o > 0,\ \omega, \omega_b \epsilon\ \mathbb{R}.$$

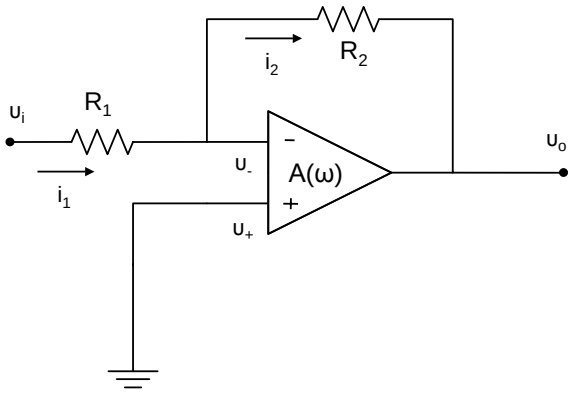
Να δείξετε οτι η ενίσχυση του κυκλώματος είναι

$$A_f(\omega) = -\frac{A'_o}{1 + \omega/\omega'_b}$$

όταν

$$A_o \gg 1 + \frac{R_2}{R_1}.$$

Προσδιορίστε τα A'_o και ω'_b. Δηλαδή είναι ένα βαθυπερατό φίλτρο.



Σχήμα 2.38

Λύση:
(α)

Ιδανική περίπτωση, A άπειρο:
Αν ο τελεστικός ενισχυτής είναι ιδανικός τότε $A = \infty$ και $v_{-+} = -v_o/A = 0$ (αφού το v_o είναι πεπερασμένο). Αυτό λέγεται συνθήκη εικονικού βραχυκυκλώματος ή εικονικής γείωσης. Επίσης το ρεύμα μέσα στην είσοδο του τελεστικού ενισχυτή είναι μηδέν, αφού η αντίσταση εισόδου του είναι άπειρη.
Έχουμε επομένως:

$$i_1 = i_2, \quad i_1 = \frac{v_i}{R_1}, \quad i_2 = -\frac{v_o}{R_2},$$

άρα

$$\frac{v_i}{R_1} = -\frac{v_o}{R_2},$$

επομένως η ενίσχυση A_f, με ανασύζευξη, είναι:

$$A_f = \frac{v_o}{v_i} = -\frac{R_2}{R_1} = -A'_o, \quad a'_o > 0.$$

(β)

Μη ιδανική περίπτωση, A πεπερασμένο:
Αν το A δεν είναι άπειρο, τότε:

$$i_1 = \frac{v_i - v_{-+}}{R_1} = \frac{v_i - \left(-\frac{v_o}{A}\right)}{R_1} = \frac{v_i + -\frac{v_o}{A}}{R_1}$$

και

$$v_o = v_{-+} - i_1 R_2 = -\frac{v_o}{A} - i_1 R_2$$

άρα

$$v_o = -\frac{v_o}{A} - \frac{v_i + \frac{v_o}{A}}{R_1} R_2.$$

Τελικώς:

$$A_f = \frac{v_o}{v_i} = -\frac{R_2/R_1}{1 + (1 + R_2/R_1)/A}.$$

Όμως,

$$A = A(\omega) = \frac{A_o}{1 + j\omega/\omega_b},$$

άρα

$$A_f(\omega) = -\frac{R_2/R_1}{1 + \frac{(1 + R_2/R_1)}{A_o}(1 + j\omega/\omega_b)} \quad \text{ή}$$

$$A_f(\omega) = -\frac{R_2/R_1}{1 + (1 + R_2/R_1)/A_o + (1 + R_2/R_1)(j\omega/\omega_b A_o)}$$

Στην πράξη πάντοτε $A_o \gg 1 + R_2/R_1$, επομένως:

$$A_f(\omega) = -\frac{R_2/R_1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_b A_o/(1 + R_2/R_1)}} = -\frac{A'_o}{1 + \frac{j\omega}{\omega_b A_o/(1 + R_2/R_1)}},$$

όπου $A'_o = R_2/R_1$ είναι η ενίσχυση κλειστού βρόχου για $\omega = 0$. Προφανώς αν το A_o τείνει στο άπειρο καταλήγουμε στην προηγούμενη ιδανική περίπτωση.
Έστω $A_o\omega_b = \omega_t$, το ω_t λέγεται γινόμενο ενίσχυσης-εύρους ζώνης (συχνοτήτων) (gain-bandwidth product) και είναι κατασκευαστικό στοιχείο του τελεστικού ενισχυτή. Τότε έχουμε:

$$A_f(\omega) = -\frac{A'_o}{1 + \frac{j\omega}{\omega_t/(1 + R_2/R_1)}}.$$

Αν θέσουμε

$$\omega'_b = \frac{\omega_t}{1 + R_2/R_1},$$

βρίσκουμε τη σχέση:

$$A_f(\omega) = -\frac{A'_o}{1 + j\omega/\omega'_b}.$$

Αυτή η μορφή είναι ίδια με αυτή του ανοιχτού βρόχου (βαθυπερατό φίλτρο) αλλά με συχνότητα καμπής την ω'_b. Προφανώς ισχύει:

$$\omega_t = \omega'_b (1 + A'_o).$$

Πρόβλημα 2.35 Έστω ο μη-αναστρέφων τελεστικός ενισχυτής με ανασύζευξη του σχήματος (2.39). Έστω οτι η ενίσχυση ανοικτού βρόχου είναι:

$$A = \frac{A_o}{1 + j\omega/\omega_b}, \quad a_o > 0,\ \omega, \omega_b \epsilon\ \mathbb{R}.$$

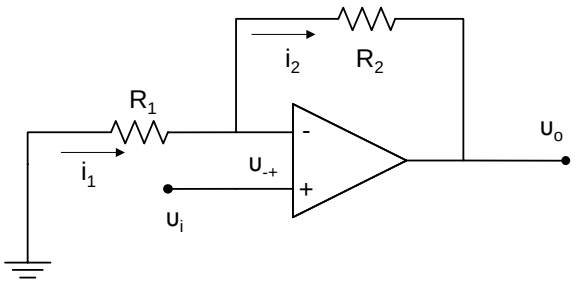
Να δείξετε οτι η ενίσχυση του κυκλώματος είναι

$$A_f(\omega) = -\frac{A'_o}{1 + \omega/\omega'_b}$$

όταν

$$A_o \gg 1 + \frac{R_2}{R_1}.$$

Προσδιορίστε τα A'_o και ω'_b. Δ:



Σχήμα 2.39

Λύση:
(α)

Ιδανική περίπτωση, A άπειρο:
Η ενίσχυση ανοιχτού βρόχου είναι άπειρη, η εσωτερική αντίσταση είναι επίσης άπειρη και έχουμε εικονικό βραχυκύκλωμα στην είσοδο. Έχουμε επομένως, ανάλογα με τα προηγούμενα:

$$v_{+-} = \frac{v_o}{A} = 0, \quad i_1 = i_2, \quad i_1 = -\frac{v_i}{R_1}, \quad i_2 = \frac{v_i - v_o}{R_2},$$

άρα

$$-\frac{v_i}{R_1} = \frac{v_i - v_o}{R_2}.$$

Επομένως η σχέση για την ενίσχυση είναι:

$$A_f = \frac{v_o}{v_i} = 1 + \frac{R_2}{R_1} = A'_o.$$

(β)

Μη ιδανική περίπτωση, A πεπερασμένο:
Εφόσον το A είναι πεπερασμένο, έχουμε:

$$i_1 = -\frac{v_i - v_{+-}}{R_1}, \quad i_2 = -\frac{v_o - (v_i - v_{+-})}{R_2},$$

άρα, και αφού $i_1 = i_2$, θα έχουμε:

$$\frac{v_i - v_{+-}}{R_1} = \frac{v_o - (v_i - v_{+-})}{R_2} \quad \text{επομένως} \quad \frac{v_i - v_o/A}{R_1} = \frac{v_o - (v_i - v_o/A)}{R_2}.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει για την ενίσχυση η σχέση:

$$A_f = \frac{V_o}{v_i} = \frac{1 + R_2/R_1}{1 + (1 + R_2/R_1)/A} = \frac{A'_o}{1 + (1 + R_2/R_1)/A},$$

όπου A'_o η ενίσχυση κλειστού βρόχου για $\omega = 0$.
Παρατηρούμε οτι αν το A είναι άπειρο τότε καταλήγουμε στη σχέση για την ιδανική περίπτωση. Όπως πριν, αντικαθιστούμε το A με το $A(\omega)$ και λαμβάνουμε υπόψη οτι $A_o \gg 1 + R_2/R_1$, οπότε καταλήγουμε στη σχέση:

$$A_f = \frac{A'_b}{1 + \dfrac{j\omega}{\omega_t/(1 + R_2/R_1)}} = \frac{A'_o}{1 + j\omega/\omega'_b} \quad \text{(βαθυπερατό φίλτρο)}.$$

Παρατηρούμε οτι $\omega'_b = \omega_t/(1 + R_2/R_1)$ όπως και στον αναστρέφοντα ενισχυτή. Για τον μη αναστρέφοντα ενισχυτή έχουμε:

$$\omega'_b = \omega_t/(1 + R_2/R_1) = \frac{\omega_t}{A'_o}.$$

Παρατηρούμε οτι στην περίπτωση του μη αναστρέφοντα ενισχυτή έχουμε:

$$\omega_t = A'\omega'_b = A\omega_b \; = \; \text{σταθερό ανεξάρτητο από την ανασύζευξη.}$$

Τέτοια σχέση ισχύει και για τον αναστρέφοντα ενισχυτή μόνο αν

$$A'_o = R_2/R_1 \gg 1.$$

Για τον αναστρέφοντα ισχύει γενικώς $\omega'(1 + A'_o) = \omega = \omega A_o$.
Για τον μη αναστρέφοντα και τον αναστρέφοντα ενισχυτή, όταν $\omega \gg \omega'_b$ ισχύει:

$$A_f \approx -\frac{A'_o\omega'_b}{j\omega},$$

οπότε προφανώς για τον μη αναστρέφοντα, όταν $|A_f| = 1$, έχουμε οτι $\omega = \omega_t$. (Για τον αναστρέφοντα αυτό ισχύει μόνο κατά προσέγγιση όταν $A' = R_2/R_1 \gg 1$.) Γι• αυτό η ω_t λέγεται εύρος ζώνης συχνοτήτων μοναδιαίας ενίσχυσης (unity-gain bandwidth). Υποτίθεται οτι ο ενισχυτής ενισχύει συχνότητες που φτάνουν πολύ κοντά στο μηδέν και αυτός είναι ο λόγος που το εύρος συμπίπτει με την ω_t, δηλαδή δεν υπάρχει, πρακτικώς, κατώτερο όριο συχνοτήτων.
Προφανώς για $\omega \gg \omega'$, έχουμε:

$$|A_f| \approx \frac{A'_o\omega'_b}{\omega}$$

άρα

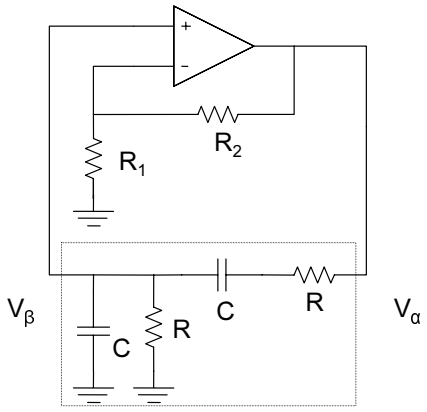
$$A_{f\ dB} = 20\log|A_f| \approx -20\log f + 20\log(A'_o\omega'_b/2\pi) \quad (\omega_b = 2\pi f_b).$$

Έχουμε επομένως,

$$\text{κλίση} \; = \frac{dA_{f\ dB}}{d\log f}(= \frac{\Delta A_{f\ dB}}{\Delta\log f}) = -20\frac{\text{dB}}{\text{δεκαπλασιασμό συχνότητας}}$$

Προφανώς το τελευταίο ισχύει διότι το $\Delta\log f = 1$ αντιστοιχεί σε 10-πλασιασμό συχνότητας. Η κλίση είναι ίδια στην περίπτωση του αναστρέφοντα και του μη αναστρέφοντα ενισχυτή. Στην περίπτωση όμως του μη αναστρεφοντα (όπως και στην περίπτωση του αναστρέφοντα με μεγάλη ενίσχυση), ο όρος $20\log(A'\omega'_b/2\pi)$ γίνεται $20\log(\omega/2\pi)$, δηλαδή είναι σταθερός ανεξάρτητος της ενίσχυσης. Επομένως η σχέση ενίσχυσης σε dB ως προς το λογάριθμο της συχνότητας είναι ίδια για μεγάλες συχνότητες ανεξάρτητα από την ενίσχυση του μη αναστρέφοντα ενισχυτή.

Πρόβλημα 2.36 Να μελετηθεί ο ταλαντωτής γέφυρας του Wien και να δείξετε οτι για να έχουμε ταλαντώσεις θα πρέπει $R_2 \geqq 2R_1$.
Λύση:
Η ενίσχυση τάσης του τελεστικού ενισχυτή με τους αντιστάτες $R_1,\ R_2$ είναι:



Σχήμα 2.40

$$A_v = 1 + \frac{R_2}{R_1}.$$

Ας υπολογίσουμε το $\beta(f)$.

$$\beta(f) = \frac{V_\beta}{V_a} = \frac{R\frac{1}{j\omega C} / \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)}{R + \frac{1}{j\omega C} + \frac{R\ 1/j\omega C}{R + 1/j\omega C}}$$

$$\Rightarrow \beta(f) = \frac{R}{3R + j\left(\omega R^2 C - 1/\omega C\right)}.$$

Το κριτήριο Barkhausen δίνει $A_v\beta = 1$, και επομένως:

$$\frac{A_v R}{3R + j\left(\omega R^2 C - 1/\omega C\right)} = 1$$

$$\Rightarrow R(3 - A_v) + j(\omega R^2 C - 1/\omega C) = 0,$$

άρα

$$R(3 - A_v) = 0,$$

και

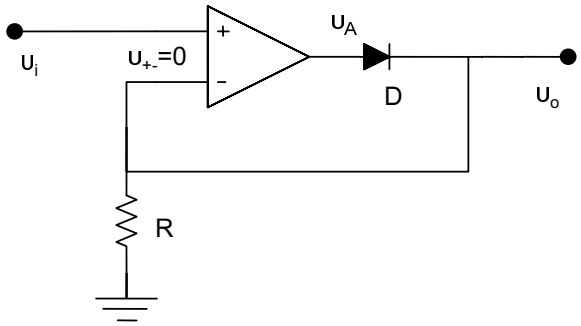
$$\omega R^2 C - 1/\omega C = 0.$$

Επομένως η ενίσχυση που χρειάζεται είναι: $A_{vmin} = 3$ (όπως αποδεικνύεται αυτή είναι η ελάχιστη) και η συχνότητα ταλάντωσης είναι ($\omega = 2\pi f$): $f = 1/2\pi RC$. Από τη σχέση $A_v \geq A_{vmin} = 3$

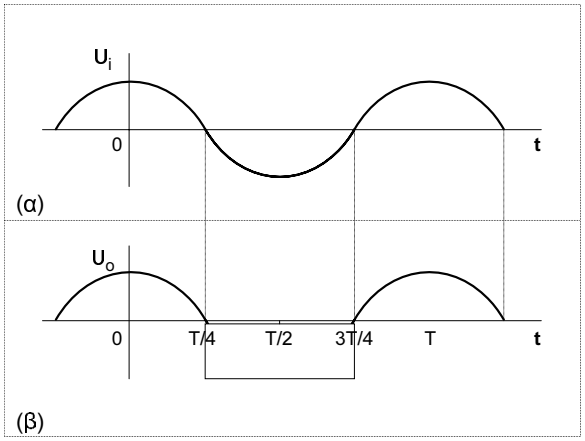
$$\Rightarrow A_v = 1 + \frac{R_2}{R_1} \geq 3 \quad \text{η} \quad R_2 \geq 2R_1.$$

Αν το R_2 είναι αρκετά μεγαλύτερο του $2R_1$ έχουμε μεγάλη παραμόρφωση, δηλαδή μεγάλο ψαλιδισμό της εξόδου, δηλαδή των ταλαντώσεων. Διαλέγουμε το R_2 λίγο μεγαλύτερο του $2R_1$. Αυτό οδηγεί σε $|A_v\beta|$ λίγο μεγαλύτερο της μονάδας, οπότε και ταλαντώσεις παράγονται και δεν έχουν ουσιαστική παραμόρφωση.

Πρόβλημα 2.37 Για το κύκλωμα του σχήματος (2.41), να δείξετε οτι είναι ένας ανορθωτής με τελεστικό ενισχυτή, δηλαδή για μια τάση εισόδου όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα (2.42α) η τάση εξόδου του είναι αυτή του σχήματος (2.42β). Να υποθέσετε ένα ιδανικό τελεστικό ενισχυτή.



Σχήμα 2.41



Σχήμα 2.42

Λύση:
Αν $v_i > 0$ τότε $v_A > v_i > 0$ επειδή το σήμα v_i είναι στη μη αναστρέφουσα είσοδο (+) και η δίοδος άγει άρα ένεκα αρνητικής ανασύζευξης η τάση στην είσοδο (-) θα είναι, πράγματι, σχεδόν (διαφορά mV) ίση με αυτή του ακροδέκτη (+). Έχουμε επομένως οτι:

$$\text{όταν} \quad v_i > 0, \quad v_o = v_i.$$

Αν $v_i < 0$ η έξοδος v_a θα είναι αρνητική και θα ισχύει: $v_A < v_i$ άρα η δίοδος θα είναι ανάστροφα πολωμένη, δεν θα άγει και το ρεύμα δια της R θα είναι μηδέν, άρα $v_o = iR = 0$. Επομένως:

$$\text{Όταν} \quad v_i < 0, \quad v_o = 0.$$

Παρατηρούμε οτι με αυτό το κύκλωμα πράγματι επιτυγχάνεται ιδανική (ημι)ανόρθωση.

3

Ψηφιακά Κυκλώματα

Πρόβλημα 3.1 Βρείτε τη δυαδική (binary) και δεκαεξαδική (hex) αναπαράσταση των δεκαδικών αριθμών: (α) 401_{10}, (β) 273_{10}, (γ) 15_{10}, (ε) 38_{10}, (ε) 56_{10}.
Λύση:
Πολύ εύκολα μπορείτε να βρείτε οτι:

(α) 191_{16} , 110010001_2

(β) 111_{16} , 100010001_2

(γ) F_{16} , 1111_2

(δ) 26_{16} , 100110_2

(ε) 38_{16} , 111000_2

Πρόβλημα 3.2 Βρείτε τη δεκαεξαδική και δεκαδική αναπαράσταση των δυαδικών αριθμών: (α) 1111_2, (β) 1001101_2, (γ) 1100101_2, (δ) 1011100_2, (ε) 11101_2, (ζ) 101000_2.
Λύση:
Θα πρέπει να βρείτε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

(α) F_{16} , 15_{10}

(β) $4D_{16}$, 77_{10}

(γ) 65_{16} , 101_{10}

(δ) $5C_{16}$, 92_{10}

(ε) $1D_{16}$, 29_{10}

(ζ) 28_{16} , 40_{10}

Πρόβλημα 3.3 Απλοποιήστε τη συνάρτηση:

$$f(x,y,z) = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot y \cdot z + x \cdot (\overline{y+z}),$$

με την εφαρμογή των κανόνων De Morgan της άλγεβρας Boole.
Λύση:
Έχουμε:

$$f(x,y,z) = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot y \cdot z + x \cdot (\overline{y+z})$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot y \cdot z + x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$$

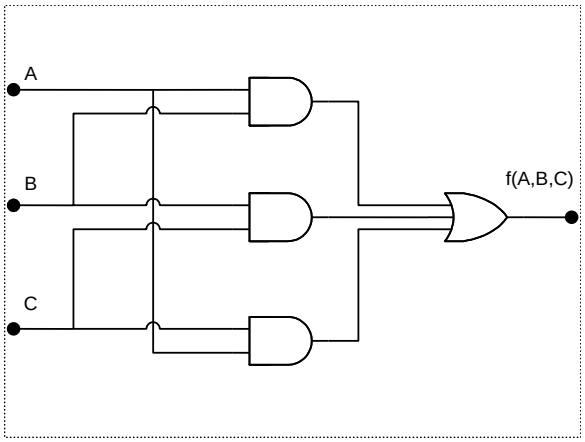
$$\Rightarrow f(x,y,z) = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot y \cdot z$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) = \overline{y} \cdot \overline{z} + \overline{x} \cdot y \cdot z.$$

Πρόβλημα 3.4 Σχεδιάστε ένα κύκλωμα λογικής που να λαμβάνει ως εισόδους τρεις ψήφους και ως έξοδο να μας δίνει 1 ή 0, ανάλογα αν έχουμε πλειοψηφία ή όχι. Δηλαδή σχεδιάστε τον κανόνα για τη βουλή μιας μικρής δημοκρατικής χώρας τριών ατόμων.
Λύση:
Η συνάρτηση που ικανοποιεί τον κανόνα πλειοψηφίας είναι:

$$f(A,B,C) = AB + BC + AC.$$

Το κύκλωμα φαίνεται στο σχήμα (3.1):



Σχήμα 3.1

Πρόβλημα 3.5 Δώστε ένα κύκλωμα για τη σχεδίαση των συναρτήσεων:
(α) $\overline{(A+B) + \overline{A} \cdot \overline{B}} \cdot \overline{AB}$
(β) $\overline{A+B} \cdot \overline{AB} + AB$
Λύση:
(α)

Για τη συνάρτηση

$$Y = \overline{A + B + \overline{A} \cdot \overline{B}} \cdot \overline{AB},$$

έστω οτι:

$$X = A \cdot B,$$

και

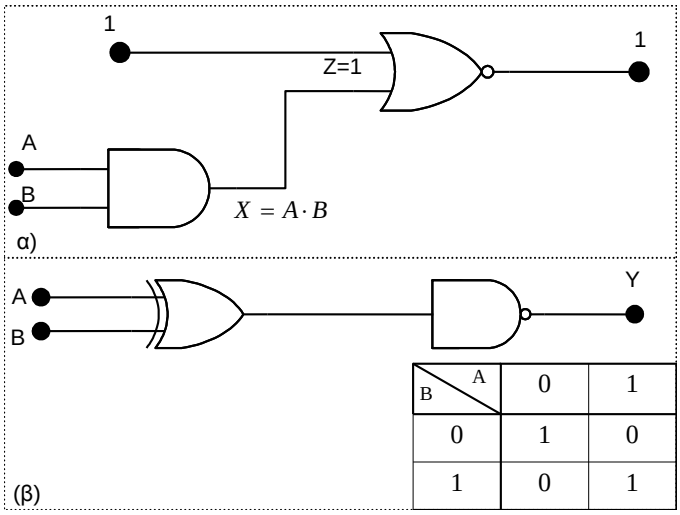
$$Z = A + B + \overline{A} \cdot \overline{B} = (A+B) + (\overline{A+B}) = 1,$$

οπότε μπορούμε να εκφράσουμε το Y ως:

$$Y = \overline{Z + X} = \overline{Z} \cdot \overline{X}.$$

Το κύκλωμα που προκύπτει φαίνεται στο σχήμα (3.2α).

(β)



B \ A	0	1
0	1	0
1	0	1

Σχήμα 3.2

Ισχύει:

$$Y = \overline{A+B} \cdot \overline{AB} + AB = AB + \overline{X} \cdot \overline{Z},$$

όπου

$$X = A + B \quad \text{και} \quad Z = AB,$$

$$Y = AB + (\overline{Z+X}) \Rightarrow \overline{Y} = (X+Z) \cdot \overline{AB}$$

$$\Rightarrow \overline{Y} = (X+Z) \cdot (\overline{A} + \overline{B}) \Rightarrow \overline{Y} = (A+B+AB) \cdot (\overline{A} + \overline{B})$$

$$\Rightarrow \overline{Y} = B\overline{A} + \overline{B}A \Rightarrow Y = \overline{A \oplus B}.$$

Το προκύπτον κύκλωμα απεικονίζεται στο σχήμα (3.2β).

Πρόβλημα 3.6 Δημιουργείστε μία exclusive OR (XOR), χρησιμοποιώντας πύλες NOR.
Λύση:
Γνωρίζουμε οτι η λογική συνάρτηση ενός XOR δύο σημάτων A και B είναι:

$$Y = A \cdot \overline{B} + B \cdot \overline{A}$$

Από το θεώρημα De Morgan παίρνουμε:

$$Y = (\overline{A} + B) \cdot (\overline{B} + A).$$

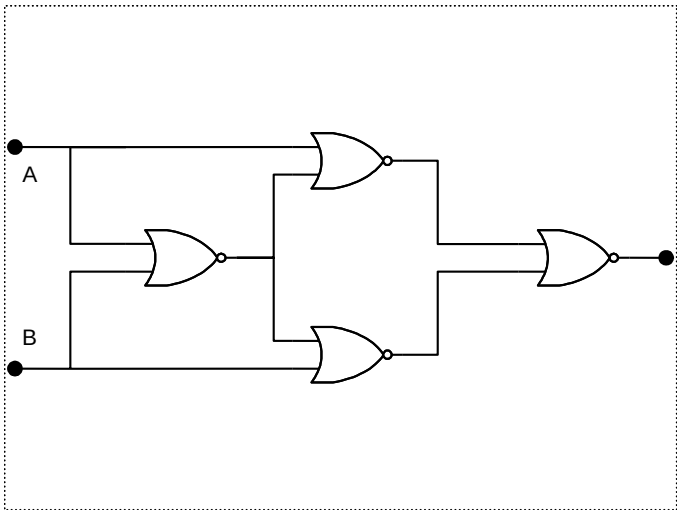
Από τη σχέση:

$$A + \overline{A} \cdot B = A + B,$$

θα έχουμε:

$$Y = \left[A + (\overline{A} \cdot \overline{B})\right] \cdot \left[B + (\overline{A} \cdot \overline{B})\right].$$

Επομένως, ένα κύκλωμα θα είναι αυτό του σχήματος (3.3).



Σχήμα 3.3

Πρόβλημα 3.7 Απλοποιείστε τη λογική έκφραση $Z = \overline{A + \overline{B}C}$.
Λύση:
Με εφαρμογή των θεωρημάτων De Morgan παίρνουμε:

$$Z = \overline{A + \overline{B}C} = \overline{A} \cdot (\overline{\overline{B}C}) = \overline{A}(\overline{\overline{B}} + \overline{C}) = \overline{A}(B + C).$$

Πρόβλημα 3.8 Να εκφραστεί η λογική συνάρτηση

$$f(A, B, C, D) = (\overline{A} + BC)(B + CD),$$

σε μορφή αθροίσματος γινομένου.
Λύση:

$$f(A, B, C, D) = (\overline{A} + BC)B + (\overline{A} + BC)CD$$

$$\Rightarrow f(A, B, C, D) = \overline{A}B + BBC + \overline{A}CD + BCCD$$

$$\Rightarrow f(A, B, C, D) = \overline{A}B + BC + \overline{A}CD + BCD.$$

Πρόβλημα 3.9 Απλοποιείστε τις λογικές συναρτήσεις:
(α) $\overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$
(β) $A + \overline{A}B$
(γ) $(X + Y)(X + Z)$
Λύση:
(α)

$$\overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB(\overline{C} + C)$$

$$= \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB \cdot 1 = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB.$$

(β)

$$A + \overline{A}B = (A + \overline{A})(A + B) = 1(A + B) = A + B.$$

(γ)

$$(X + Y)(X + Z) = X + XZ + XY + YZ,$$

αλλά

$$X + XZ = X,$$

και

$$X + XY = Z.$$

Επομένως:

Πρόβλημα 3 ιη ($\overline{A + B} =$
$\overline{A} \cdot \overline{B}$ και $\overline{A}$
Λύση:

A	B	$A+B$	$\overline{A+B}$	$\overline{B}$	$\overline{A}$	$\overline{A}\overline{B}$	$\overline{AB}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0	0

Σχήμα 3.4

Πρόβλημα 3.11 Δώστε ένα πίνακα Karnaugh που καθορίζει αν ένας τριψήφιος δυαδικός αριθμός είναι πρώτος αριθμός.
Λύση:
Ο πίνακας αληθείας και ο πίνακας Karnaugh απεικονίζονται στα σχήματα (3.5α,β) αντίστοιχα:
Δύο ισοδύναμα κυκλώματα που υλοποιούν αυτό τον υπολογισμό φαίνονται στα σχήματα (3.5γ,δ).

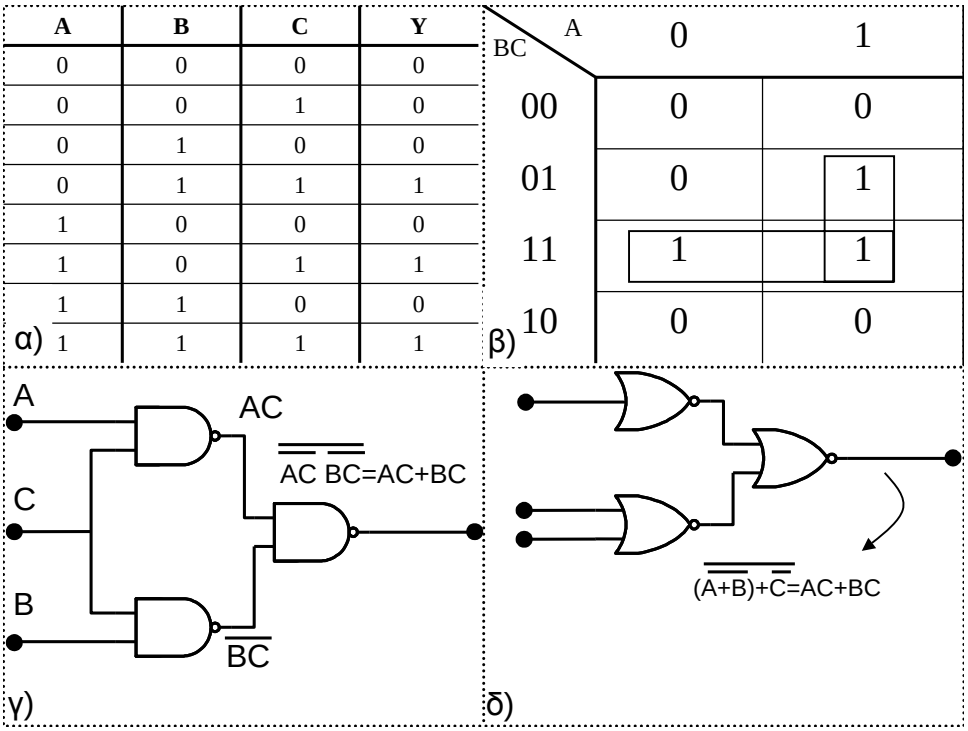
Πρόβλημα 3.12 Να σχεδιάσετε μια πύλη X-OR μόνο με πύλες NAND.
Λύση:
Από το θεώρημα του De Morgan $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$, έχουμε:

$$\overline{A(\overline{A} + \overline{B})} = (\overline{A} + \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}) = \overline{A} + AB,$$

$$\overline{B(\overline{A} + \overline{B})} = (\overline{B} + \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}}) = \overline{B} + AB,$$

$$(\overline{A} + AB)(\overline{B} + AB) = \left[\overline{\overline{A}}(\overline{A} + \overline{B})\right] + \left[\overline{\overline{B}}(\overline{A} + \overline{B})\right]$$

$$= \left[A(\overline{A} + \overline{B})\right] + \left[B(\overline{A} + \overline{B})\right]$$



Σχήμα 3.5

$$= [A\overline{A} + A\overline{B}] + [B\overline{A} + \overline{B}] = A\overline{B} + \overline{A} + B$$

$$= XOR = A \oplus B.$$

Το κύκλωμα που υλοποιεί τη ζητούμενη πύλη φαίνεται στο σχήμα (3.6).

Πρόβλημα 3.13 Δώστε τη συνάρτηση που περιγράφει το κύκλωμα στο σχήμα (3.7α). Με εφαρμογή των κανόνων De Morgan να μετασχηματίσετε αυτή την έκφραση που περιέχει μόνο AND και OR, σε μια νέα έκφραση, ώστε να κατασκευαστεί ένα κύκλωμα με NAND και NOR.
Λύση:
Από το σχήμα (3.7α) βλέπουμε οτι:

$$Y = E + F,$$

όπου

$$E = A \cdot B \quad \text{και} \quad F = C + D.$$

Επομένως το Ψ είναι:

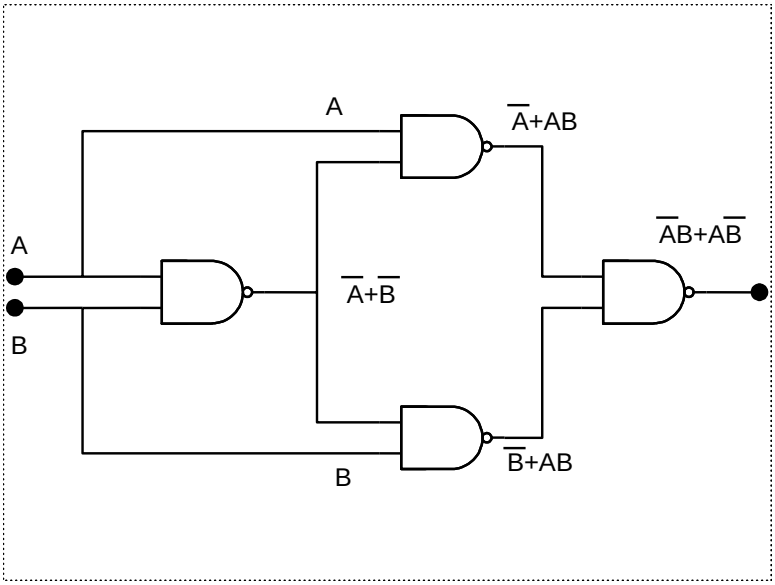
$$Y = A \cdot B + (C + D).$$

Παρατηρούμε οτι:

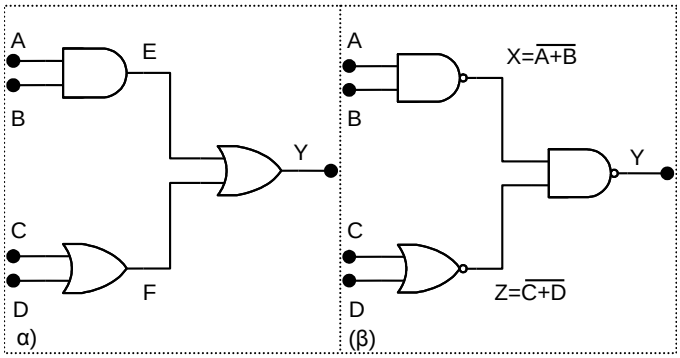
$$\overline{Y} = \overline{AB + (C + D)} = (\overline{AB}) \cdot (\overline{C + D}) = (\overline{A} + \overline{B})(\overline{D} \cdot \overline{D})$$

$$\Rightarrow Y = \overline{(\overline{A} + \overline{B})(\overline{C} \cdot \overline{D})}.$$

Έστω οτι:



Σχήμα 3.6



Σχήμα 3.7

$$\left.\begin{array}{l} X = \overline{A} + \overline{B} \Rightarrow X = \overline{AB} \\ Z = \overline{C} \cdot \overline{D} \Rightarrow Z = \overline{C + D} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow Y = \overline{(\overline{AB})(\overline{C + D})}.$$

Επομένως το κύκλωμα που περιέχει NAND και NOR δίνεται στο σχήμα (3.7β).

Πρόβλημα 3.14 Σχεδιάστε ένα λογικό κύκλωμα που θα μας δίνει την ακόλουθη λογική:
(α) Έξοδος =1 για A=1 ή B=1 ή C=1.
(β) Έξοδος =0 για (A=0 ή B=1) και C=1.
(γ) Έξοδος =1 για A=1 και B=1 ή A=0 και B=0.
Λύση:

(α)

$$Y = A + B + C = (A + B) + C.$$

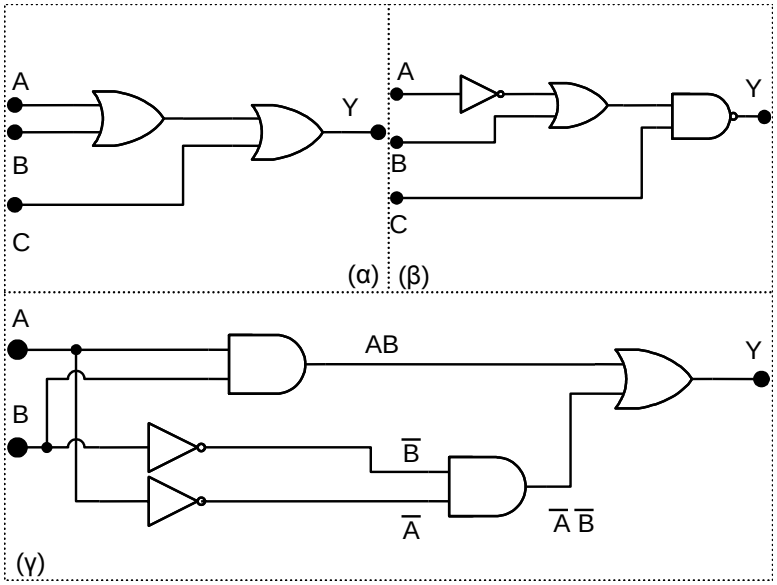
(β)

$$\overline{Y} = \left(\overline{A} + B + C\right)$$
$$\Rightarrow Y = \overline{\left(\overline{A} + B\right) + C}.$$

(γ)

$$Y = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B}.$$

Τα κυκλώματα απεικονίζονται στο σχήμα (3.8).



Σχήμα 3.8

Πρόβλημα 3.15 Να κάνετε το ίδιο όπως στην προηγούμενη άσκηση, αλλά σχεδιάστε τα λογικά κυκλώματα χρησιμοποιώντας μόνο πύλες NAND.
Λύση:
(α)

$$Y = (A + B) + C = \overline{\overline{\left[\left(\overline{A \cdot B}\right) \cdot \left(\overline{B \cdot B}\right)\right] \cdot \left(\overline{C \cdot C}\right)}},$$

διότι γνωρίζουμε οτι

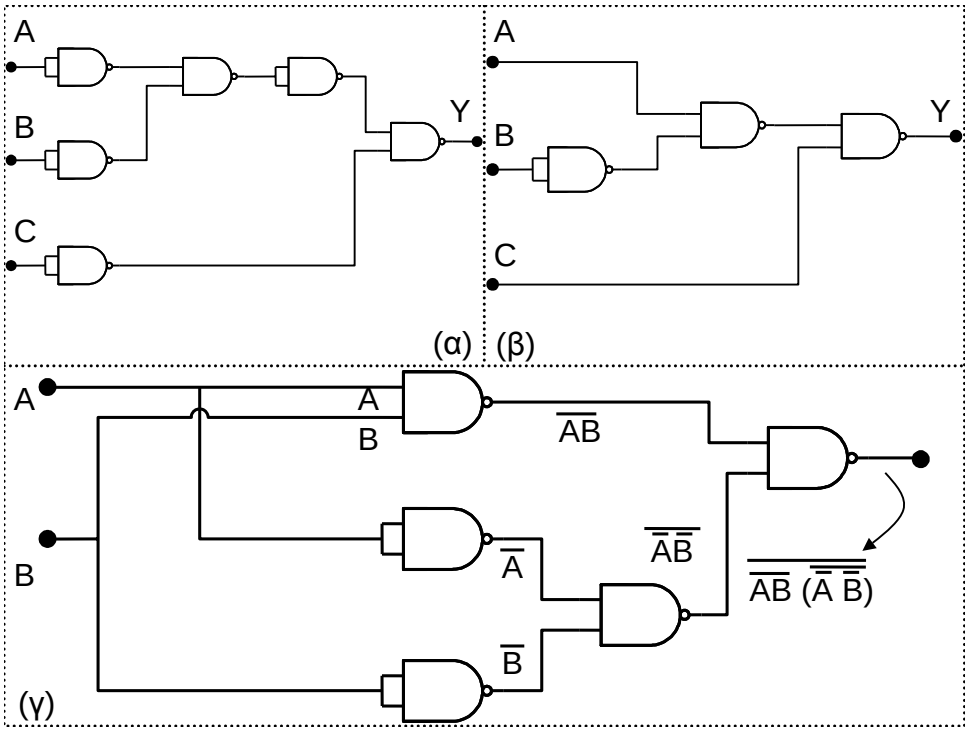
$$\overline{A} = \overline{A \cdot A} \quad \text{και} \quad A + B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}.$$

(β)

$$\overline{Y} = \left(\overline{A} + B\right) \cdot C \Rightarrow Y = \overline{\left(\overline{A} + B\right) \cdot C} = \overline{\left(\overline{A \cdot \overline{B}}\right) \cdot C}$$

(γ)

$$Y = A \cdot B + \overline{A} \cdot \overline{B} = \overline{\overline{A \cdot B} \cdot \left(\overline{A \cdot \overline{B}}\right)}.$$



Σχήμα 3.9

Τα αντίστοιχα κυκλώματα φαίνονται στα σχήματα (3.9).

Πρόβλημα 3.16 Για κάθε έκφραση Boole, σχεδιάστε ένα λογικό κύκλωμα χρησιμοποιώντας μόνο πύλες δύο εισόδων και πύλες αναστροφής.
(α) $Y = \left(\overline{A} \cdot \overline{B}\right) + C$
(β) $Y = \left(A + \overline{B}\right) \cdot \overline{C}$
(γ) $Y = A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$
(δ) $Y = \left[\left(A \cdot \overline{B}\right) + \left(B \cdot \overline{A}\right)\right] \cdot C$
Λύση:
Τα ζητούμενα κυκλώματα φαίνονται στο σχήμα (3.10).

Πρόβλημα 3.17 Να φτιαχτούν (α) αναστροφέας και (β) πύλη AND δύο εισόδων, χρησιμοποιώντας μόνο πύλες NOR.
Λύση:
(α)

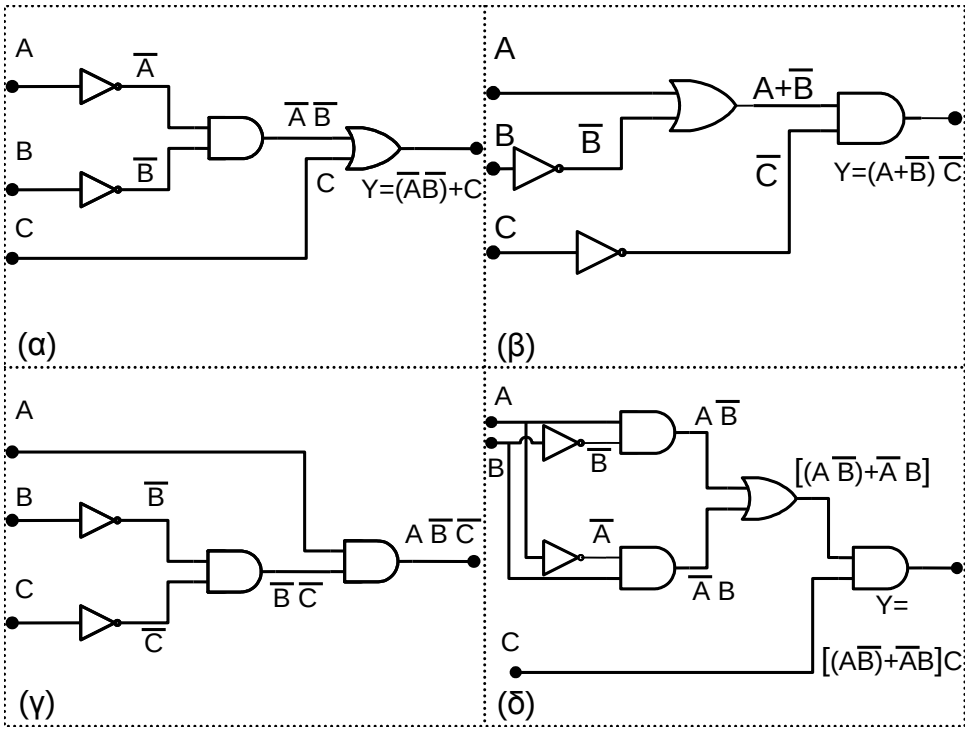
$$C = \overline{A + B}.$$

Ο αναστροφέας και η πύλη απεικονίζονται στα σχήματα (3.11) και (3.12) αντίστοιχα.

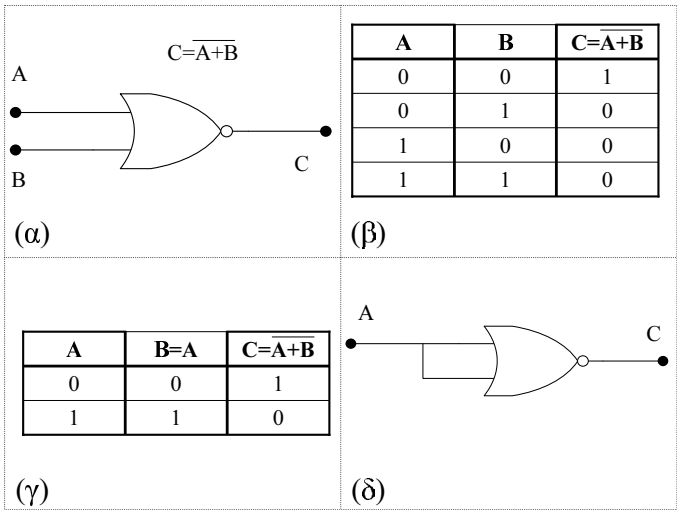
(β)
Έχουμε:

$$C = A \cdot B = \overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A} + \overline{B}}.$$

Οπότε η πύλη AND μπορεί να φτιαχτεί από πύλες NOR όπως φαίνεται στο σχήμα (3.12):



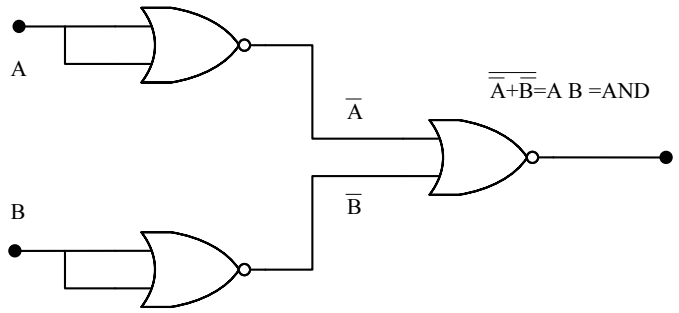
Σχήμα 3.10



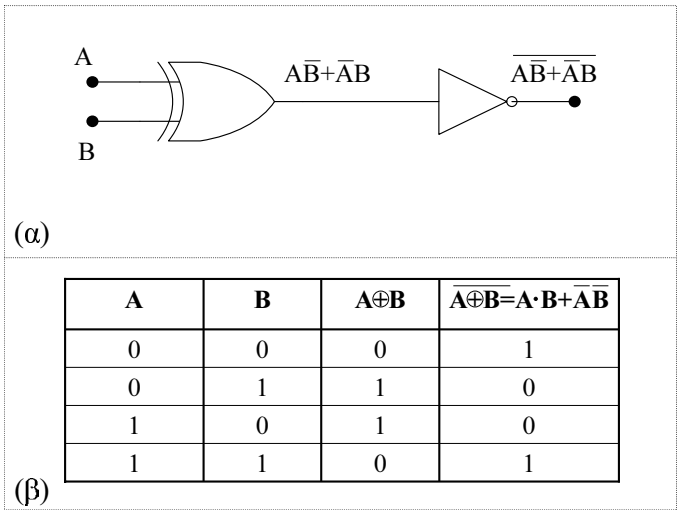
A	B	C=$\overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

A	B=A	C=$\overline{A+B}$
0	0	1
1	1	0

Σχήμα 3.11



Σχήμα 3.12



A	B	A⊕B	$\overline{A\oplus B}=A\cdot B+\overline{A}\,\overline{B}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Σχήμα 3.13

Πρόβλημα 3.18 Δίνεται η διάταξη του σχήματος (3.13α). Να βρεθεί η έκφραση του Boole, δηλαδή η έξοδος C ως συνάρτηση των εισόδων A και B και των συμπληρωματικών τους $\overline{A}$ και $\overline{B}$ μεταξύ των συμβόλων να χρησιμοποιηθούν οι πράξεις $+$ και $\bullet$. Να βρείτε το λογικό πίνακα της διάταξης αυτής.
Λύση:
Έχουμε:

$$C=\overline{A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B}=\left(\overline{A\cdot\overline{B}}\right)\cdot\left(\overline{\overline{A}\cdot B}\right)=$$

$$\left(\overline{A}+\overline{\overline{B}}\right)\cdot\left(\overline{\overline{A}}+\overline{B}\right)=\left(\overline{A}+B\right)\cdot\left(A+\overline{B}\right)=$$

$$\left(\overline{A}+B\right)\cdot A+\left(\overline{A}+B\right)\cdot\overline{B}=$$

$$A\overline{A}+AB+\overline{B}\,\overline{A}\Rightarrow$$

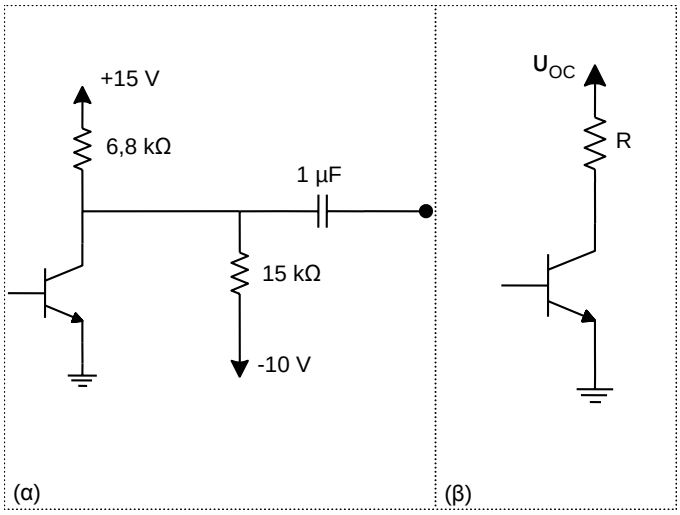
$$C = AB + \overline{B}\,\overline{A}.$$

Ο λογικός πίνακας της διάταξης αυτής απεικονίζεται στο σχήμα (3.13β).

4

Δίοδος, Τρανζίστορ

Πρόβλημα 4.1 Για το κύκλωμα του σχήματος (4.1α), να υπολογίσετε τις παραμέτρους του ισοδύναμου κυκλώματος του σχήματος (4.1β).



Σχήμα 4.1

Λύση:
Η τάση του κυκλώματος θα βρεθεί από το κύκλωμα που φαίνεται στο σχήμα (4.2).

$$v_{OC} = -10 + \left(\frac{15\ \text{k}\Omega}{15\ \text{k}\Omega + 6,8\ \text{k}\Omega}\right) \times (15 - (-10)) = 7,2\ \text{V}.$$

Η ένταση ρεύματος του βραχυκυκλωμένου ρεύματος είναι:

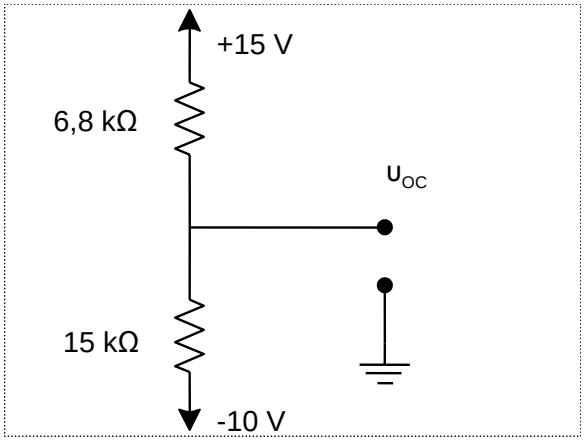
$$I_{SC} = \frac{15\ \text{V}}{6,8\ \text{k}\Omega} - \frac{10\ \text{V}}{15\ \text{k}\Omega} = 1,538\ \text{mA}.$$

Η ισοδύναμη αντίσταση Thevenin θα είναι:

$$R = \frac{V_{OC}}{I_{SC}} = 4,7\ \text{k}\Omega,$$

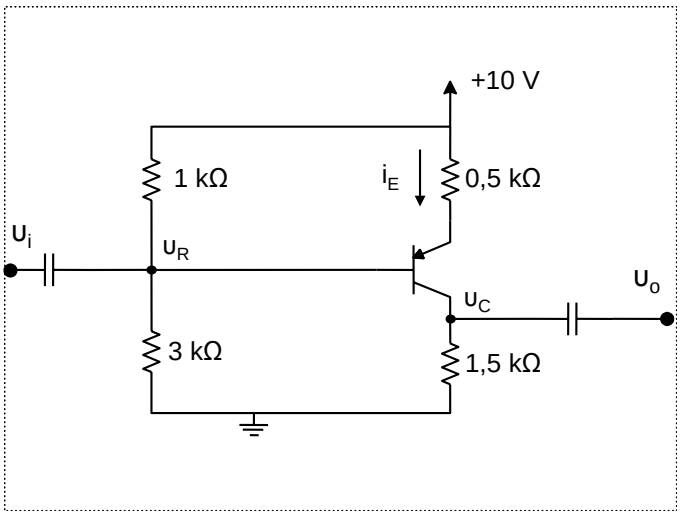
ή και

$$R = 6,8||15 = 4,7\ \text{k}\Omega.$$



Σχήμα 4.2

Πρόβλημα 4.2 Για το κύκλωμα του σχήματος (4.3), θεωρείστε ένα τρανζίστορ pnp με $\beta = 100$ και εσωτερική αντίσταση $r_t = 6,8\ \Omega$. Βρείτε το ρεύμα βάσης i_B, την τάση βάσης v_B, την τάση συλλέκτη v_C και την ενίσχυση A.



Σχήμα 4.3

Λύση:
Η τάση της βάσης βρίσκεται από το διαιρέτη τάσης:

$$v_B = \frac{3\ \text{k}\Omega}{1\ \text{k}\Omega + 3\ \text{k}\Omega} \times 10\ \text{V} = 6,7\ \text{V}.$$

Γνωρίζουμε οτι:

$$v_E = v_B + 0,6\ \text{V} = 8,1\ \text{V}.$$

Επομένως το ρεύμα εκπομπού είναι:

$$i_E = \frac{(10 - 8,1)\ \text{V}}{500\ \Omega} = 3,8\ \text{mA},$$

που είναι περίπου επίσης το ρεύμα του συλλέκτη. Δηλαδή,

$$i_C \simeq i_E.$$

Άρα το ρεύμα συλλέκτη θα είναι:

$$v_C = i_C R_C = 5,7 \text{ V},$$

και το ρεύμα βάσης θα είναι:

$$i_B = \frac{i_C}{\beta} = 38 \text{ μA}.$$

Για την ενίσχυση του κυκλώματος έχουμε:

$$A = -\frac{\beta}{\beta+1}\,\frac{R_C}{R_E + r_t} = -2,93,$$

όπου r_t είναι η εσωτερική αντίσταση του τρανζίστορ.
Επομένως έχουμε:

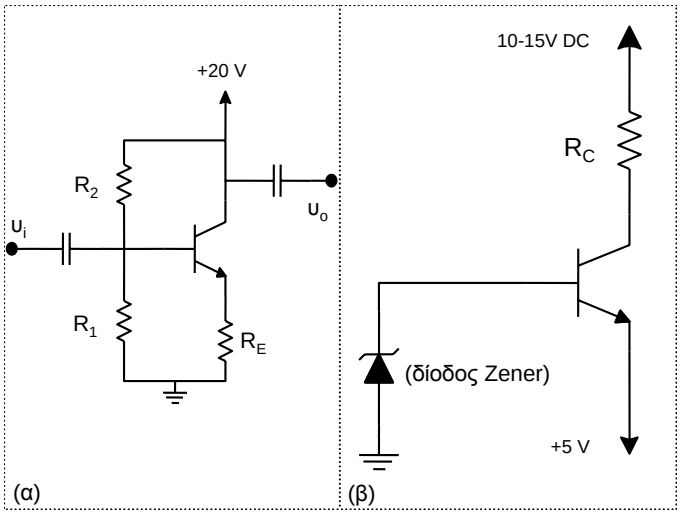
$$A = -2,93,$$

$$i_B = 38 \text{ μA},$$

$$v_B = 7,5 \text{ V},$$

$$v_C = 5,7 \text{ V}.$$

Πρόβλημα 4.3 Δώστε με λίγα λόγια το λόγο που τα κυκλώματα του σχήματος (4.4) έχουν πρόβλημα.



Σχήμα 4.4

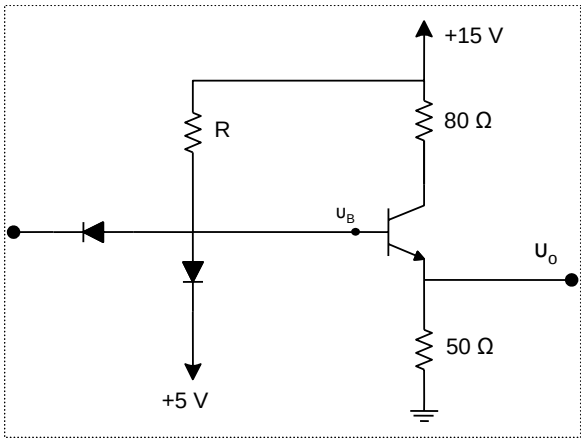
Λύση:
(α)

Η έξοδος βρίσκεται στο τροφοδοτικό των +20 V. Επιπλέον το v_o συνδέεται με τον πυκνωτή εξόδου, επομένως το v_o είναι μηδέν για κάθε χρονική στιγμή, δηλαδή δεν υπάρχει σήμα εξόδου.

(β)

Το ρεύμα της βάσης είναι πολύ μικρό και στη λάθος διεύθυνση ώστε να άγει η δίοδος Zener.

Πρόβλημα 4.4 Ένα κύκλωμα κοινού εκπομπού για λογικά σήματα είναι στο σχήμα (4.5). Βρείτε το v_o (που ταυτίζεται με την τάση εκπομπής v_E) και το ρεύμα που παρέχεται από την πηγή τάσης των 15 V, για $v_i = 0$ V και $v_i = 5$ V.



Σχήμα 4.5

Λύση:
Για $v_i = 0$ V έχουμε:

$$v_B = 0,6 \text{ V} \Rightarrow v_E = 0 \text{ V}.$$

Επομένως,

$$i_E \simeq i_C = 0 \text{ A}.$$

Για $v_i = 5$ V έχουμε:

$$v_B = 5,6 \text{ V} \Rightarrow v_E = 5 \text{ V},$$

και επομένως:

$$i_E = \frac{5 \text{ V}}{50 \ \Omega} = 100 \text{ mA}.$$

Πρόβλημα 4.5 Βρείτε την τιμή της αντίστασης R , ώστε ένα ρεύμα $i = 100$ mA να τροφοδοτήσει την αντίσταση φόρτου R_L από το κύκλωμα του σχήματος (4.6). Θεωρήστε ιδανικό τελεστικό ενισχυτή.
Λύση:
Παρατηρούμε οτι η τάση v_+ βρίσκεται από το διαιρέτη τάσης:

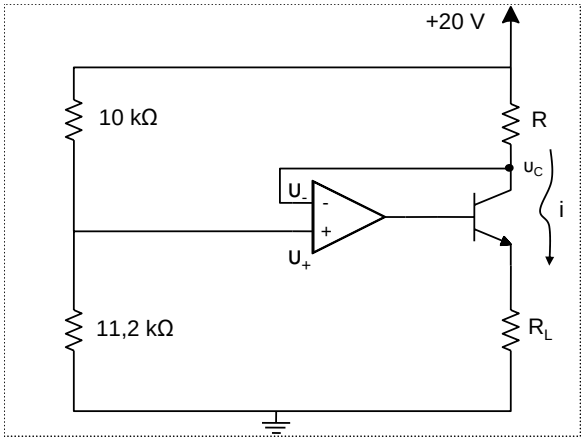
$$v_+ = \frac{11,2}{10 \text{ k}\Omega + 11,2 \text{ k}\Omega} \times 20 \text{ V} = 10,57 \text{ V}.$$

Επομένως:

$$v_C = v_- \simeq v_+ = 20 \text{ V} - i_C R$$

$$\Rightarrow R = \frac{20 \text{ V} - v_+}{i_C} = 94,3 \ \Omega,$$

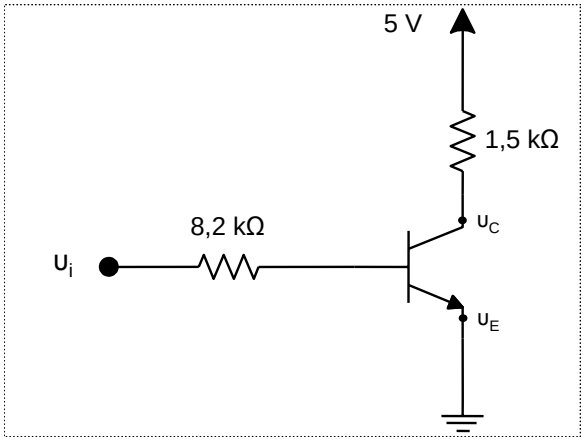
όπου



Σχήμα 4.6

$$i_C = 100 \text{ mA}.$$

Πρόβλημα 4.6 Βρείτε την ελάχιστη τάση εισόδου υ_i που απαιτείται για να τεθεί σε λειτουργία το τρανζίστορ του σχήματος (4.7) με τις χαρακτηριστικές παραμέτρους:
$\beta = 25, \quad \upsilon_{CE} = 0,25 \text{ V}, \quad \upsilon_{BE} = 0,6 \text{ V}.$



Σχήμα 4.7

Λύση:
Το ρεύμα του συλλέκτη είναι:

$$i_C = \frac{5 - 0,25}{1,5 \text{ k}\Omega} = 3,17 \text{ mA}.$$

Το ρεύμα βάσης είναι:

$$i_B = \frac{i_C}{\beta} \Rightarrow i_B = \left(\frac{3,17}{25}\right) \text{ mA}.$$

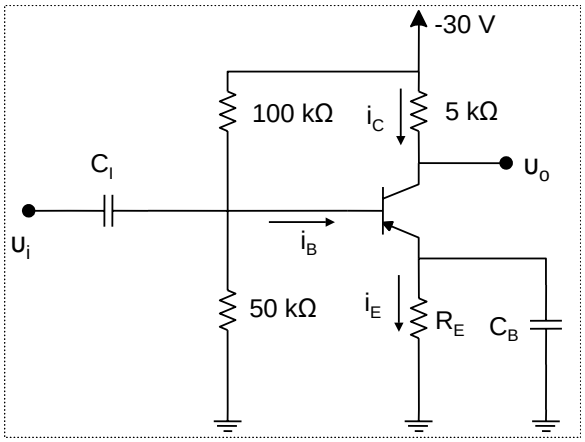
Επιπλέον, το ρεύμα βάσης είναι:

$$i_B = \frac{\upsilon_i - 0,6}{8,2 \text{ k}\Omega}.$$

Επομένως:

$$(v_i)_{min} = 8,2 \text{ k}\Omega \left(\frac{3,17}{25}\right) \text{ mA} + 0,6 = 1,64 \text{ V}.$$

Πρόβλημα 4.7 Για το κύκλωμα του κοινού εκπομπού του σχήματος (4.8), θεωρείστε τάση εξόδου $v_o = -20$ V, $C_I = 0,05$ μF, $C_B = 1$ μF, $v_{BE} = 0,6$ V και $\beta = 100$ για το τρανζίστορ.
(α) Βρείτε την τιμή της αντίσταση του εκπομπού R_E.
(β) Δώστε το ισοδύναμο κύκλωμα AC.
(γ) Βρείτε την αντίσταση εισόδου R_i.



Σχήμα 4.8

Λύση:
(α)
Το ρεύμα συλλέκτη είναι:

$$i_C = \frac{(-20 \text{ V}) - (-30 \text{ V})}{5 \text{ k}\Omega} = 2 \text{ mA}.$$

Για το ρεύμα βάσης έχουμε:

$$i_B = \frac{i_C}{\beta} = 20 \text{ μA}.$$

Το ισοδύναμο κύκλωμα DC δίνεται στο σχήμα (4.9α) και περιέχει μια τάση V_T και μια αντίσταση R_T (από το κύκλωμα Thevenin του διαιρέτη τάσης των 50 kΩ και 100 kΩ), για τα οποία ισχύει:

$$V_T = \left(\frac{50}{100}\right) \times (-30 \text{ V}) = -10 \text{ V},$$

και

$$R_T = \frac{50 \times 100}{50 + 100} \text{ k}\Omega \simeq 33 \text{ k}\Omega.$$

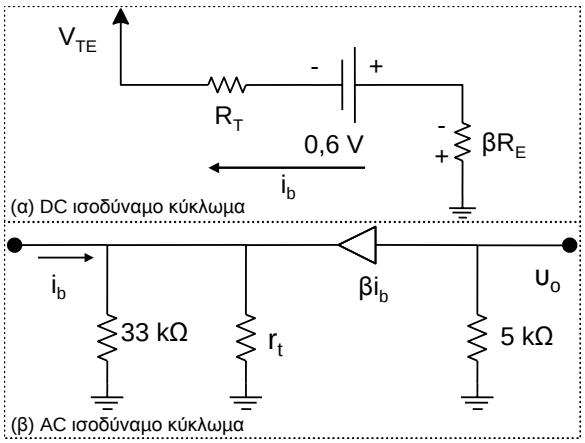
Επομένως από το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff θα έχουμε:

$$(-10 + 0,6) \text{ V} = i_B(\beta R_E + 33 \text{ k}\Omega), \tag{4.0.1}$$

όπου $V_T = -10$ V και $R_T = 33$ kΩ. Η σχέση (4.0.1) μας δίνει:

$$R_E = 4,37 \text{ k}\Omega.$$

(β)



Σχήμα 4.9

Το ισοδύναμο κύκλωμα AC δίνεται στο σχήμα (4.9β), όπου η R_E βραχυκυκλώνεται λόγω της ύπαρξης του C_B.

(γ)

Από το σχήμα (4.9) η αντίσταση εισόδου θα είναι:

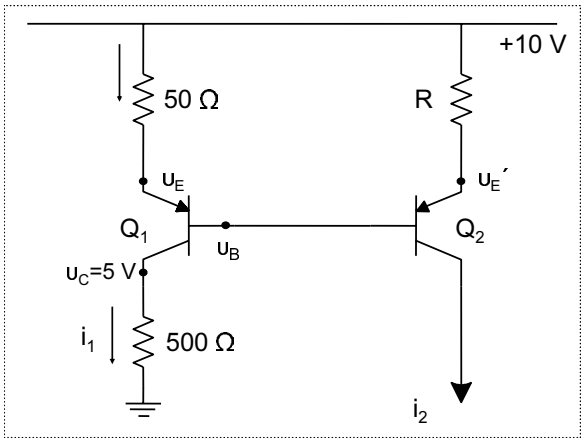
$$r_i = R_T||(\beta r_t)$$

$$\Rightarrow R_i = 33\ \text{k}\Omega||(100 \times 12\ \Omega) = 1,16\ \text{k}\Omega,$$

όπου r_t είναι η αντίσταση εισόδου:

$$r_t = \frac{25\ \Omega}{2\ \text{mA}} = 12\ \Omega$$

Πρόβλημα 4.8 Έστω οτι τα δύο τρανζίστορ του κυκλώματος του σχήματος (4.10) φέρουν την ίδια τάση $v_{EB} = 0,6$ V. Άν $i_2 = 5$ mA, βρείτε την τιμή της αντίστασης R.



Σχήμα 4.10

Λύση:
Το ρεύμα i_1 είναι:

$$i_1 = \frac{5\ \text{V}}{500\ \Omega} = 0,01\ \text{A}.$$

Από τον εκπομπό του τρανζίστορ Q_1 έχουμε:

$$\frac{10\ \text{V} - v_E}{50\ \Omega} = i_1 \Rightarrow v_E = 9,5\ \text{V}.$$

Αλλά

$$v_B - v_E = -0,6 \Rightarrow v_B = 8,9\ \text{V},$$

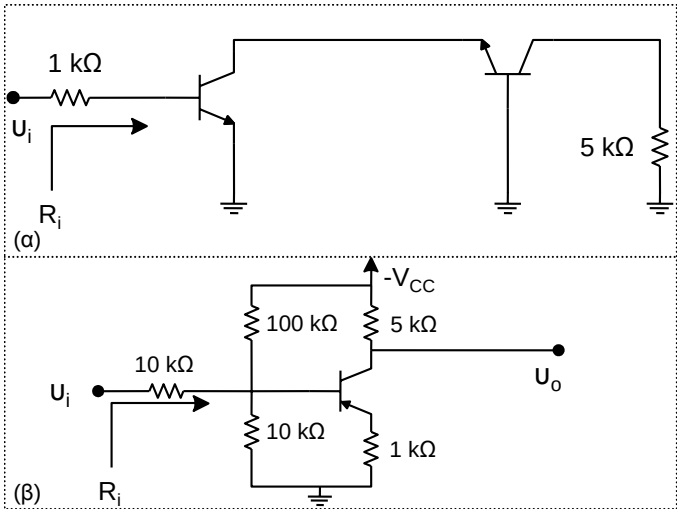
και επομένως

$$v'_E = v_B + 0,6 = 9,5\ \text{V},$$

δηλαδή

$$R = \frac{10\ \text{V} - v'_E}{i_2} = \frac{(10 - 9,5)\ \text{V}}{5\ \text{mA}} = 0,1\ \text{k}\Omega.$$

Πρόβλημα 4.9 Υπολογίστε την ενίσχυση ρεύματος A_I, ενίσχυση τάσης A_V, αντίσταση εισόδου R_i και αντίσταση εξόδου R_o των κυκλωμάτων του σχήματος (4.11).
Υποθέστε $\beta = 50$ και για την εσωτερική αντίσταση $r_t = 40\ \Omega$.



Σχήμα 4.11

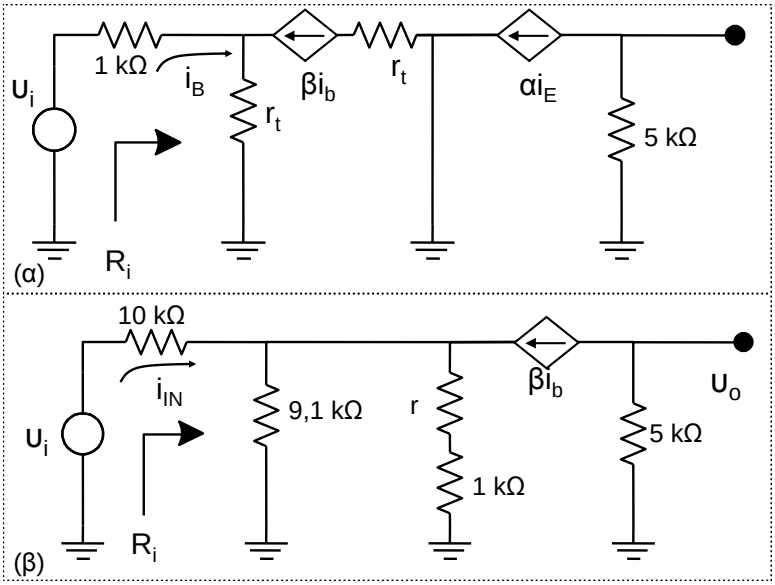
Λύση:
Τα ισοδύναμα κυκλώματα AC φαίνονται στο σχήμα (4.12).
Για το κύκλωμα (α) έχουμε:

$$R_i = \beta r_t = 2\ \text{k}\Omega,$$

$$R_o = 5\ \text{k}\Omega,$$

$$A_I = \frac{i_o}{i_B} = \beta = 50,$$

και



Σχήμα 4.12

$$A_V = \frac{v_o}{v_i} = \frac{-i_o \times 5\ \text{k}\Omega}{i_b(1\ \text{k}\Omega + \beta r_t)} = -\frac{50 \times 5}{3} = -83,3.$$

Για το κύκλωμα (β) έχουμε:

$$R_i = \frac{v_i}{i_{IN}} = 10\ \text{k}\Omega + (19,1\ \text{k}\Omega || 1,04\beta\ \text{k}\Omega) = 17,7\ \text{k}\Omega,$$

$$R_o = 5\ \text{k}\Omega,$$

$$A_I = \frac{i_o}{i_{IN}} = \frac{\beta i_B}{6,7 i_B} = 7,5,$$

εφόσον

$$i_{IN} = \frac{v_B}{9,1\ \text{k}\Omega} + i_B,$$

και

$$v_B = \beta(1,04) i_B = (52\ \text{k}\Omega) i_B,$$

και επομένως

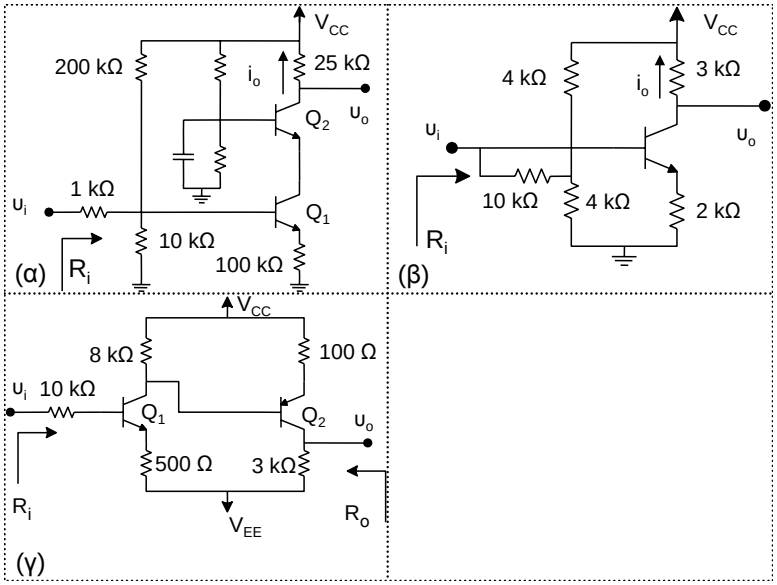
$$i_{IN} = 6,7 i_B.$$

Η ενίσχυση τάσης θα είναι:

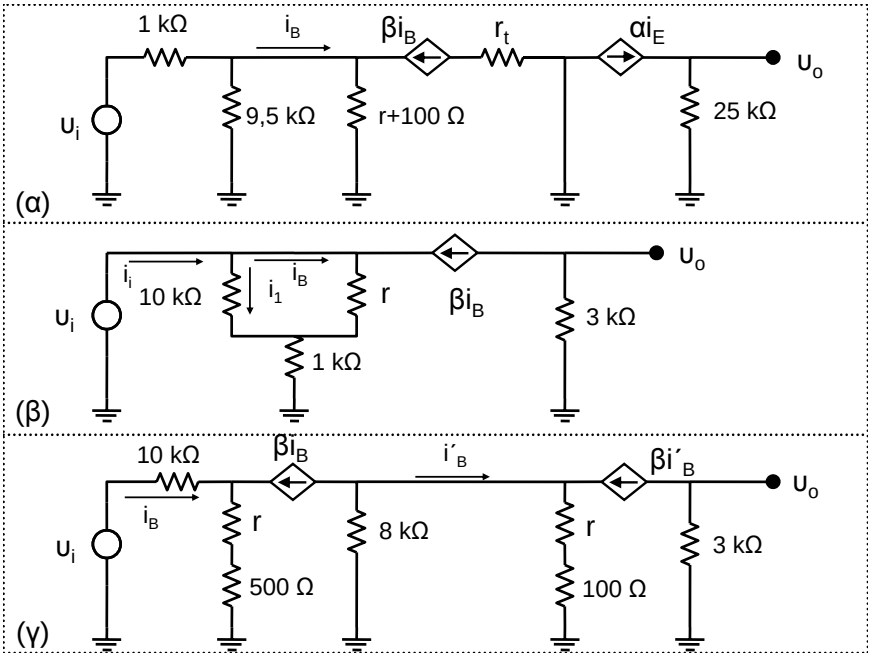
$$A_V = \frac{v_o}{v_i} = -\frac{\beta i_B \times 5\ \text{k}\Omega}{(17,7\ \text{k}\Omega) i_{IN}} = -\frac{5}{17,7} 7,5 = -2,1.$$

Πρόβλημα 4.10 Επαναλάβετε τα ίδια για τα κυκλώματα του σχήματος (4.13).
Λύση:
Τα ισοδύναμα κυκλώματα AC δίνονται στο σχήμα (4.14):

(α)



Σχήμα 4.13



Σχήμα 4.14

$$R_i = \frac{\upsilon_i}{i_i} = 4 \text{ k}\Omega,$$

$$R_o = 25 \text{ k}\Omega,$$

$$i_E = -\beta i_B,$$

$$\upsilon_o = a i_E \times 25 \text{ k}\Omega \simeq 25 \text{ k}\Omega \; i_E,$$

$$\frac{\upsilon_B}{9,5 \text{ k}\Omega} + i_B = i_i,$$

$$\upsilon_B = \beta(140) i_B = (7 \text{ k}\Omega) i_B,$$

$$i_i = 1,74 i_B,$$

$$A_I = \frac{i_o}{i_i} = \frac{-\beta i_B}{1,74 i_B} = -28,7,$$

$$A_V = \frac{\upsilon_o}{\upsilon_i} = \frac{(-25 \text{ k}\Omega)\beta i_B}{(4 \text{ k}\Omega) i_i}$$

$$\Rightarrow A_V = -\frac{25 \text{ k}\Omega}{4 \text{ k}\Omega} \frac{50}{1,74} = -180.$$

(β)

$$\upsilon_i = \beta i_B r + 1 \text{ k}\Omega(\beta i_B + i_1),$$

$$\beta i_B r = (10 \text{ k}\Omega) i_1$$

$$\Rightarrow i_1 = 0,2 i_B,$$

$$R_i = \frac{\upsilon_i}{\text{J}i} = \frac{(2 \text{ k}\Omega) i_B + (50 \text{ k}\Omega) i_B + (0,2 \text{ k}\Omega) i_B}{i_1 + i_B}$$

$$\Rightarrow R_i = \frac{52,2 \text{ k}\Omega}{1,2} = 43,5 \text{ k}\Omega,$$

$$R_o = 3 \text{ k}\Omega,$$

$$A_I = \frac{i_o}{i_1} = \frac{\beta i_B}{1,2 i_B} = 41,7,$$

$$A_V = \frac{\upsilon_o}{\upsilon_i} = \frac{(3 \text{ k}\Omega)\beta i_B}{(43,5 \text{ k}\Omega) i_i}$$

$$\Rightarrow A_V = \frac{50 \times 3 \text{ k}\Omega}{43,5 \text{ k}\Omega \times 1,2} = 2,9.$$

(γ)

$$\upsilon_i = i_B(10 \text{ k}\Omega + \beta 54) = (37 \text{ k}\Omega) i_B,$$

$$R_i = \frac{\upsilon_i}{i_B} = 37 \text{ k}\Omega,$$

$$v_b' i_b' (\beta \times 14)\ \text{k}\Omega = (7\ \text{k}\Omega) i_B',$$

$$\frac{v_B'}{8\ \text{k}\Omega} + i_B' + \beta i_B = 0,$$

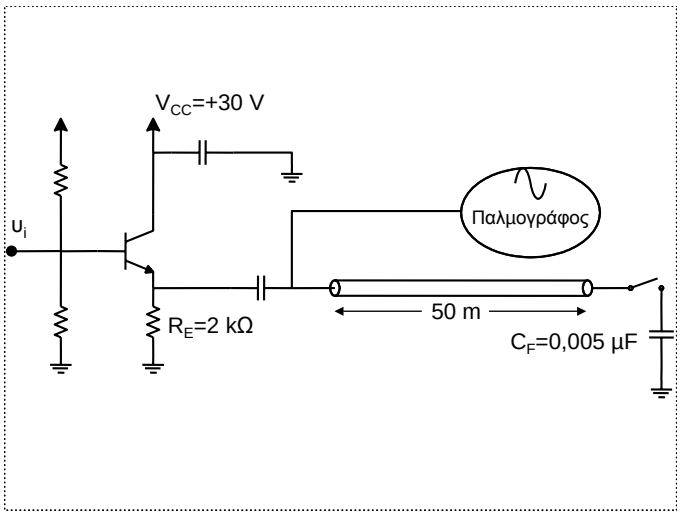
$$1,88 i_B' = -\beta i_B,$$

$$R_o = 3\ \text{k}\Omega,$$

$$A_I = \frac{i_o}{i_B} = \frac{\beta i_B'}{i_B} = \beta \left(\frac{-\beta}{1,88} \right) = -1330,$$

$$A_V = \frac{v_o}{v_i} = -\frac{\beta i_B' (3\ \text{k}\Omega)}{(37\ \text{k}\Omega) i_B} = 108.$$

Πρόβλημα 4.11 Για το κύκλωμα του κοινού εκπομπού του σχήματος (4.15), θεωρούμε μια τάση εκπομπού $V_E = +15$ V και μια αντίσταση εξόδου $R_o = 50\ \Omega$ στο σημείο πόλωσης. Στον εκπομπό συνδέουμε μια γραμή μεταφοράς μήκους 50 m, επαγωγής ανά μονάδα μήκους $L = 0,25$ μH/m και χωρητικότητας ανά μονάδα μήκους $C = 100$ pF/m.
(α) Όταν ο διακόπτης είναι ανοικτός, δηλαδή δεν υπάρχει τερματισμός του καλωδίου, δώστε ένα διάγραμμα για το σήμα που εμφανίζεται στον παλμογράφο για σήματα εισόδου της μορφής του σχήματος (4.16α,β,γ).
(β) Κάντε το ίδιο όταν ο διακόπτης κλείσει, για το σήμα εισόδου (4.17).



Σχήμα 4.15

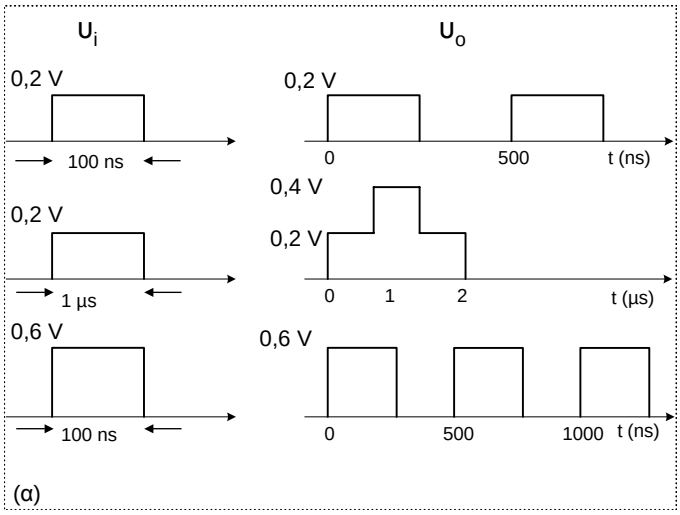
Λύση:

(α)
Όταν ο διακόπτης είναι ανοικτός, ο χρόνος διάδοσης του σήματος στο καλώδιο είναι:

$$t_r = \frac{2 \times (\text{μήκος καλωδίου})}{v_o},$$

όπου v_o είναι η ταχύτητα του σήματος στη γραμμή μεταφοράς (καλώδιο):

$$v_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2 \times 10^8 \text{m/s}.$$



Σχήμα 4.16

Επιπλέον, η σύνθετη αντίσταση του καλωδίου είναι:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = 50\ \Omega.$$

Επομένως παρατηρούμε οτι η αντίσταση εξόδου του κοινού εκπομπού είναι ίση με τη σύνθετη αντίσταση του καλωδίου. Εφόσον το πλάτος του παλμού εισόδου είναι 100 ns, δηλαδή μικρότερο του ολικού χρόνου διάδοσης του σήματος στο καλώδιο, θα έχουμε ως σήμα εξόδου τα σχήματα (4.16α,β), για τα σήματα εισόδου (4.16α,β), δηλαδή έχουμε μια ανάκλαση του παλμού. Όταν το πλάτος εισόδου είναι 0,6 V, τότε η τάση της βάσης όταν έχουμε τον ανακλώμενο παλμό να φθάνει στον εκπομπό, είναι:

$$\upsilon_B = 15,6\ \text{V}, \quad \text{και}$$

$$\upsilon_E = (15 + 0,6) \quad \text{V} = 15,6\ \text{V}.$$

Παρατηρούμε οτι:

$$\upsilon_{BE} = 0.$$

Αυτό σημαίνει οτι το τρανζίστορ δεν είναι ανοικτό, δηλαδή η αντίσταση εξόδου είναι $R_o = R_t$, άρα $R_o > Z_o$, όπου θα έχουμε συνεχείς ανακλάσεις, όπως φαίνεται στο σχήμα (4.16γ).

(β)

Η σύνθετη αντίσταση του C_F είναι:

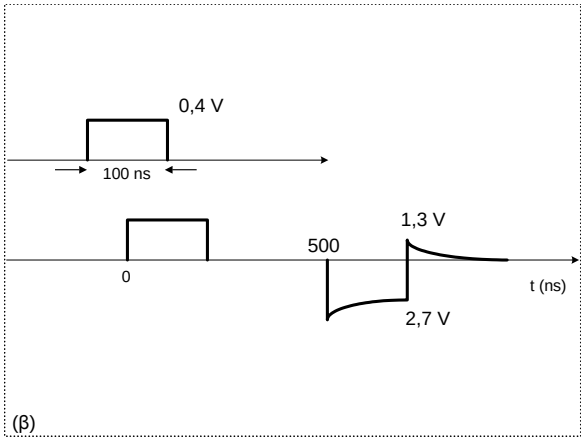
$$Z_F = \frac{1}{j\omega C} = \frac{10^6}{j \times 2\pi f \times 0,005} = \frac{31,8\ \text{MΩ}}{7}$$

$$\Rightarrow Z_F = (31,8\ \text{MΩ}) \times T.$$

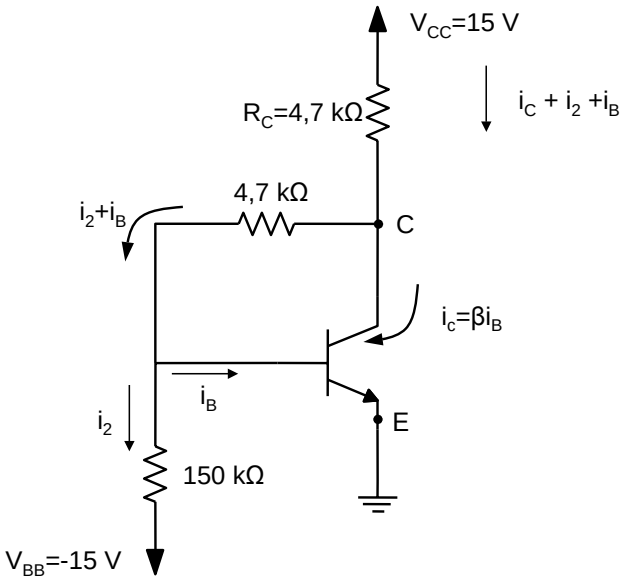
Επομένως, για τη μεγαλύτερη περίοδο:

$$T = 200\ \text{ns} \quad \text{ή} \quad Z_F \simeq 6\ \Omega,$$

δηλαδή πολύ μικρότερη του Z_o ($Z_F \ll Z_o$).
Προφανώς, για πολύ μεγάλες συχνότητες θα έχουμε $Z_F = 0$.



Σχήμα 4.17



Σχήμα 4.18

Πρόβλημα 4.12 Βρείτε το ρεύμα συλλέκτη I_C και την τάση V_{CE} του κυκλώματος του σχήματος (4.18). Υποθέστε οτι $V_{BE} = 0,7$ V και το β του τρανζίστορ είναι $\beta = 200$.
Λύση:
Το ρεύμα I_2 που διαρρέει την αντίσταση των 150 kΩ είναι:

$$I_2 = \frac{v_B - v_{BB}}{150\ \text{k}\Omega} = \frac{(0,7 + 15)\ \text{V}}{150\ \text{k}\Omega} = 104\ \mu\text{A},$$

διότι

$$V_B = V_{BE} = V_B - V_E = 0,7\ \text{V},$$

αφού

$$V_E = 0.$$

Εφαρμόζοντας το νόμο του Ohm στον κλάδο CC, C , B, E θα έχουμε:

$$15 = (4,7\ \text{k}\Omega)(I_C + I_2 + I_B) + (4,7\ \text{k}\Omega)(I_2 + I_B) + 0,7. \tag{4.0.2}$$

Γνωρίζουμε οτι:

$$I_C = \beta I_B. \tag{4.0.3}$$

Από τις σχέσεις (4.0.2) και (4.0.3) θα έχουμε για το ρεύμα της βάσης:

$$I_B = 8,96\ \mu\text{A},$$

και επομένως το ρεύμα του συλλέκτη είναι:

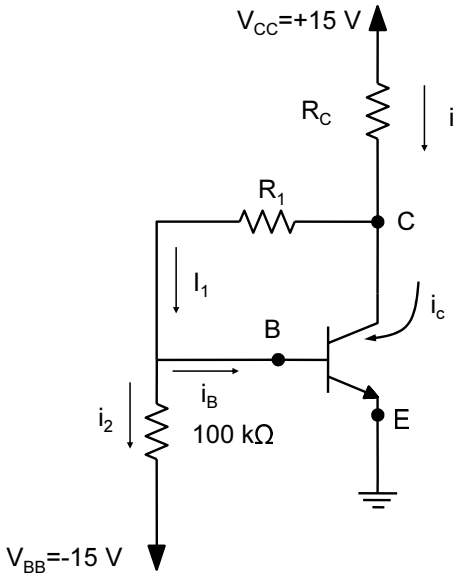
$$I_C = \beta I_B = 1,79\ \text{mA}.$$

Αν θεωρήσουμε τον κλάδο CC, C, E, ο νόμος του Ohm θα μας δώσει:

$$V_{CC} = R_C(I_C + I_2 + I_b) + V_{CE}$$

$$\Rightarrow V_{CE} = V_{CC} - R_C(I_C + I_2 + I_B) = 6,04\ \text{V}.$$

Πρόβλημα 4.13 Θεωρήστε το κύκλωμα του σχήματος (4.19). Βρείτε τις αντιστάσεις R_1, R_C αν το σημείο πόλωσης του τρανζίστορ είναι για $V_{CE} = 5$ V και $I_C = 2$ mA. Θεωρήστε οτι $V_{BE} = 0,7$ V και $\beta = 100$.



Σχήμα 4.19

Λύση:
Το ρεύμα I_2 είναι:

$$I_2 = \frac{15 + 0,7\ \text{V}}{100\ \text{k}\Omega} = 157\ \mu\text{A}.$$

Το ρεύμα βάσης είναι:

$$I_B = \frac{I_C}{\beta} = \frac{2\ \text{mA}}{100} = 20\ \mu\text{A}.$$

Επομένως:

$$I_1 = I_2 + I_B = 177\ \mu\text{A},$$

και η αντίσταση R_1 διαρρέεται από το ρεύμα I_1:

$$R_1 = \frac{V_{CE} - V_{BE}}{I_1} = 24,3\ \text{k}\Omega.$$

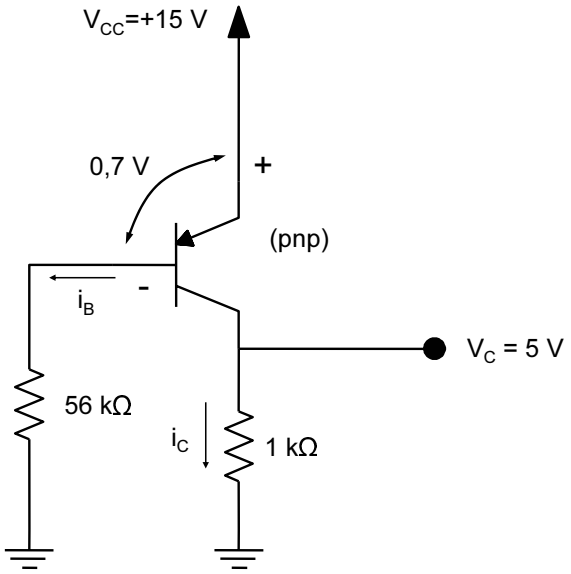
Επίσης,

$$I = I_C + I_1 = 2,177\ \text{mA},$$

άρα η R_C είναι:

$$R_C = \frac{V_{CC} - V_{CE}}{I} = 4,59\ \text{k}\Omega.$$

Πρόβλημα 4.14 Βρείτε το β του τρανζίστορ του σχήματος (4.20).



Σχήμα 4.20

Λύση:
Το ρεύμα βάσης θα διαρρέει την αντίσταση των 56 kΩ και επομένως:

$$I_B = \frac{(15 - 0,7)\ \text{V}}{56\ \text{k}\Omega} = 0,255\ \text{mA}.$$

Το ρεύμα του συλλέκτη βρίσκεται από την πτώση τάσης των 5 V πάνω στην αντίσταση του 1 kΩ, δηλαδή:

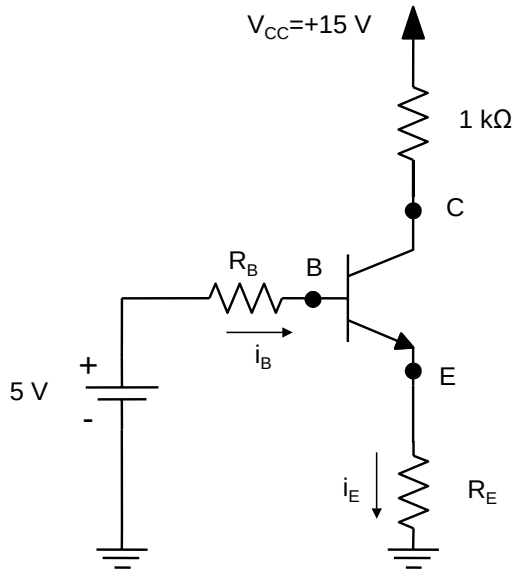
$$I_C = \frac{5\ \text{V}}{1\ \text{k}\Omega} = 5\ \text{mA}.$$

Επομένως το β του τρανζίστορ θα βρεθεί από τη σχέση του ρεύματος βάσης και συλλέκτη.

$$I_C = \beta I_B$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{I_c}{I_B} = 19,6.$$

Πρόβλημα 4.15 Θεωρήστε το κύκλωμα του σχήματος (4.21). Έστω οτι απαιτούμε κατά τη λειτουργία του τρανζίστορ ένα ρεύμα συλλέκτη που παίρνει τιμές στο διάστημα $[4, 5]$ mA. Έστω οτι το β του τρανζίστορ μεταβάλεται από 100 εως 300. Βρείτε τις τιμές των αντιστάσεων R_B και R_E. Θεωρήστε $v_{BE} = 0,7$ V.



Σχήμα 4.21

Λύση:
Από το κύκλωμα, μπορούμε να γράψουμε οτι:

$$5 = I_B R_B + v_{BE} + I_E R_E. \tag{4.0.4}$$

Το ρεύμα εκπομπού, I_E, είναι:

$$I_E = I_C \left(\frac{\beta + 1}{\beta} \right), \tag{4.0.5}$$

και το ρεύμα συλλέκτη:

$$I_B = \frac{I_C}{\beta}. \tag{4.0.6}$$

Από τις σχέσεις (4.0.4), (4.0.5), (4.0.6) και $v_{BE} = 0,7$ V θα έχουμε:

$$4,3 = R_B \frac{I_C}{\beta} + R_E I_C \frac{(\beta + 1)}{\beta}. \tag{4.0.7}$$

Θέλουμε

$$I_C = 4 \text{ mA} \quad \text{για} \quad \beta = 100 \quad \text{και}$$

$$I_C = 5 \text{ mA} \quad \text{για} \quad \beta = 300.$$

Επομένως η εξίσωση (4.0.7) θα μας δώσει ένα σύστημα δύο εξισώσεων:

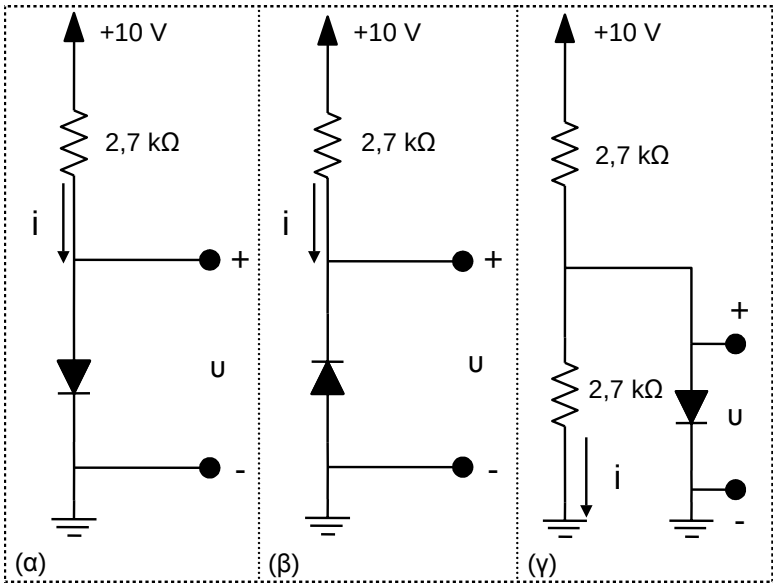
$$4,3 = 0,04 R_B + 4,04 R_E,$$

$$4,3 = 0,01667 R_B + 5,017 R_E.$$

Επιλύοντας αυτό το σύστημα των δύο εξισώσεων, θα έχουμε:

$$R_B = 31,5 \text{ k}\Omega \quad \text{και} \quad R_E = 753 \ \Omega.$$

Πρόβλημα 4.16 Για τα κυκλώματα του σχήματος (4.22), βρείτε το ρεύμα i και την τάση υ. Θεωρήστε ιδανικές διόδους



Σχήμα 4.22

Λύση:
(α)

Έστω οτι η δίοδος είναι ανοικτή, επομένως:

$$i = \frac{10 \text{ V}}{2,7 \text{ k}\Omega} = 3,70 \text{ mA}.$$

Για δίοδο κλειστή $\upsilon_D = 10$ V.
Το μοντέλο της ιδανικής διόδου έχει $\upsilon_D = 0$ για ρεύμα διόδου $i_D \geqq 0$ και $i_D = 0$ για $\upsilon_D \leqq 0$.
Από τις παραπάνω υποθέσεις η δεύτερη (δίοδος κλειστή και $\upsilon_D = 10$ V είναι απορριπτέα. Επομένως:

$$i = 3,70 \text{ mA}.$$

(β)

Η δίοδος είναι ανάστροφα πολωμένη κι επομένως είναι κλειστή. Άρα έχουμε $\upsilon = 0$ και ρεύμα μηδέν, $i = 0$.

(γ)

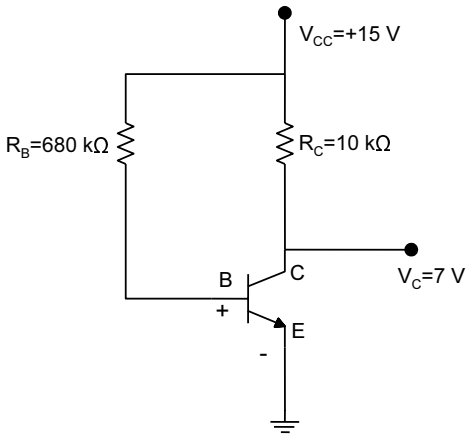
Η δίοδος είναι ανοικτή με αποτέλεσμα το ρεύμα:

$$i = \frac{10 \text{ V}}{(2,7 + 2,7) \text{ k}\Omega} \simeq 2 \text{ mA},$$

και το υ προσδιορίζεται από το διαιρέτη τάσης των δύο ίσων αντιστάσεων:

$$\upsilon = \left(\frac{2,7}{2,7 + 2,7}\right) \times 10 \text{ V} = 5 \text{ V}.$$

Πρόβλημα 4.17 Δίνεται το κύκλωμα του Σχήματος (4.23), όπου $V_{BE} = 0,7$ V. Να βρεθεί το β του τρανζίστορ.



Σχήμα 4.23

Λύση:
Το ρεύμα της βάσης είναι:

$$I_b = \frac{V_{CC} - V_{BE}}{R_B} = \frac{15 - 0,7}{680 \times 10^3} \text{ A} = 21 \text{ μA}.$$

Το ρεύμα του συλλέκτη είναι:

$$I_C = \frac{V_{CC} - V_C}{R_C} = \frac{15 - 7}{10 \times 10^3} \text{ A} = 0,8 \text{ mA}.$$

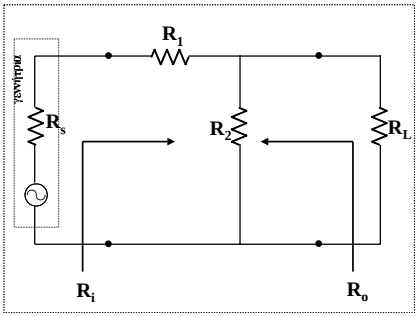
Το β του τρανζίστορ μπορεί να βρεθεί από τη σχέση του ρεύματος του συλλέκτη με το ρεύμα βάσης:

$$I_C = \beta I_B \Rightarrow \beta = \frac{I_C}{I_B} = \frac{0,8}{21 \times 10^{-3}} = 38,1.$$

5

Γενικές ασκήσεις

Πρόβλημα 5.1 Να υπολογιστεί η αντίσταση R_1 του κυκλώματος του σχήματος ώστε η αντίσταση εισόδου του να ισούται με την εσωτερική αντίσταση της γεννήτριας, ενώ η αντίσταση εξόδου του να ισούται με την αντίσταση φόρτου, δηλαδή $R_i = R_s$ και $R_0 = R_L$. Να υποθέσετε ότι ισχύει $R_s \geq R_L$.



Λύση:

Για την αντίσταση εισόδου και εξόδου θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} R_i = R_s = R_1 + R_2 \| R_L = R_1 + \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L} \\ R_0 = R_L = R_2 \| (R_1 + R_S) = \frac{R_2(R_1 + R_s)}{R_2 + R_1 + R_s} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{R_s - R_1} = \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_L} \\ \dfrac{1}{R_L} = \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_1 + R_s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_s - R_1} = \frac{1}{R_L} - \frac{1}{R_1 + R_s} + \frac{1}{R_L}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_s - R_1} = \frac{1}{R_1 + R_s} = \frac{2}{R_L}$$

$$\Rightarrow \frac{2R_s}{R_s^2 - R_1^2} = \frac{2}{R_L}$$

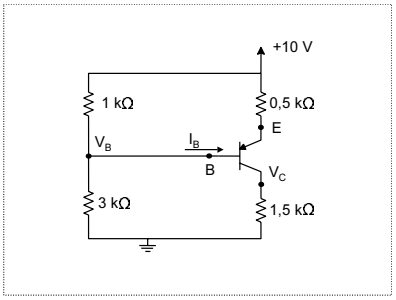
$$\Rightarrow R_1^2 = R_s^2 - R_s R_L$$

$$\Rightarrow R_1 = \sqrt{R_s(R_s - R_L)}.$$

Πρόβλημα 5.2 Για το κύκλωμα του σχήματος θεωρούμε ένα τρανζίστορ τύπου pnp με $\beta = 100$ και $V_{BE} = -0,6\,\mathrm{V}$. Στο σημείο κανονικής λειτουργίας (σημείο πόλωσης) του τρανζίστορ να βρείτε τα I_B (ρεύμα βάσης), I_E (ρεύμα εκπομπού), I_C (ρεύμα συλλέκτη), V_B (τάση βάσης), V_C (τάση συλλέκτη), και A (ενίσχυση).

Λύση:

Από το διαιρέτη τάσης μεταξύ των αντιστάσεων 1 kΩ και 3 kΩ θα έχουμε για την τάση της βάσης:



Σχήμα 5.1

$$V_B = \frac{3\ \text{k}\Omega}{(1+3)\ \text{k}\Omega} \times 10\ \text{V} = 7,5\ \text{V},$$

και για την τάση του εκπομπού:

$$V_E = V_B + 0,6\ \text{V} = 8,1\ \text{V}.$$

Το ρεύμα του εκπομπού είναι:

$$I_E = \frac{(10-8,1)\ \text{V}}{0,5\ \text{k}\Omega} = 3,8\ \text{mA},$$

και το ρεύμα του συλλέκτη:

$$I_C \simeq I_E = 3,8\ \text{mA}.$$

Επομένως:

$$V_C = I_C R_C = 5,7\ \text{V},$$

$$I_B = \frac{I_C}{\beta} = 38\ \text{mA},$$

και η ενίσχυση είναι:

$$A = -\frac{\beta}{\beta+1}\frac{R_C}{R_E + r_t},$$

όπου η εσωτερική αντίσταση του τρανζίστορ είναι:

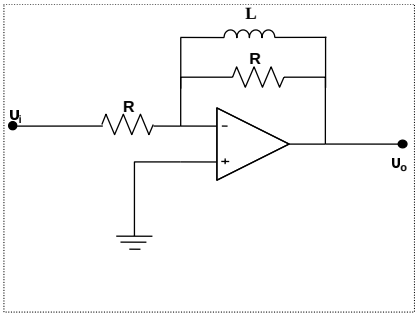
$$r_t = \frac{0,025}{I_B\ (\ \text{mA})}\ \Omega$$

$$\Rightarrow r_t = 6,8\ \Omega.$$

Επομένως:

$$A = -2,93.$$

Πρόβλημα 5.3 Για το κύκλωμα του σχήματος να βρείτε την τάση εξόδου v_0 αν η τάση εισόδου ως συνάρτηση του χρόνου είναι $v_i = -kt$, $k > 0$. Να υποθέσετε ιδανικό τελεστικό ενισχυτή στο κύκλωμα.



Λύση:

Γνωρίζουμε ότι:

$$v_- - v_0 = L\frac{dI_2}{dt} \Rightarrow -v_0 = L\frac{dI_2}{dt},$$

καθότι από την εικονική γείωση έχουμε $v_- = v_+ = 0$.
Το ολικό ρεύμα I που διαρρέει την αντίσταση στην είσοδο του τελεστικού ενισχυτή θα είναι:

$$I = I_1 + I_2,$$

όπου I_1, I_2 είναι το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση R (στην ανάδραση) και το πηνίο L αντίστοιχα.

$$\Rightarrow \frac{v_i}{R} = \frac{-v_0}{R} + I_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R}\frac{dv_i}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{dv_0}{dt} - \frac{v_0}{L}$$

$$\Rightarrow k = \frac{dv_0}{dt} + \left(\frac{R}{L}\right) v_0$$

$$\Rightarrow \frac{dv_0}{dt} = k - \frac{R}{L}v_0 = \frac{R}{L}\left(\frac{Lk}{R} - v_0\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{v_0} \frac{dv_0}{(Lk/R) - v_0} = \int_0^t \frac{R}{L}dt$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{\frac{Lk}{R} - v_0}{Lk/R}\right) = -\frac{R}{L}t$$

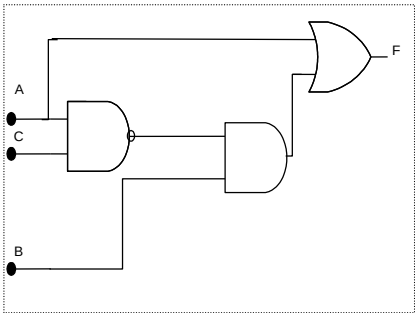
$$\frac{Lk}{R} - v_0 = -\frac{Lk}{R}e^{-(R/L)t}$$

$$v_0 = \frac{Lk}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right).$$

Πρόβλημα 5.4 (α) Να δείξετε ότι ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\overline{A}\overline{B} + A\overline{B} + \overline{A}B = \overline{B} + \overline{A}B, \quad ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C = A(B + C)$$

(β) Να βρείτε την έξοδο F του κυκλώματος του σχήματος και να αποδείξετε ότι εξαρτάται μόνο από τις εισόδους A, B. Να σχεδιάσετε ένα ισοδύναμο κύκλωμα με πύλες NAND.



Λύση:

(α)

$$\overline{A}\,\overline{B} + A\overline{B} + \overline{A}B = \overline{B}(A + \overline{A}) + \overline{A}B = \overline{B} + \overline{A}B$$

$$ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C = AB(C + \overline{C}) + A\overline{B}C =$$

$$AB + A\overline{B}C = A(B + \overline{B}C),$$

αλλά

$$B + \overline{B}C = B + C.$$

Επομένως

$$ABC + AB\overline{C} + A\overline{B}C = A(B + C)$$

(β)

$$F = A + B(\overline{AC})$$

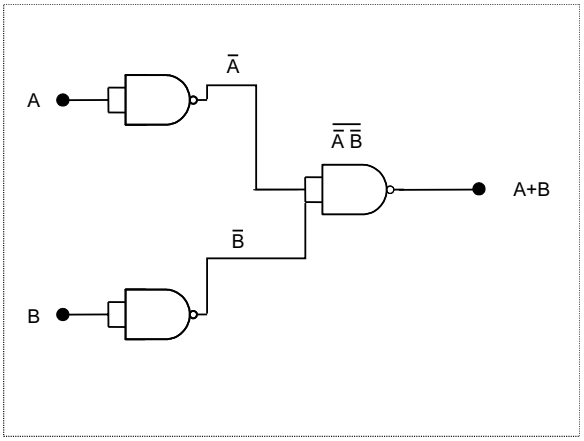
$$\Rightarrow \overline{F} = \overline{A + B(\overline{A}C)} = \overline{A}(\overline{B} + AC)$$

$$\Rightarrow \overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}A\overline{C} = \overline{AB}$$

$$\Rightarrow F = A + B$$

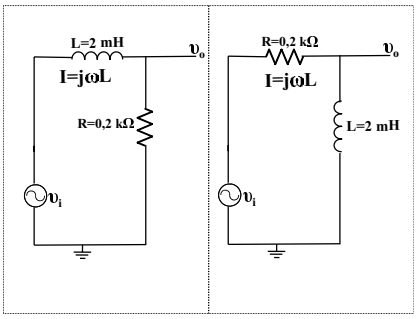
$$F = A + B = \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}\,\overline{B}}.$$

Το ισοδύναμο κύκλωμα της F με πύλες NAND βρίσκεται στο σχήμα (5.2).



Σχήμα 5.2

Πρόβλημα 5.5 Δίνονται τα παρακάτω κυκλώματα του σχήματος.
(α) Τι είδους φίλτρα αντιπροσωπεύουν αυτά τα δυο κυκλώματα.
(β) Να υπολογιστεί αριθμητικά η κυκλική συχνότητα καμπής ω_b, και να σχεδιαστεί χονδρικά το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς $|H(\omega)|$ ως συνάρτηση της κυκλικής συχνότητας ω.
Λύση:



Για το πρώτο φίλτρο, η τάση εξόδου v_0 είναι:

$$v_0 = \frac{Rv_i}{R + j\omega L} = \frac{v_i}{1 + j\omega/(R/L)} = \frac{v_i}{1 + j(\omega/\omega_b)}$$

$$H(j\omega) = \frac{v_0}{v_i} = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_b)}, \quad |H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega^2/\omega_b^2)}}.$$

Επομένως Το φίλτρο είναι βαθυπερατό καθότι $|H(\omega)| \to 0$ για $\omega \to \infty$ και $|H(\omega)| \to 1$ για $\omega \to 0$. Η συχνότητα καμπής:

$$\omega_b = R/L = \frac{0,2 \text{ k}\Omega}{2 \text{ mH}} = 0,1 \times 10^3 \times 10^{-3} = 10^5 = 100 \text{ kHz}.$$

Για το δεύτερο φίλτρο:

$$v_0 = \frac{j\omega L v_i}{R + j\omega L} = \frac{v_i}{1 + (R/L)j\omega} = \frac{v_i}{1 - j(\omega_b/\omega)},$$

$$H(\omega) = \frac{v_0}{v_i} = \frac{1}{1 - j\omega_b/\omega},$$

με

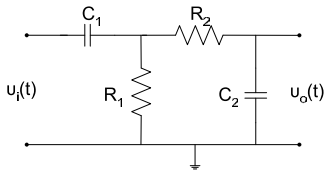
$$|H(\omega)| = \frac{1}{(1 + (\omega_b/\omega)^2)^{1/2}},$$

όπου η συχνότητα καμπής είναι:

$$\omega_b = \frac{R}{L} = 100 \text{ kHz}.$$

Το φίλτρο είναι υψιπερατό καθότι $|H(\omega)| \to 0$ για $\omega \to 0$ και $|H(\omega)| \to 1$ για $\omega \to \infty$.

Πρόβλημα 5.6 Το παρακάτω ηλεκτρονικό κύκλωμα είναι του τύπου, CR-RC μορφοποίησης παλμού (ή αλλιώς διαφόρισης-ολοκλήρωσης) και ο τελεστικός ενισχυτής ιδανικός. Να βρείτε την τάση εξόδου $v_0(t)$ ως συνάρτηση του χρόνου για βηματική συνάρτηση στην είσοδο $\hat{v}_i u(t)$, μέσω μεθόδου Laplace, για $R_1C_1 = R_2C_2 = \tau$ και να αποδείξετε ότι το μέγιστο ύψος του παλμού εξόδου εμφανίζεται σε χρόνο $t = \tau$, είναι ανάλογο του ύψους της τάσης εισόδου και ανεξάρτητο του τ.



Λύση:

Επειδή παρεμβάλλεται ο τελεστικός ενισχυτής (ιδανικός) που λειτουργεί ως follower (ακολουθητής), το δεύτερο κύκλωμα δεν επηρεάζει το πρώτο, οπότε:

$$H(s) = \frac{V_{o(s)}}{V_{i(s)}} = \frac{R_1}{R_1 + 1/C_1 s} \frac{1/C_2 s}{R_2 + 1/C_2 s}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{R_1C_1 s}{R_1C_1 s + 1} \frac{1}{R_2C_2 s + 1},$$

με $R_1C_1 = R_2C_2 = \tau$. Έχουμε,

$$H(s) = \frac{\tau s}{(\tau s + 1)(\tau s + 1)} = \frac{\tau s}{(\tau s + 1)^2}$$

ή

$$H(s) = \frac{1}{\tau} \frac{s}{(s + 1/\tau)^2}$$

και

$$V_o(s) = V_{in}(s)H(s) = \frac{\hat{v}_i}{s} \frac{1}{\tau} \frac{s}{(s + 1/\tau)^2}.$$

Επομένως λαμβάνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, θα έχουμε:

$$v_0(t) = \mathcal{L}^{-1}\{V_o(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\hat{v}_i}{s} \frac{1}{\tau} \frac{s}{(s + 1/\tau)^2}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\hat{v}_i}{\tau} \frac{1}{(s + 1/\tau)^2}\right\}$$

$$\Rightarrow \upsilon_0(t) = \frac{\hat{\upsilon}_i}{\tau} t e^{-t/\tau}$$

$$\upsilon_0(t) \to \text{max}, \quad \text{αν} \quad (d/dt)(te^{-t/\tau}) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{t}{\tau} e^{-t/\tau} + e^{-t/\tau} = e^{-t/\tau}\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) = 0$$

$$\Rightarrow t = \tau.$$

Με $t = \tau$ προκύπτει:

$$\upsilon_0(t = \tau) = \frac{\hat{\upsilon}_i}{\tau} \tau e^{-1}$$

$$\Rightarrow \upsilon_0(t = \tau) \equiv \upsilon_{0\text{max}} = \frac{\hat{\upsilon}_i}{e},$$

και είναι ανάλογο του $\hat{\upsilon}_i$, ανεξάρτητο του τ.

Πρόβλημα 5.7 Να σχεδιάσετε (στην τελική μορφή μόνο με πύλες NAND) ένα ψηφιακό συνδυαστικό κύκλωμα που να λαμβάνει ως εισόδους 3 ψήφους (του τύπου, ναι-όχι) και να παρέχει στην έξοδο 1 ή 0 αν έχουμε πλειοψηφία ή όχι, αντίστοιχα, αλλά όχι παμψηφία! Δώστε το αποτέλεσμα αυτό μέσω μιας κόκκινης LED. Να επεκτείνετε το κύκλωμα, έτσι ώστε, να δίνει έξοδο παμψηφίας σε πράσινη LED.
Λύση:

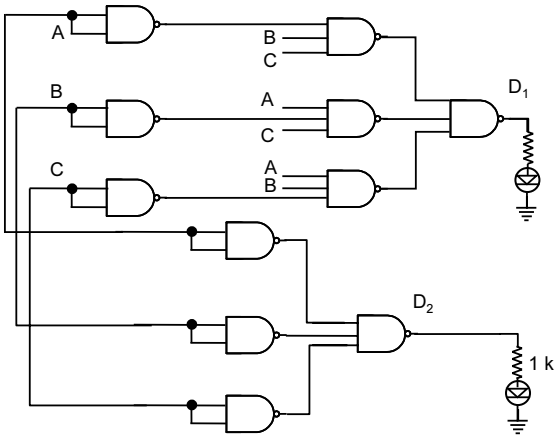
$$D_1 = \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

$$D_2 = ABC = \overline{\overline{ABC}}$$

A	B	C	D_1	D_2
0	0	0		
0	0	1		
0	1	0		
0	1	1	1	
1	0	0		
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1		1

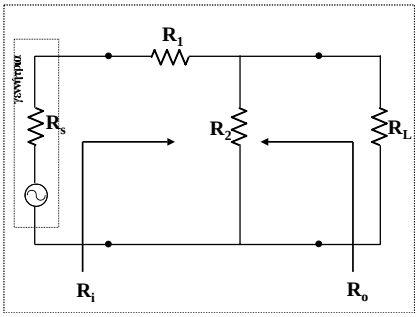
$$D_1 = \overline{\overline{\overline{\overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}}}} = \overline{\overline{\overline{A}BC} \cdot \overline{A\overline{B}C} \cdot AB\overline{C}}$$

AB/C	0	1
00		
01		1
10		1
11	1	



Σχήμα 5.3

Πρόβλημα 5.8 Να υπολογίσετε την αντίσταση R_2 του κυκλώματος του σχήματος ως συνάρτηση των R_s και R_L, ώστε η αντίσταση εισόδου του να ισούται με την εσωτερική αντίσταση της γεννήτριας, ενώ η αντίσταση εξόδου του να ισούται με την αντίσταση φόρτου, δηλαδή $R_i = R_s$ και $R_0 = R_L$. Να υποθέσετε ότι ισχύει $R_s \geq R_L$.



Λύση:

Από την άσκηση (5.1) στη σελίδα (145) έχουμε ήδη τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\frac{1}{R_S - R_1} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_L},$$

και

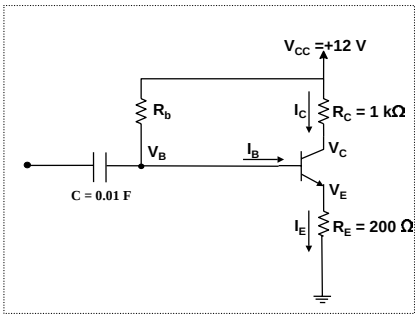
$$R_1 = \sqrt{R_S(R_s - R_L)}.$$

Από τις δύο προηγούμενες σχέσεις προκύπτει:

$$\Rightarrow \frac{1}{R_S - \sqrt{R_S(R_S - R_L)}} - \frac{1}{R_L} = \frac{1}{R_2}$$

$$\Rightarrow R_2 = \frac{R_L(R_S - \sqrt{R_S - R_L})}{R_L - (R_S - \sqrt{R_S(R_S - R_L)})}.$$

Πρόβλημα 5.9 Για το κύκλωμα του σχήματος θεωρούμε ένα τρανζίστορ τύπου npn θεωρώντας ότι λειτουργεί στην ενεργό περιοχή ($V_{BE} = 0,7\,\mathrm{V}$) με $\beta = 40$ και $V_{CE} = 6\,\mathrm{V}$. Να βρείτε την τιμή του I_C (ρεύμα συλλέκτη), I_E (ρεύμα εκπομπού), I_B (ρεύμα βάσης) και της αντίστασης R_b.



Λύση:

$$V_{CC} = (R_C + R_E)I_C + V_{CE}$$

διότι $I_C \cong I_E$

$$\Rightarrow I_C = \frac{V_{CC} - V_{CE}}{R_C + R_E} = 5\ \mathrm{mA}.$$

Άρα:

$$V_E = R_E I_E = 1\ \mathrm{V},$$

και

$$V_B = V_E + V_{BE} = 1,7 \text{ V}.$$

Επίσης:

$$I_B = \frac{I_C}{\beta} = \frac{5 \text{ mA}}{40} = 0,125 \text{ mA}.$$

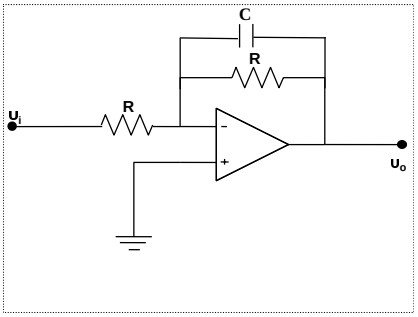
Επομένως:

$$R_B = \frac{V_{CC} - V_B}{I_B} = \frac{(12 - 1,7) \text{ V}}{0,125} = 82,4 \text{ k}\Omega$$

Πρόβλημα 5.10 Για το κύκλωμα του σχήματος να βρείτε την τάση εξόδου $v_0(t)$ ως συνάρτηση του χρόνου αν η τάση εισόδου είναι ανεξάρτητη του χρόνου $v_i = -k$, $k > 0$. Ειδικότερα να δείξετε ότι:

$$v_0(t) = k\left(1 - e^{-t/RC}\right).$$

Να υποθέσετε ότι ο τελεστικός ενισχυτής είναι ιδανικός.



Λύση:

$$\frac{v_i}{R} = -\frac{v_0}{R} - c\frac{dv_0}{dt}$$

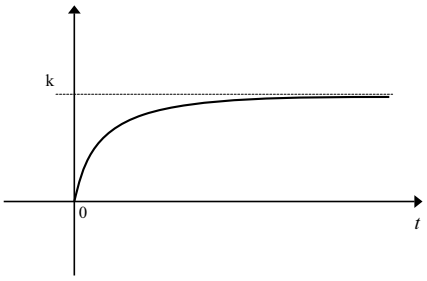
$$\Rightarrow k - v_0 = RC\frac{dv_0}{dt}$$

$$\Rightarrow \int_0^{v_0} \frac{dv_0}{k - v_0} = \int_0^t \frac{dt}{RC}$$

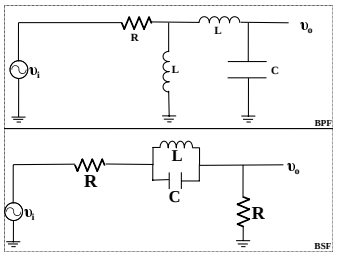
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{k - v_0}{k}\right) = \frac{t}{RC}$$

$$\Rightarrow v_0 = k\left(1 - e^{-t/RC}\right).$$

Το γράφημα της τάσης εξόδου δίνεται στο παρακάτω σχήμα (5.4).

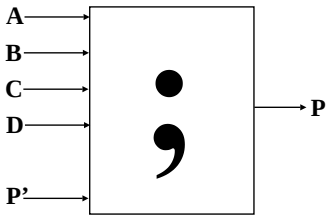


Σχήμα 5.4



Σχήμα 5.5

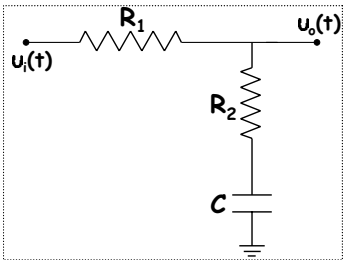
Πρόβλημα 5.11 (α) Να σχεδιάσετε ένα ψηφιακό κύκλωμα με χρήση πυλών XOR δυο εισόδων και ενός αναστροφέα που να βρίσκει τον αριθμό των "1" από τέσσερις εισόδους A,B,C,D και να δίνει έξοδο $P = 1$ (ομοτιμία) για άρτιο πλήθος.
(β) Επεκτείνετε το κύκλωμα σας χρησιμοποιώντας μια βοηθητική είσοδο P' για την επιλογή της ομοτιμίας ($P' = 1$ για άρτια ομοτιμία, $P' = 0$ για περιττή) . *Υπόδειξη:* Να μελετήσετε την απλή περίπτωση μόνο για δυο εισόδους και μετέπειτα να γενικεύσετε για τέσσερις εισόδους.



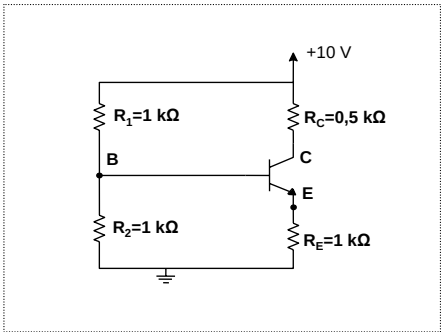
Πρόβλημα 5.12 Να βρείτε τον τύπο του φίλτρου καθενός από τα κυκλώματα του σχήματος 5.5, βασιζόμενοι στη συμπεριφορά των διαφόρων στοιχείων του κυκλώματος σε χαμηλές και υψηλές συχνότητες.
Να δικαιολογήσετε επαρκώς την απάντηση σας.
Υπενθύμιση: Οι τύποι φίλτρων είναι: σταθερό, υψιπερατό, βαθυπερατό, ζωνοπερατό, και ζωνοφρακτικό.

Πρόβλημα 5.13 Να βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς, $H(s) = V_0(s)/V_i(s)$, του συστήματος του σχήματος 5.6, όπου οι τιμές των αντιστάσεων R_1, R_2 και του πυκνωτή C είναι γνωστά μεγέθη, $V_0(s)$ και $V_i(s)$ είναι οι μετασχηματισμοί Laplace των σημάτων εξόδου και εισόδου ($v_0(t)$ και $v_i(t)$) αντίστοιχα.

Πρόβλημα 5.14 Για το κύκλωμα του σχήματος 5.7 θεωρούμε ένα τρανζίστορ τύπου npn με $\beta = 400$ και $V_{BE} = 0,7$ V. Στο σημείο κανονικής λειτουργίας (σημείο πόλωσης) του τρανζίστορ να υπολογίσετε τη $V_{CE} = V_C - V_E$ (τάση μεταξύ του συλλέκτη και του εκπομπού).



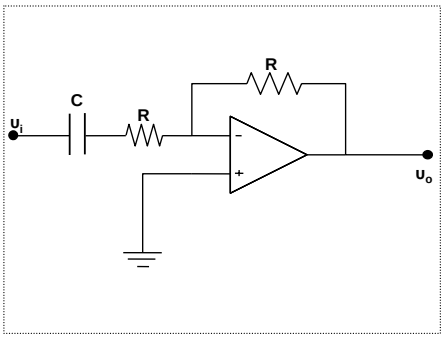
Σχήμα 5.6



Σχήμα 5.7

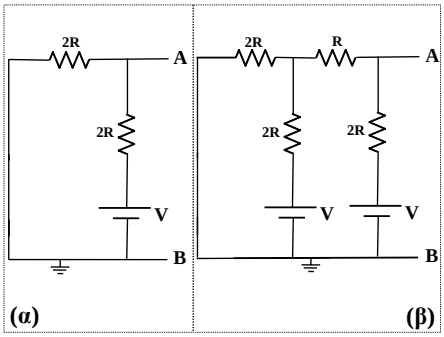
Πρόβλημα 5.15 Για το κύκλωμα του σχήματος υποθέτουμε ένα ιδανικό τελεστικό ενισχυτή. Το σήμα εισόδου v_i είναι ενα ημιτονοειδές σήμα κυκλικής συχνότητας ω. Να βρείτε την ενίσχυση, $A = v_o/v_i$, του κυκλώματος ως συνάρτηση της ω. (Τα R και C είναι γνωστά μεγέθη). Να βρείτε μια έκφραση της γωνίας φάσης ϕ μεταξύ των τάσεων των σημάτων εισόδου και εξόδου, ειδικότερα να δείξετε ότι η φάση αυτή είναι:

$$\phi = \pi + \arctan\left(\frac{1}{\omega CR}\right).$$

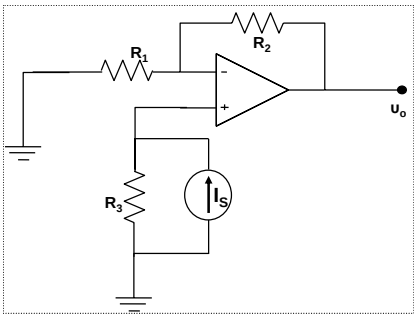


Πρόβλημα 5.16 **(α)** Να γράψετε τον πίνακα αληθείας πύλης EX-OR τριών εισόδων A, B, C, $Y = A \bigoplus B \bigoplus C$, όπου A, B, C παίρνουν τιμές 0 ή 1.
(β) Να σχεδιάσετε ένα κύκλωμα ισοδύναμο με μια NAND δυο εισόδων με τη βοήθεια μόνο πυλών NOR.

Πρόβλημα 5.17 Δίνονται τα κυκλώματα του σχήματος 5.8. Να βρείτε τα ισοδύναμα κυκλώματα Thevenin των κυκλωμάτων αυτών, δηλαδή να προσδιορίσετε τις παραμέτρους V_{th} και R_{th} ως συνάρτηση των παραμέτρων V και R για κάθε ένα από τα δύο κυκλώματα.
Υπόδειξη: Για το κύκλωμα (β) να χρησιμοποιήσετε το αποτέλεσμα του κυκλώματος (α).



Σχήμα 5.8



Σχήμα 5.9

Πρόβλημα 5.18 Για το κύκλωμα του σχήματος 5.9 υποθέτουμε έναν ιδανικό τελεστικό ενισχυτή. Να βρείτε την έξοδο του κυκλώματος ως συνάρτηση των αντιστάσεων R_1, R_2, R_3, και της πηγής ρεύματος I_S. Ειδικότερα να αποδείξετε ότι η έξοδος είναι:

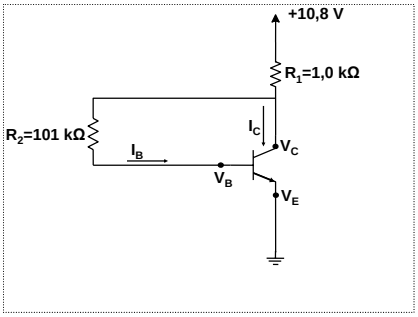
$$v_0 = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) R_3 I_S.$$

Πρόβλημα 5.19 Για το κύκλωμα του σχήματος 5.10 θεωρούμε ένα τρανζίστορ τύπου npn με $\beta = 100$ και $V_{BE} = 0,7$ V. Στο σημείο κανονικής λειτουργίας (σημείο πόλωσης) του τρανζίστορ να υπολογίσετε τη τάση $V_{CE} = V_C - V_E$ (τάση μεταξύ του συλλέκτη και του εκπομπού).

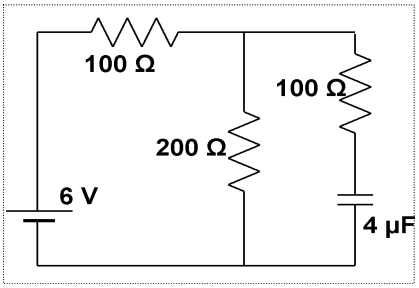
Πρόβλημα 5.20 Το κύκλωμα του σχήματος 5.11 είναι συνδεδεμένο με μια μπαταρία 6 V για πάρα πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα. Να βρείτε την τάση στα άκρα του πυκνωτή χωρητικότητας 4 μF.

Πρόβλημα 5.21 Για το κύκλωμα του σχήματος 5.12, να γράψετε τον πίνακα αληθείας που θα περιέχει τις δυο εισόδους A, B και την έξοδο Y. Επίσης να γράψετε μια Boolean έκφραση γι' αυτό το κύκλωμα.

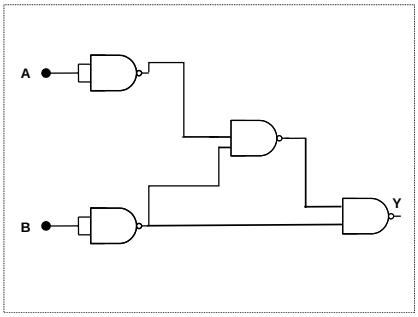
Πρόβλημα 5.22 Να βρείτε το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin του κυκλώματος του σχήματος 5.13 αριστερά των ακροδεκτών A και B. Δηλαδή να προσδιορίσετε την τάση V_{Th} και την αντίσταση R_{Th} του κυκλώματος που φαίνεται από την αντίσταση φόρτου R_L.



Σχήμα 5.10

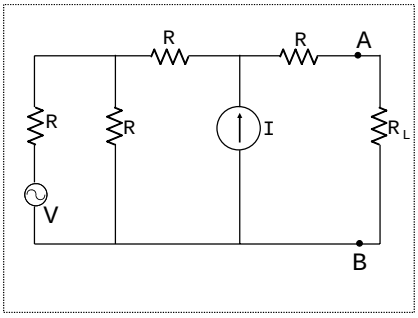


Σχήμα 5.11

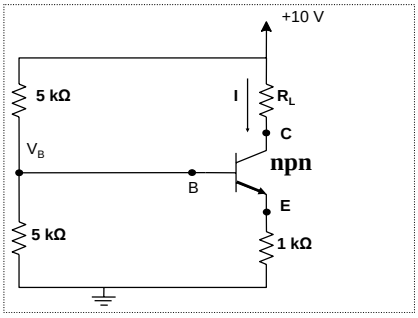


Σχήμα 5.12

Πρόβλημα 5.23 **(α)** Τα τρανζίστορ μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως πηγές ρεύματος. Να υπολογίσετε το ρεύμα, I, που διαρρέει την αντίσταση φόρτου R_L στον συλλέκτη του σχήματος 5.14. Το ρεύμα που θα υπολογίσετε δεν πρέπει να εξαρτάται από την τιμή της αντίστασης φόρτου.
Να υποθέσετε ότι το τρανζίστορ βρίσκεται στην ενεργό περιοχή λειτουργίας του και να αγνοήσετε το ρεύμα που διαρρέει τη βάση του. Επίσης ισχύει $V_{BE} = 0,7\,\mathrm{V}$. **(β)** Να αντικαταστήσετε μια πύλη OR τριών εισόδων με πύλες NAND. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε πύλες NAND δυο ή τριών εισόδων.



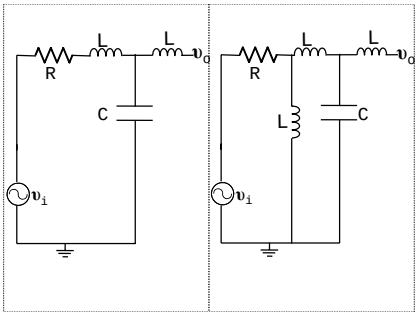
Σχήμα 5.13



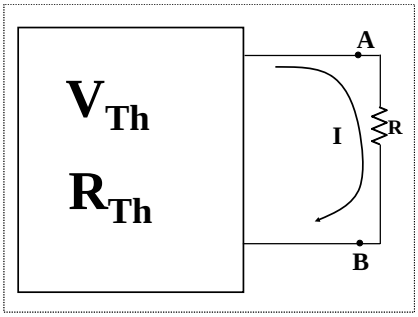
Σχήμα 5.14

Πρόβλημα 5.24 Να υπολογίσετε το ρεύμα, i, και την τάση, v_0, στην έξοδο του ιδανικού τελεστικού ενισχυτή ως συνάρτηση των R και v.

Πρόβλημα 5.25 Να προσδιορίσετε το είδος του φίλτρου που περιγράφουν τα κυκλώματα του σχήματος 5.15, αναλύοντας τη συμπεριφορά των διαφόρων στοιχείων του κυκλώματος ως συνάρτηση της κυκλικής συχνότητας ω. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



Σχήμα 5.15

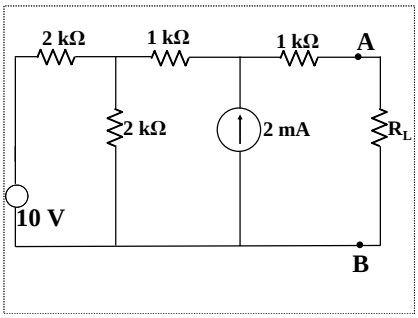


Σχήμα 5.16

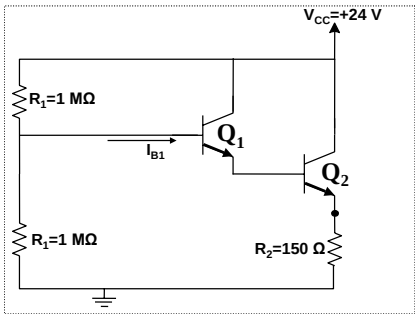
Πρόβλημα 5.26 Ένα γραμμικό και χρονικά σταθερό κύκλωμα με πηγές, συνδέεται σ' ένα κλάδο του με αντίσταση $R = 100\ \Omega$. Αν μεταβληθεί η R κατά $+5\%$ παρατηρείται σχετική μεταβολή του ρεύματος στον ίδιο κλάδο κατά $-2,5\%$ ($\delta I/I = -0,025$). Να υπολογιστεί η ισοδύναμη αντίσταση Thevenin, R_{Th}, του κυκλώματος.

Πρόβλημα 5.27 Να βρείτε το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin του κυκλώματος αριστερά των ακροδεκτών A και B. Δηλαδή να προσδιορίσετε την τάση V_{Th} και την αντίσταση R_{Th} του κυκλώματος που φαίνεται από την αντίσταση φόρτου R_L. Να βρείτε την αντίσταση φόρτου R_L για την οποία επιτυγχάνεται μέγιστη κατανάλωση ισχύος πάνω σ' αυτήν.

Πρόβλημα 5.28 Για το σύστημα των δύο τρανζίστορ τύπου npn του σχήματος να βρείτε το ρεύμα βάσης I_{B_1} του αριστερού τρανζίστορ Q_1 υποθέτοντας ότι και τα δύο τρανζίστορ έχουν $\beta = 99$.
Επίσης να υποθέσετε ότι τα τρανζίστορ βρίσκονται στην ενεργό περιοχή λειτουργίας τους και ότι ισχύει $V_{BE} = 0,7\,\mathrm{V}$.



Σχήμα 5.17



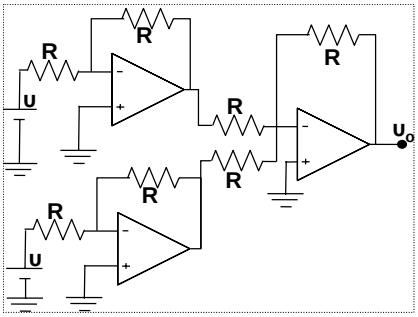
Σχήμα 5.18

Πρόβλημα 5.29 Να υπολογίσετε την τάση εξόδου, v_0, του συστήματος των ιδανικών τελεστικών ενισχυτών του σχήματος 5.19 ως συνάρτηση των v και R.

Πρόβλημα 5.30 Να δώσετε μια λογική σχέση, Y, η οποία να περιγράφει τη σύγκριση δύο διψήφιων αριθμών $A = A_1\,A_0$ και $B = B_1\,B_0$ όπου τα A_1, A_0, B_1, B_0 παίρνουν δυαδικές τιμές (0 ή 1). Η σχέση Y πρέπει να παίρνει τις ακόλουθες τιμές:

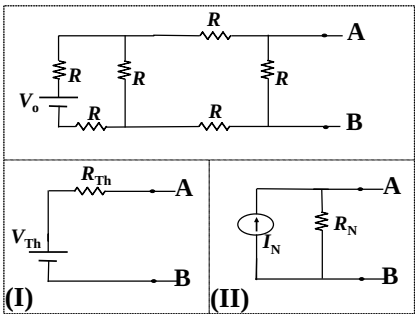
$$Y(A_1, A_0, B_1, B_0) = \begin{cases} 1 & \text{για } A > B, \\ 0 & \text{για } A \leq B. \end{cases}$$

Επίσης να δώσετε ένα λογικό κύκλωμα που να δέχεται ως εισόδους τα A_1, A_0, B_1, B_0 και να υλοποιεί τη σχέση Y.

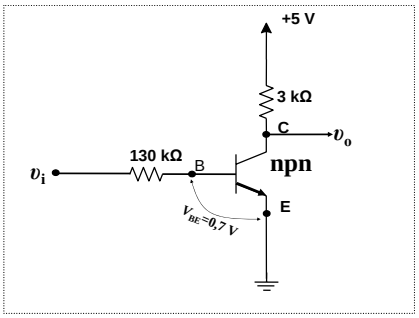


Σχήμα 5.19

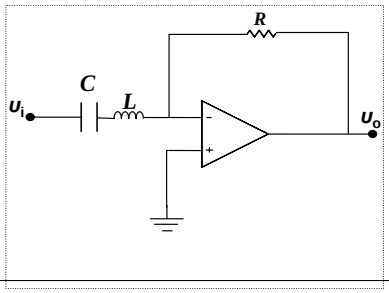
Πρόβλημα 5.31 Θεωρήστε το κύκλωμα του σχήματος το οποίο αποτελείται από έξι όμοιες αντιστάσεις και μια πηγή τάσης V_o.
(α) Να βρείτε το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin (όπως περιγράφεται στο σχήμα I) του κυκλώματος αριστερά των ακροδεκτών A και B του αρχικού κυκλώματος. Δηλαδή να προσδιορίσετε την τάση V_{Th} και την αντίσταση R_{Th} ως συνάρτηση των V_o και R.
(β) Να βρείτε το ισοδύναμο κύκλωμα Norton (όπως περιγράφεται στο σχήμα II) του κυκλώματος αριστερά των ακροδεκτών A και B του αρχικού κυκλώματος. Δηλαδή να προσδιορίσετε τη πηγή ρεύματος I_N και την αντίσταση R_N ως συνάρτηση των V_o και R.



Πρόβλημα 5.32 Θεωρήστε το κύκλωμα του σχήματος που περιλαμβάνει ένα τρανζίστορ τύπου npn. Θα θέλαμε όταν η τάση στην είσοδο $v_i = 5$ V λαμβάνει τη μέγιστη τιμή (η οποία είναι τα 5 V) τότε το τρανζίστορ να οδηγείται στην περιοχή κόρου και επομένως η τάση εξόδου v_o να λαμβάνει την ελάχιστη τιμή η οποία είναι $v_o = 0,2$ V.
Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της ενίσχυσης ρεύματος κοινού εκπομπού, $\beta = i_C/i_B$, για την οποία επιτυγχάνεται ελάχιστη τιμή στην τάση εξόδου για μέγιστη τάση εισόδου;
Ποια είναι η τάση εξόδου όταν η τάση εισόδου είναι μηδέν;
(Αυτό το κύκλωμα αποτελεί ένα λογικό αναστροφέα.)



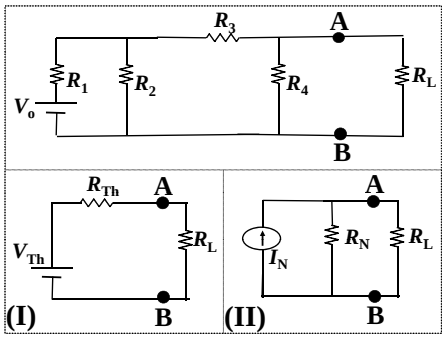
Πρόβλημα 5.33 Θεωρήστε το κύκλωμα του ιδανικού τελεστικού ενισχυτή όπως φαίνεται στο σχήμα.
Να υπολογίσετε τη συνάρτηση κέρδους $G = v_o/v_i$ (v_o και v_i είναι τα σήματα εξόδου και εισόδου, αντίστοιχα) του κυκλώματος ως συνάρτηση της κυκλικής συχνότητας ω, R, L, και C. Η έκφραση της G να είναι στη μορφή $G = A + jB$, όπου A, B είναι πραγματικοί αριθμοί. Ποια είναι η τιμή της $|G|$ για μικρές τιμές συχνοτήτων όπου ισχύει $\omega L \ll 1/(\omega C)$;



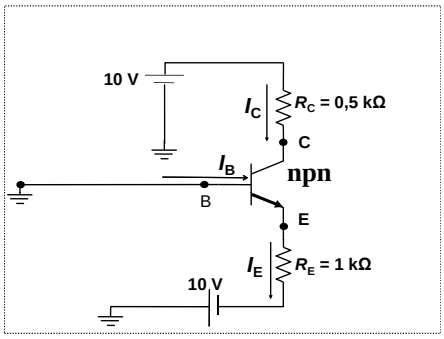
Πρόβλημα 5.34 Να γράψετε μια λογική σχέση, $Y = f(A, B, C)$ (f συνάρτηση των μεταβλητών A, B, C του παρακάτω πίνακα), και να σχεδιάσετε ένα κύκλωμα (χρησιμοποιώντας μόνο πύλες NAND) που να δέχεται ως εισόδους τα A, B, C και να υλοποιεί τη σχέση Y στην έξοδο.

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Πρόβλημα 5.35 Θεωρήστε το κύκλωμα του σχήματος 5.20, το οποίο αποτελείται από τέσσερις αντιστάσεις, R_1, R_2, R_3, R_4, μια αντίσταση φόρτου, R_L, και μια πηγή τάσης V_o.
(α) Να βρείτε το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin (όπως περιγράφεται στο σχήμα I) του κυκλώματος αριστερά των ακροδεκτών A και B του αρχικού κυκλώματος. Δηλαδή να προσδιορίσετε την τάση $V_{\rm Th}$ και την αντίσταση $R_{\rm Th}$ ως συνάρτηση των $V_{\rm o}$ και R_1, R_2, R_3, R_4. Ειδικότερα να δείξετε ότι ισχύουν



Σχήμα 5.20



Σχήμα 5.21

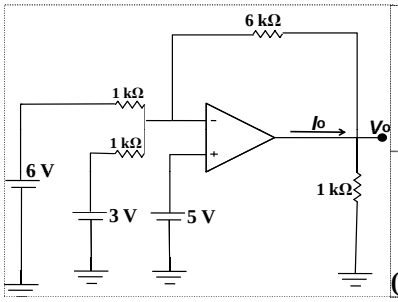
$$V_{\mathrm{Th}} = V_{\mathrm{o}} \left[\frac{R_2 R_4}{R_1(R_2+R_3+R_4)+R_2(R_3+R_4)} \right], \qquad R_{\mathrm{Th}} = \frac{R_4\left[R_3(R_1+R_2)+R_1R_2\right]}{(R_3+R_4)(R_1+R_2)+R_1R_2}$$

(β) Να βρείτε το ισοδύναμο κύκλωμα Norton (όπως περιγράφεται στο σχήμα II) του κυκλώματος αριστερά των ακροδεκτών A και B του αρχικού κυκλώματος. Δηλαδή να προσδιορίσετε τη πηγή ρεύματος I_{N} και την αντίσταση R_{N} ως συνάρτηση των V_o και $R_1,\ R_2,\ R_3,\ R_4$. Ειδικότερα να δείξετε ότι ισχύουν

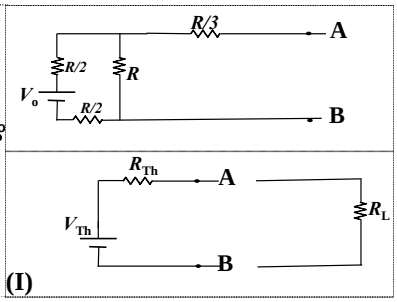
$$I_{\mathrm{N}} = V_{\mathrm{o}} \left[\frac{R_2}{R_1(R_2+R_3)+R_2R_3} \right], \qquad R_{\mathrm{N}} = \frac{R_4\left[R_3(R_1+R_2)+R_1R_2\right]}{(R_3+R_4)(R_1+R_2)+R_1R_2}$$

Πρόβλημα 5.36 Θεωρήστε το κύκλωμα του σχήματος 5.20 που περιλαμβάνει ένα τρανζίστορ τύπου npn με παράμετρο $\beta = 99$. Αυτό αποτελεί ένα κύκλωμα κοινής βάσης.
Να βρείτε τα ρεύματα εκπομπού, I_{E}, συλλέκτη, I_{C}, βάσης, I_{B}, και την τάση μεταξύ του συλλέκτη και της βάσης, V_{CB}.
Να υποθέσετε ότι το τρανζίστορ βρίσκεται στην ενεργό περιοχή λειτουργίας του και ότι ισχύει $V_{\mathrm{BE}} = 0,7\,\mathrm{V}$.

Πρόβλημα 5.37 Θεωρήστε το κύκλωμα του ιδανικού τελεστικού ενισχυτή όπως φαίνεται στο σχήμα 5.22. Να υπολογίσετε το ρεύμα, I_o, και την τάση εξόδου V_o.



Σχήμα 5.22



Σχήμα 5.23

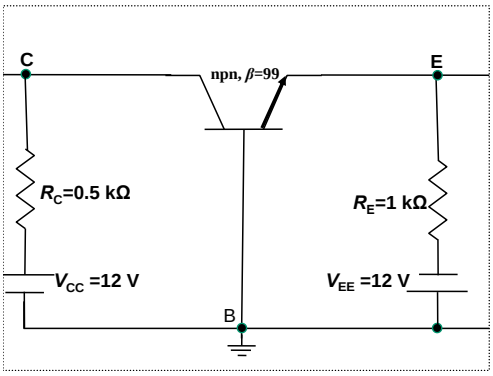
Πρόβλημα 5.38 Να δώσετε μια λογική σχέση, Y, η οποία να περιγράφει τη σύγκριση δύο διψήφιων αριθμών $A = A_1\,A_0$ και $B = B_1\,B_0$ όπου τα $A_1,\ A_0,\ B_1$ και B_0 παίρνουν δυαδικές τιμές (0 ή 1). Η σχέση Y πρέπει να παίρνει τις ακόλουθες τιμές

$$Y(A_1, A_0, B_1, B_0) = \begin{cases} 1 & \text{για } A = B \\ 0 & \text{για } A \neq B \end{cases}$$

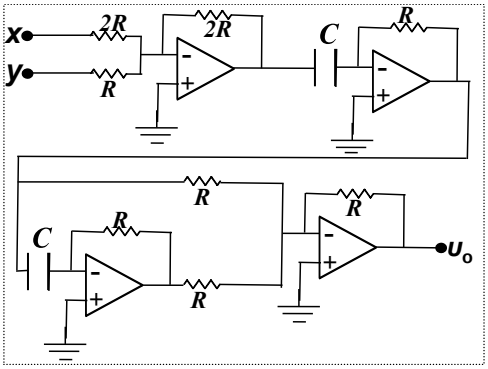
Επίσης να σχεδιάσετε ένα λογικό κύκλωμα που να δέχεται ως εισόδους τα $A_1,\ A_0,\ B_1,\ B_0$ και να υλοποιεί τη σχέση Y.

Πρόβλημα 5.39 Θεωρήστε το κύκλωμα του σχήματος το οποίο αποτελείται από τέσσερις αντιστάσεις και μια πηγή τάσης $V_o = 10$ V.
(α) Να βρείτε το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin (όπως περιγράφεται στο σχήμα Ι) του κυκλώματος αριστερά των ακροδεκτών Α και Β του αρχικού κυκλώματος όταν ο αντιστάτης $R = 6\ \Omega$. Δηλαδή να προσδιορίσετε την τάση $V_{\rm Th}$ και την αντίσταση $R_{\rm Th}$.
(β) Να βρείτε το ρεύμα που διαρρέει την αντίσταση φόρτου $R_{\rm L} = 10\ \Omega$.

Πρόβλημα 5.40 Θεωρήστε το κύκλωμα του σχήματος που περιλαμβάνει ένα τρανζίστορ τύπου npn με $\beta = 99$ το οποίο αποτελεί ένα κύκλωμα κοινής βάσης.
(α) Να υπολογίσετε το ρεύμα εκπομπού, $I_{\rm E}$.
(β) Να υπολογίσετε το ρεύμα συλλέκτη, $I_{\rm C}$.
(γ) Να υπολογίσετε το ρεύμα βάσης, $I_{\rm B}$.
(δ) Να υπολογίσετε την τάση μεταξύ του συλλέκτη και βάσης, $V_{\rm CB}$.
Να θεωρήσετε ότι ισχύει $V_{\rm BE} = 0,7$ V.



Σχήμα 5.24



Σχήμα 5.25

Πρόβλημα 5.41 Θεωρήστε το κύκλωμα των ιδανικών τελεστικών ενισχυτών όπως φαίνεται στο σχήμα.
Αν υποθέσετε ότι ισχύει η συνθήκη $RC = 1$ s, να υπολογίσετε την έξοδο, v_0 και να δείξετε ότι ισχύει

$$v_0 = \left(\frac{{\rm d}^2x}{{\rm d}t^2} - \frac{{\rm d}x}{{\rm d}t}\right) + 2\left(\frac{{\rm d}^2y}{{\rm d}t^2} - \frac{{\rm d}y}{{\rm d}t}\right)$$

Πρόβλημα 5.42 Να σχεδιάσετε ένα κύκλωμα (χρησιμοποιώντας μόνο πύλες NAND) που να δέχεται ως εισόδους τα A, B, C και να υλοποιεί τη σχέση Y στην έξοδο, όπου Y είναι

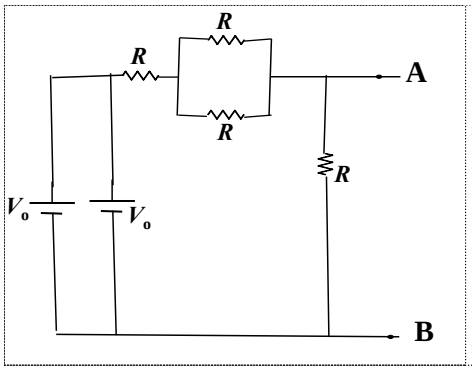
$$Y = 1 \quad \text{όταν} \quad A = 1 \ \text{ή} \ B = 1 \ \text{ή} \ C = 1$$

Να επαναλάβετε το ίδιο πρόβλημα όταν η έξοδος Y είναι

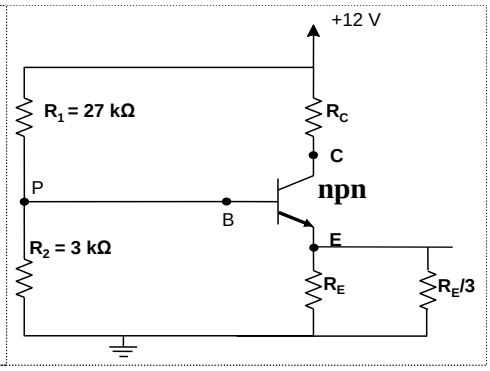
$$Y = 0 \quad \text{όταν} \quad (A = 0 \ \text{ή} \ B = 1) \ \text{και} \ C = 1$$

Πρόβλημα 5.43 Θεωρήστε το κύκλωμα του σχήματος 5.26 το οποίο αποτελείται από τέσσερις ισοδύναμες αντιστάσεις, R, και δυο ιδανικές πηγές τάσης $V_{\rm o}$.
(α) Να βρείτε την τάση $V_{\rm AB}$.
(β) Αν ενώσουμε τους δυο ακροδέκτες Α και Β με ένα σύρμα, να βρείτε την τάση $V_{\rm AB}$ και το ρεύμα $I_{\rm AB}$.
(γ) Να βρείτε το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin του κυκλώματος, δηλαδή να προσδιορίσετε την τάση $V_{\rm Th}$ και την αντίσταση $R_{\rm Th}$.

Πρόβλημα 5.44 Θεωρήστε το κύκλωμα του σχήματος 5.27 που περιλαμβάνει ένα τρανζίστορ τύπου npn με $\beta = 100$.
(α) Ποια είναι η τάση στο σημείο Ρ αν υποθέσουμε ότι η βάση, Β, του τρανζίστορ δεν ενώνεται με το σημείο Ρ.
(β) Υπάρχει κάποια απαίτηση στις τιμές των αντιστάσεων $R_{\rm C}$ και $R_{\rm E}$ ώστε η τάση $V_{\rm P}$ να μην αλλάξει όταν συνδέσουμε το σημείο Ρ με τη βάση, B, του τρανζίστορ;

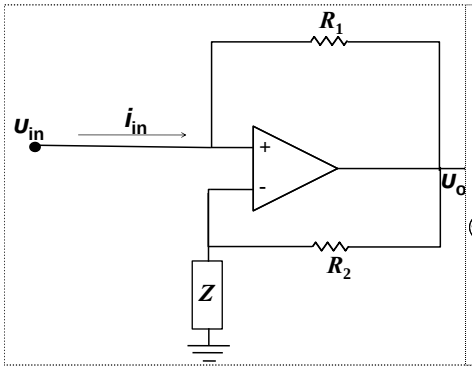


Σχήμα 5.26

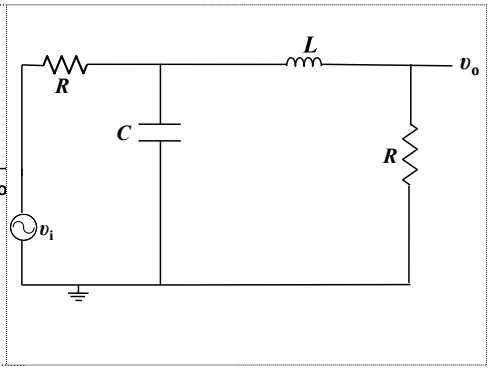


Σχήμα 5.27

Πρόβλημα 5.45 Θεωρήστε το κύκλωμα του ιδανικού τελεστικού ενισχυτή όπου η αναστρέφουσα είσοδος συνδέεται στην γη μέσω μιας σύνθετης αντίστασης Z, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.28.
(α) Να βρείτε τη συνάρτηση κέρδους ή ενίσχυση, G, του κυκλώματος.
(β) Αν $R_1 = R_2 = R$ να βρείτε την αντίσταση εισόδου, $Z_{\rm in} = v_{\rm in}/i_{\rm in}$, του κυκλώματος.



Σχήμα 5.28



Σχήμα 5.29

Πρόβλημα 5.46 (α) Ένα υψιπερατό φίλτρο αποτελείται από μια αντίσταση R και ένα πυκνωτή C. Υποθέστε ότι το φίλτρο αυτό μπορεί να εξασθενεί ένα σήμα εισόδου συχνότητας $\omega = 100$ Hz κατά ένα παράγοντα 100. Αν η αντίσταση εισόδου του κυκλώματος είναι 1 kΩ στη συχνότητα $\omega = 100$ Hz, ποιες είναι οι τιμές των R και C;
(β) Να σχεδιάσετε ένα κύκλωμα με NAND πύλες που να έχει έξοδο $F = A\bar{B} + \bar{A}B + C$.

Πρόβλημα 5.47 Θεωρήστε το κύκλωμα του σχήματος 5.29, το οποίο αποτελεί ένα φίλτρο Butterworth δεύτερης τάξης. **(α)** Να βρείτε τη συνάρτηση μεταφοράς ή κέρδους ή ενίσχυση ή απολαβή, $H(j\omega)$,

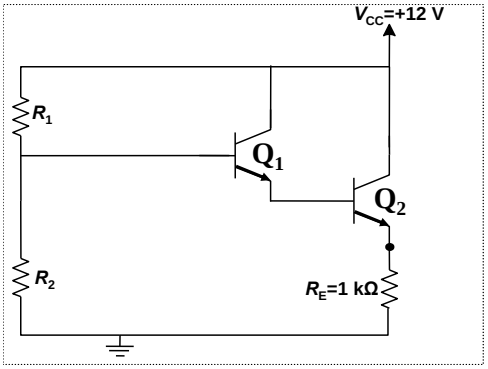
$$H(j\omega) = \frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)}$$

(β) Να βρείτε τη συνάρτηση κέρδους $H(j\omega)$ για

$$LC = \frac{2}{\omega_0^2} \quad \text{και} \quad \frac{L}{C} = R^2$$

όπου ω_0 είναι μια γνωστή ποσότητα. Το τελικό αποτέλεσμα θα πρέπει να είναι συνάρτηση μόνο της συχνότητας ω και της γνωστής ποσότητας ω_0.

Πρόβλημα 5.48 Θεωρήστε το κύκλωμα του σχήματος που περιλαμβάνει δυο τρανζίστορ, Q_1, Q_2, τύπου npn με $\beta = 50$. Μια τέτοια συνδεσμολογία ονομάζεται ¨ζεύγος τρανζίστορ Darlington¨.
(α) Να υπολογίσετε την τιμή της αντίστασης R_1 ώστε να δημιουργηθεί μια διαφορά δυναμικού $V_{CE2} = 6$ V, μεταξύ του συλλέκτη και εκπομπού του τρανζίστορ Q_2. Να θεωρήσετε ότι ο αντιστάτης $R_2 \to \infty$, δηλαδή η τιμή της αντίστασης του είναι πολύ μεγάλη.
(β) Με τη βοήθεια του αποτελέσματος (α) να βρείτε τη διαφορά δυναμικού V_{CE1}, μεταξύ του συλλέκτη και εκπομπού του τρανζίστορ Q_1.
Να θεωρήσετε ότι ισχύουν για τις διαφορές δυναμικού μεταξύ των βάσεων και εκπομπών των τρανζίστορ Q_1, Q_2, $V_{BE1} = 0,7$ V και $V_{BE2} = 0,7$ V.

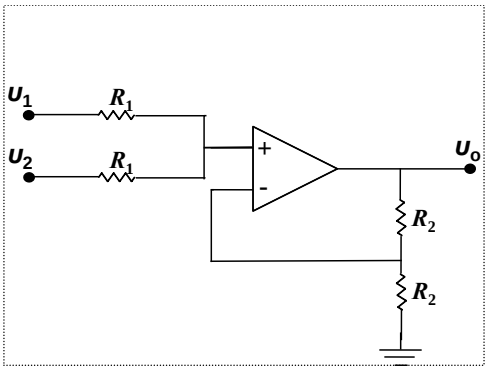


Πρόβλημα 5.49 Θεωρήστε το κύκλωμα του ιδανικού τελεστικού ενισχυτή όπως φαίνεται στο σχήμα 5.30. Να βρείτε την έξοδο v_0 ως συνάρτηση των σημάτων εισόδου v_1, v_2 και αντιστάσεων R_1, R_2.
Τι είδους κύκλωμα περιγράφει αυτό το ηλεκτρονικό κύκλωμα: ολοκληρωτή ή διαφοριστή ή αθροιστή ή ακολουθητή τάσης ή ανορθωτή;

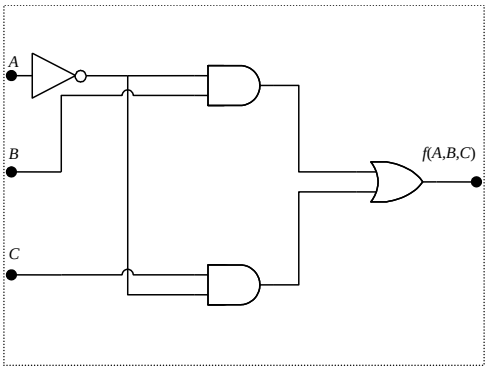
Πρόβλημα 5.50 (α) Να γράψετε μια έκφραση Boolean που περιγράφει την έξοδο, $f(A, B, C)$, του κυκλώματος του σχήματος 5.31 ως συνάρτηση των εισόδων A, B, και C.

(β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αληθείας για το λογικό διάγραμμα του σχήματος;

A	B	C	$f(A,B,C)$
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

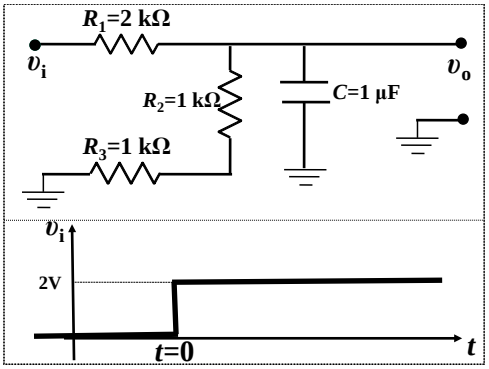


Σχήμα 5.30

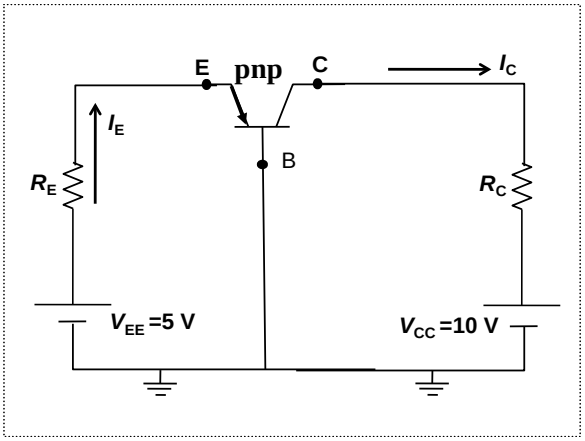


Σχήμα 5.31

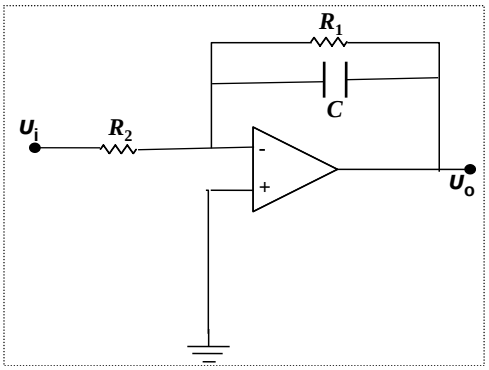
Πρόβλημα 5.51 Θεωρήστε το κύκλωμα του σχήματος, το οποίο αποτελείται από τρεις αντιστάσεις, $R_1 = 2$ kΩ, $R_2 = R_3 = 1$ kΩ και ένα πυκνωτή $C = 1$ μF. Ένας βηματικός παλμός ύψους 2 V εφαρμόζεται στην είσοδο του κυκλώματος, δηλαδή $v_\mathrm{i} = 2$ V.
Να βρείτε μια αναλυτική έκφραση του σήματος εξόδου v_o, και να το σχεδιάσετε ως συνάρτηση του χρόνου.



Πρόβλημα 5.52 Θεωρήστε το κύκλωμα του σχήματος που περιλαμβάνει ένα τρανζίστορ τύπου pnp με την παράμετρο $\alpha \approx 1$.
Αν υποθέσουμε ότι το ρεύμα εκπομπού είναι $I_\mathrm{E} = 1$ mA και η τάση μεταξύ συλλέκτη και εκπομπού είναι $V_\mathrm{CE} = -5,7$ V, τότε να προσδιορίσετε τις αντιστάσεις R_E και R_C.
Να υποθέσετε ότι $V_\mathrm{BE} = -0,7$ V.



Πρόβλημα 5.53 Στο διπλανό σχήμα, το κύκλωμα του ιδανικού τελεστικού ενισχυτή αποτελείται από δυο αντιστάσεις $R_1 \neq R_2$ και ένα πυκνώτή C. Η μη αναστρέφουσα είσοδος συνδέεται στη γη, όπως φαίνεται στο σχήμα.
(α) Να βρείτε τη συνάρτηση κέρδους ή ενίσχυσης, $G(\omega)$, του κυκλώματος ως συνάρτηση της κυκλικής συχνότητας ω και των στοιχείων του κυκλώματος $R_1,\ R_2,\ C$. Για ποια κυκλική συχνότητα ω η συνάρτηση κέρδους είναι $|G| = 1$;
(β) Τι είδους φίλτρο περιγράφει το κύκλωμα αυτό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



Πρόβλημα 5.54 (α) Θεωρήστε τον παρακάτω πίνακα αληθείας για δυο εισόδους A και B:

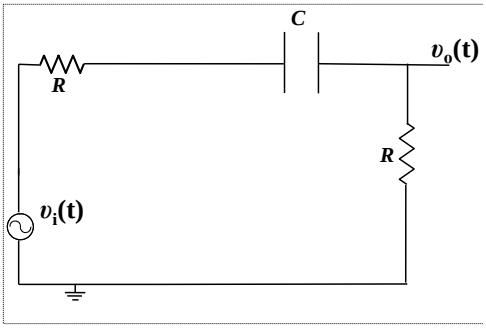
A	B	F
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Να προσδιορίσετε την έξοδο F ως συνάρτηση των $\overline{A}$ και B. Η τελική απάντησή σας θα πρέπει να περιέχει μόνο όρους $\overline{A}$ και B.
(β) Να σχεδιάσετε ένα κύκλωμα το οποίο θα υλοποιεί τον παραπάνω πίνακα αληθείας με πύλες NAND με εισόδους $A,\ B$ και έξοδο F.

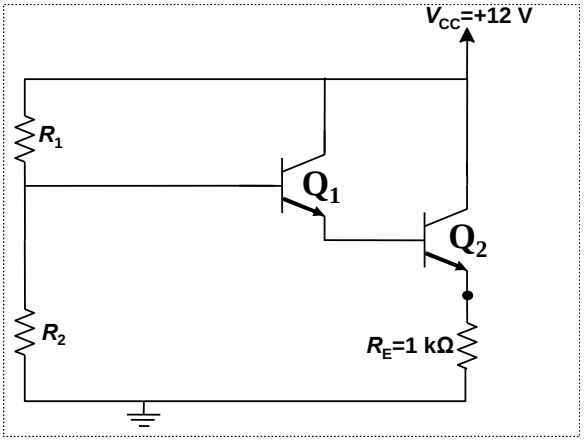
Πρόβλημα 5.55 Θεωρήστε το κύκλωμα του σχήματος το οποίο αποτελείται από δυο αντιστάτες, R, κι ένα πυκνωτή, C.
(α) Να βρείτε για ποια κυκλική συχνότητα ω_o (ως συνάρτησης των $R,\ C$) η καμπύλη της συνάρτησης

$$20\log_{10}\left(|G(\omega)|\right)\ \text{dB}$$

περνάει από το σημείο -3 dB. Να σχεδιαστεί πρόχειρα το γράφημα της $20\log_{10}\left(|G(\omega)|\right)$ ως συνάρτηση του $\log_{10}|\omega|$, όπου ω είναι η κυκλική συχνότητα και $G(\omega) = V_{\rm o}(\omega)/V_{\rm i}(\omega)$ είναι η συνάρτηση μεταφοράς (λέγεται και συνάρτηση κέρδους ή ενίσχυσης ή απολαβής του κυκλώματος).
(β) Τι είδους φίλτρου (βαθυπερατό, υψιπερατό, ζωνοφρακτικό, ζωνοπερατό, κλπ.) είναι αυτό το σύστημα;



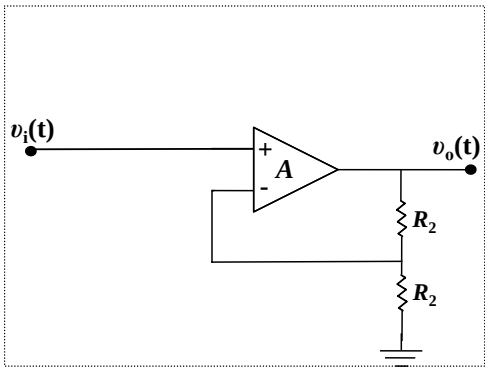
Πρόβλημα 5.56 Θεωρήστε το κύκλωμα του σχήματος που περιλαμβάνει δυο τρανζίστορ, $\mathrm{Q}_1,\ \mathrm{Q}_2$, τύπου npn με $\beta = 50$. Μια τέτοια συνδεσμολογία ονομάζεται «ζεύγος τρανζίστορ Darlington».
(α) Να υπολογίσετε την τιμή της αντίστασης R_1 ώστε να δημιουργηθεί μια διαφορά δυναμικού $V_{\rm CE2} = 6$ V, μεταξύ του συλλέκτη και εκπομπού του τρανζίστορ Q_2. Να θεωρήσετε ότι ο αντιστάτης $R_2 \to \infty$, δηλαδή η τιμή της αντίστασης του είναι πολύ μεγάλη.
(β) Με τη βοήθεια του αποτελέσματος (α) να βρείτε τη διαφορά δυναμικού $V_{\rm CE1}$, μεταξύ του συλλέκτη και εκπομπού του τρανζίστορ Q_1.
Να θεωρήσετε ότι ισχύουν για τις διαφορές δυναμικού μεταξύ των βάσεων και εκπομπών των τρανζίστορ $\mathrm{Q}_1,\ \mathrm{Q}_2$, $V_{\rm BE1} = V_{\rm BE2} = 0,7$ V.



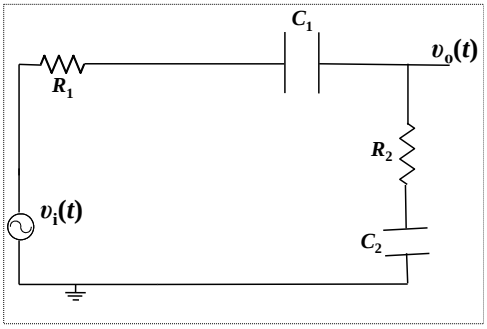
Πρόβλημα 5.57 Θεωρήστε το κύκλωμα το οποίο περιλαμβάνει τον τελεστικό ενισχυτή με ενίσχυση A, όπως φαίνεται στο σχήμα.
(α) Να βρείτε την ενίσχυση, G, αυτού του κυκλώματος και ειδικότερα να δείξετε ότι

$$G = \frac{A}{1 + AR_1/(R_1 + R_2)}$$

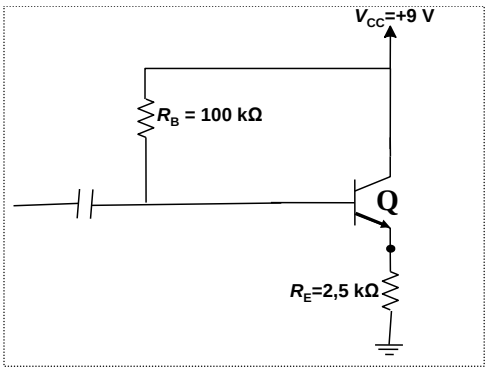
(β) Πόσο είναι το G αν ο τελεστικός ενισχυτής είναι ιδανικός με άπειρη ενίσχυση;



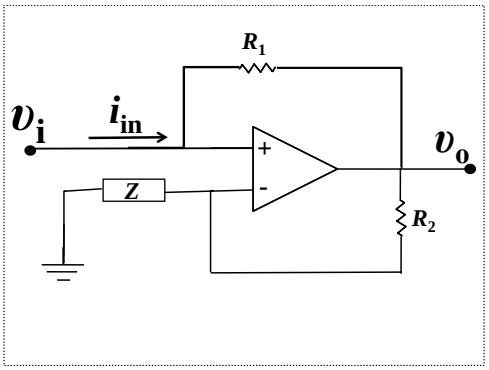
Πρόβλημα 5.58 Θεωρήστε το κύκλωμα-φίλτρο RC του σχήματος το οποίο αποτελείται από δυο αντιστάτες, $R_1,\ R_2$, και δυο πυκνωτές, $C_1,\ C_2$ όπου τα στοιχεία ικανοποιούν τη σχέση $R_1C_1 = R_2C_2$.
(α) Ποιο είναι το κέρδος/ενίσχυση $G = v_0/v_{\rm i}$ του κυκλώματος στο όριο των μικρών συχνοτήτων $\omega \to 0$.
(β) Ποιο είναι το κέρδος/ενίσχυση $G = v_0/v_{\rm i}$ του κυκλώματος στο όριο των μεγάλων συχνοτήτων $\omega \to \infty$.
(γ) Ποιο είναι το κέρδος/ενίσχυση $G = v_0/v_{\rm i}$ του κυκλώματος για $\omega = 1/R_1C_1 = 1/R_2C_2$.
(δ) Ποιο είναι το κέρδος $G = v_0/v_{\rm i}$ του κυκλώματος αν $R_1 = R_2$.



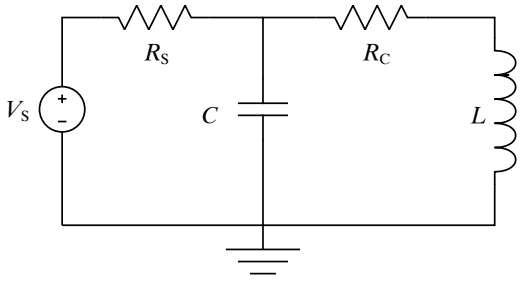
Πρόβλημα 5.59 Θεωρήστε το κύκλωμα του σχήματος που περιλαμβάνει ένα τρανζίστορ, Q, τύπου npn με $\beta = 50$ και $V_{\mathrm{BE}} = 0,7V$.
Να υπολογίσετε το ρεύμα εκπομπού I_{E}, το ρεύμα βάσης I_{B}, το ρεύμα συλλέκτη I_{C}, το δυναμικό του εκπομπού V_{E}, και τη διαφορά δυναμικού V_{CE}, μεταξύ του συλλέκτη και εκπομπού του τρανζίστορ Q.



Πρόβλημα 5.60 Θεωρήστε το κύκλωμα το οποίο περιλαμβάνει έναν ιδανικό τελεστικό ενισχυτή, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η αναστρέφουσα είσοδος του τελεστικού ενισχυτή είναι συνδεδεμένη με τη γείωση μέσω μιας σύνθετης αντίστασης Z.
(α) Να βρείτε την ενίσχυση, $G = v_{\mathrm{o}}/v_{\mathrm{i}}$, του κυκλώματος.
(β) Αν $R_1 = R_2$, να βρείτε την αντίσταση εισόδου του κυκλώματος, $Z_{\mathrm{in}} = v_{\mathrm{i}}/i_{\mathrm{in}}$, όπου i_{in} είναι το ρεύμα εισόδου του κυκλώματος όπως φαίνεται στο σχήμα.



Πρόβλημα 5.61 Η αντίσταση R_C, που είναι σε σειρά με την αυτεπαγωγή L, αντιπροσωπεύει τις εσωτερικές απώλειες ενός μη ιδανικού πηνίου στο κύκλωμα που φαίνεται στο σχήμα. Να βρείτε το ρεύμα που παρέχει η πηγή αν: $v_s(t) = 20\cos(\omega t)$, $\omega = 6$ Mrad/s, $R_S = 50\ \Omega$, $R_C = 40\ \Omega$, $L = 20$ μH και $C = 1,25$ nF.



Βιβλιογραφία

[1] "The Art of Electronics", P. Horowitz, W. Hill, Cambridge Univ. Press 1989.

[2] "Electronics", Allan R. Hambley, Prentice Hall 2000.

[3] "Μικροηλεκτρονικά κυκλώματα", Τομός A & B, Adel S. Sedra, Kenneth C. Smith, Επιμέλεια Ελληνικής Έκδοσης Γ. Ε. Παπαπάνος, Εκδόσεις Παπασωτηρίου 1994.

[4] "μαθήματα ηλεκτρονικής", Κ. Καρούμπαλος, Γ. Φιλοκύπρου, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Αθηνών, Αθήνα 1979.

[5] "Μαθήματα Ηλεκτρονικών Κυκλωμάτων", Κ.Α. Καρύμπακα, Θεσσαλονίκη 1980.

[6] "Μετασχηματισμός Laplace και Εφαρμογαί αυτού", Α.Β. Μαχιάς, Αθηνα 1974.