



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ  
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ // ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΓΡΑΠΤΗ, ΕΠΙ ΠΤΥΧΙΩ, ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ  
«ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ»

ΑΘΗΝΑ 12/03/2013, ΩΡΑ: 18.00

**Θέμα 1ο:**

α) Να προσδιοριστεί ο τύπος της εξίσωσης

$$u_{xx} + 4y^2 u_{yy} + u_{yy} + 5 \cos xy + 8 = 0. \quad (\muον.0,5)$$

β) Να προσδιοριστεί η τιμή της σταθεράς ώστε το πρόβλημα να είναι επιλύσιμο

$$\Delta u(\rho, \varphi) = 5\rho^2 \sin 2\varphi, \quad 2 < \rho < 4, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

$$\frac{\partial u(2, \varphi)}{\partial \rho} = 8, \quad \frac{\partial u(4, \varphi)}{\partial \rho} = C. \quad (\muον.0,75)$$

**Θέμα 2ο:**

α) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$\Delta u(x, y, t) = u_{tt}, \quad (x, y) \in (0, 2) \times (0, 8), \quad t > 0$$

$$u(0, y, t) = u(2, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, 8, t) = 0$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = 3 \sin \pi x \sin \frac{3\pi y}{8}. \quad (\muον.1,75)$$

β) Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών για τη σφαίρα

$$\Delta u(r, \theta, \varphi) = 0, \quad 0 \leq r < 1, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \quad (\muον.2)$$

$$u(1, \theta, \varphi) = \cos \theta$$

Δίνονται η εξίσωση Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\Delta u(r, \theta, \varphi) = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi} = 0$$

και τα πολυώνυμα Legendre

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1).$$

**Θέμα 3<sup>ο</sup> : (2 μον.)**

(α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad 0 < x < L, \quad y'(0) = y'(L) = 0.$$

(β) Είναι η εξίσωση σε μορφή Sturm-Liouville; Γίοια είναι η συνάρτηση Βάρους; Να δώσετε τη σχέση ορθογωνιότητας που προκύπτει από αυτό το πρόβλημα.

(γ) Στη συνέχεια να λυθεί το ημιομογενές πρόβλημα,

$y''(x) + \Lambda y(x) = f(x) = 1, \quad 0 < x < L, \quad y'(0) = y'(L) = 0, \quad \Lambda, \quad L \in \mathbb{Q},$  δε διακρίνεται περιπτώσεις παντήσεων ή μέθοδος Fredholm).

---

#### Θέμα 4<sup>ο</sup> : (1,7 μον.)

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση

θερμότητας: 
$$\begin{cases} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - 6x, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 2, & t > 0, \\ u(x,0) = x^3 + x + 2, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Δώστε μία φυσική ερμηνεία αυτού του προβλήματος, αν  $u = u(x,t)$  παριστάνει (αδιάστατη) θερμοκρασία.

---

#### Θέμα 5<sup>ο</sup> : (1,3 μον.)

Με χρήση του μετασχηματισμού Fourier (MF), να λυθεί το πρόβλημα:

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0, \quad -\infty < y < \infty, \quad x > 0,$$

$$u(0,y) = f(y), \quad -\infty < y < \infty,$$

$$u, u_y \rightarrow 0, \quad |y| \rightarrow \infty, \quad x > 0, \quad (\text{συνθήκες ύπαρξης του MF}),$$

η φραγμένη όταν  $x \rightarrow \infty$ , ( $\Rightarrow$  και η υφαγμενη, γιατί;).

(Υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μετασχηματισμοί Fourier). Είναι η λύση

$$u(x,y) = \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{x^2 + (y - \xi)^2} d\xi, \quad (\text{τύπος Poisson για το ημιεπίπεδο});$$

Δίνονται:

$$1. \quad F\{u(x,y)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,y) e^{is y} dy = \hat{u}(x,s),$$

$$2. \quad F^{-1}\{\hat{u}(x,s)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(x,s) e^{-is y} ds = u(x,y),$$

$$3. \quad F\{u_{yy}(x,y)\} = (-is)^2 \hat{u}(x,s),$$

$$4. \quad F^{-1}\{e^{-x|s|}\} = F^{-1}\{\hat{g}(x,s) = \hat{g}(s)\} = g(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x}{y^2 + x^2}, \quad (\text{γιατί } |s|;),$$

$$5. \quad F^{-1}\{\hat{f}(s)\hat{g}(s)\} = (f \otimes g)(y) = (g \otimes f)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x, y - \xi) d\xi.$$

---