

ΣΕΜΦΕ / ΦΥΛΛΑΔΙΟ 5/ΤΜΗΜΑ Β
ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ, ΔΙΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΚΑΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ
ΜΟΡΦΕΣ

1. Δίνεται η τετραγωνική μορφή επί του \mathbb{R}^2 με τύπο
$$Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2.$$

Να αποδείξετε ότι :

- (i) Η $Q(x, y)$ είναι θετικά-ορισμένη $\Leftrightarrow a > 0$ και $4ac - b^2 > 0$
(ii) Η $Q(x, y)$ είναι αρνητικά-ορισμένη $\Leftrightarrow a < 0$ και $4ac - b^2 > 0$

2. Η τετραγωνική μορφή $Q: V \rightarrow \mathbb{R}$ είναι αντίστοιχη της διγραμμικής μορφής $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\bar{x}, \bar{y} \in V$ ισχύει η ισότητα :

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{4}[Q(\bar{x} + \bar{y}) - Q(\bar{x} - \bar{y})].$$

3. Αν V είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος, το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία $\bar{x}, \bar{y} \in V$ είναι το σύνολο

$$[\bar{x}, \bar{y}] = \{t\bar{x} + (1-t)\bar{y} : 0 \leq t \leq 1\}.$$

Επιπλέον, ένα υποσύνολο S του V λέγεται **κυρτό**, αν για κάθε $\bar{x}, \bar{y} \in S$ ισχύει ότι $[\bar{x}, \bar{y}] \subseteq S$. Θεωρούμε τη γραμμική μορφή $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ και ορίζουμε τα υποσύνολα του V :

$$W^+ = \{\bar{x} \in V : f(\bar{x}) > 0\}, W^- = \{\bar{x} \in V : f(\bar{x}) < 0\}, W = \{\bar{x} \in V : f(\bar{x}) = 0\}$$

Να αποδείξετε ότι τα σύνολα W^+, W^-, W είναι κυρτά.

4. Θεωρούμε την απεικόνιση $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $M_n(\mathbb{R})$ είναι το σύνολο των $n \times n$ πραγματικών πινάκων, η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$(i) f(\lambda A + \mu B) = \lambda f(A) + \mu f(B)$$

$$(ii) f(AB) = f(BA),$$

για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

Να αποδείξετε ότι : $f(A) = c \operatorname{tr} A$, όπου $c \in \mathbb{R}$.

Αν επιπλέον ισχύει ότι $f(I_n) = n$, τότε $f(A) = \operatorname{tr} A$.

5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^2 + ay^2 + 2xy + 2x - 2y - 5 = 0, a \in \mathbb{R},$$

παριστάνει :

(i) παραβολή, για $a = 1$,

(ii) έλλειψη, για $a > 1$ και

(iii) υπερβολή, για $a < 1, a \neq \frac{1}{3}$.

6. Να βρεθεί η εξίσωση ως προς τους κύριους άξονες και το είδος της επιφάνειας με εξίσωση:

$$x^2 - 6yz = 1.$$

7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x^2 + y^2 + az^2 + 2xy + 2yz + 2zx + 2x - 2y - 2z + 1 = 0, a \in \mathbb{R},$$

παριστάνει:

- (i) παραβολικό κύλινδρο, αν $a = 1$,
- (ii) ελλειπτικό παραβολοειδές, αν $a > 1$, και
- (iii) υπερβολικό παραβολοειδές, αν $a < 1$.

Για $a = 1$ να βρεθεί η εξίσωση του παραβολικού κυλίνδρου ως προς τους κύριους άξονές του.

8. Δίνεται η τετραγωνική μορφή $Q: V \rightarrow \mathbb{R}$, $\dim V = n$, με τύπο $Q(X) = X^T A X$.
Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A , να αποδείξετε ότι υπάρχει $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n] \in V$ τέτοιο ώστε

$$Q(Y) = \lambda(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2).$$

9. Δίνεται ο αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας A .

Να αποδείξετε ότι :

- (i) Ο πίνακας AA^T είναι συμμετρικός και θετικά -ορισμένος.
- (ii) Υπάρχει συμμετρικός και θετικά-ορισμένος πίνακας P τέτοιος ώστε

$$AA^T = P^2 \quad (P := \text{τετραγωνική ρίζα του } AA^T).$$

- (iii) Ο πίνακας $U = P^{-1}A$ είναι ορθογώνιος.

- (iv) Ο πίνακας A μπορεί να γραφεί ως

$$A = PU \quad (\text{πολική ανάλυση του } A),$$

όπου P θετικά-ορισμένος συμμετρικός πίνακας και U ορθογώνιος πίνακας.

$$1. Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 = X^T A X, \text{ με } X^T = [x \ y] \text{ και } A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}.$$

Η Q είναι θετικά-ορισμένη $\Leftrightarrow \lambda_1 = a > 0$ και $\lambda_2 = \det A > 0$

$$\Leftrightarrow a > 0 \text{ και } ac - b^2/4 > 0 \Leftrightarrow a > 0 \text{ και } 4ac - b^2 > 0.$$

Η Q είναι αρνητικά-ορισμένη $\Leftrightarrow \lambda_1 = a < 0$ και $\lambda_2 = \det A > 0 \Leftrightarrow a < 0$ και $4ac - b^2 > 0$.

$$2. Q(\bar{x} + \bar{y}) = f(\bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y}) = f(\bar{x}, \bar{x}) + 2f(\bar{x}, \bar{y}) + f(\bar{y}, \bar{y}) \quad (1)$$

$$Q(\bar{x} - \bar{y}) = f(\bar{x} - \bar{y}, \bar{x} - \bar{y}) = f(\bar{x}, \bar{x}) - 2f(\bar{x}, \bar{y}) + f(\bar{y}, \bar{y}) \quad (2)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει: $Q(\bar{x} + \bar{y}) - Q(\bar{x} - \bar{y}) = 4f(\bar{x}, \bar{y})$.

3. Αν $\bar{x}, \bar{y} \in W^+$, τότε $f(\bar{x}) > 0$ και $f(\bar{y}) > 0$. Αν $t\bar{x} + (1-t)\bar{y} \in [\bar{x}, \bar{y}]$, $t \in [0, 1]$, τότε $f(t\bar{x} + (1-t)\bar{y}) = tf(\bar{x}) + (1-t)f(\bar{y}) > 0$, οπότε $t\bar{x} + (1-t)\bar{y} \in W^+$. Άρα $[\bar{x}, \bar{y}] \subseteq W^+$, οπότε το W^+ είναι ωραίο σύνολο.

Όμοιας αποδεικνύεται και ότι τα σύνολα W^- και W^0 είναι ωραία.

4. Θεωρούμε τη βάση $\{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$ του διαμ. χώρου $M_n(\mathbb{R})$ για την οποία ισχύουν

$$E_{ij} E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}, \quad E_{ji} E_{ij} - E_{ij} E_{ji} = \delta_{ii} E_{jj} - \delta_{jj} E_{ii} = E_{jj} - E_{ii},$$

οπότε έχουμε:

$$f(E_{ji} E_{ij} - E_{ij} E_{ji}) = f(E_{jj} - E_{ii}) \Leftrightarrow f(E_{ji} E_{ij}) - f(E_{ij} E_{ji}) = f(E_{jj}) - f(E_{ii})$$

$$\stackrel{(\ast)}{\Leftrightarrow} 0 = f(E_{jj}) - f(E_{ii}) \Leftrightarrow f(E_{ii}) = f(E_{jj}) \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Επιπλέον για $i \neq j$ έχουμε:

$$e_j e_i - e_i e_j = e_j \Rightarrow f(e_j) = f(e_j e_j - e_i e_j) = f(e_j e_j) - f(e_i e_j) \stackrel{(\ast)}{=} 0.$$

Επομένως, αν $A = \sum_{ij=1}^n a_{ij} E_{ij} \in M_n(\mathbb{R})$, τότε $f(A) = \sum_{ij=1}^n a_{ij} f(E_{ij}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} f(E_{ii})$

και αν $f(E_{ii}) = c$, $i = 1, 2, \dots, n$, τότε:

$$f(A) = c \sum_{i=1}^n a_{ii} = c \operatorname{tr} A.$$

Για $f(I_n) = n$, τότε $c \operatorname{tr} I_n = n \Leftrightarrow cn = n \Leftrightarrow c = 1$, οπότε $f(A) = \operatorname{tr} A$.

5. Η εφ' όσον πρόκειται $X^T A X + 2BX + \gamma = 0$, με $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$, $B = [1 \ -1]$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\gamma = -5$.

Θεωρούμε το σύστημα $AH = -B^T \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και διασπινύμε ως περίπτωσης:

- Για $\alpha=1$, τότε $\rho(A)=1 \neq \rho(A, -B^T)=2$, οπότε η υπερβολή δεν έχει κέντρο συμμετρίας και είναι παραβολή.
- Για $\alpha \neq 1$ έχουμε $\rho(A)=2 \neq \rho(A, -B^T)$, οπότε η υπερβολή έχει μοναδικό κέντρο συμμετρίας $(\xi, \eta) = \left(\frac{-\alpha-1}{\alpha-1}, \frac{2}{\alpha-1} \right)$ και με την παράλληλη μετατόπιση $X = \tilde{X} + \tilde{H}$ γίνεται: $\tilde{X}^T A \tilde{X} + \tilde{c}_0 = 0$, όπου $\tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}$ και $\tilde{c}_0 = BH + \gamma = \frac{6(\alpha-1/3)}{\alpha-1}$.
 Ο πίνακας A έχει ιδιοτιμές λ_1, λ_2 με $\lambda_1 + \lambda_2 = \alpha+1$ και $\lambda_1 \lambda_2 = \alpha-1$, αφού $\chi_A(t) = t^2 - (\alpha+1)t + \alpha-1$. Αν P είναι ορθογώνιος πίνακας ($\det P = 1$) που διαγωνοποιεί τον συμμετρικό πίνακα A , τότε με $\tilde{X} = P \hat{X}$ λαμβάνουμε $\hat{X}^T (P^T A P) \hat{X} + \tilde{c}_0 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \hat{x}^2 + \lambda_2 \hat{y}^2 - 6 \left(\frac{\alpha-1/3}{\alpha-1} \right) = 0$, οπότε:
 - (i) για $\alpha > 1$, η υπερβολή είναι ελλειψική [$\lambda_1, \lambda_2 > 0$ και $\tilde{c}_0 < 0$]
 - (ii) για $\alpha < 1$, $\alpha \neq 1/3$, η υπερβολή είναι υπερβολή [$\lambda_1 \lambda_2 < 0$ και $\tilde{c}_0 \neq 0$].
 - (iii) για $\alpha = 1/3$ είναι $\tilde{c}_0 = 0$, $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, οπότε έχουμε ζεύγος ασυμμετρικών ευθειών.

7. Έχουμε $X^T A X + 2B X + \gamma = 0$, με $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$, $B = [1 \ -1 \ -1]$, $\gamma = 1$.
 Θεωρούμε το σύστημα $AH = -B^T$, όπου $H = \begin{bmatrix} h \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$ και διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\alpha=1$, τότε $\rho(A)=1 \neq \rho(A, -B^T)$, οπότε η επιφάνεια δεν έχει κέντρο συμμετρίας και είναι παραβολικός κύλινδρος.
- Αν $\alpha \neq 1$, τότε $\rho(A)=2 \neq \rho(A, -B^T)=3$, οπότε η επιφάνεια δεν έχει κέντρο συμμετρίας. Αν $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ και $\lambda_3 = 0$ είναι οι ιδιοτιμές του A , τότε $\lambda_1 + \lambda_2 = 2(\alpha-1)$, αφού $\chi_A(t) = |tI - A| = -\frac{1}{2} [t^2 + \alpha t + 2(\alpha-1)]$, οπότε:
 - (i) για $\alpha > 1$, είναι $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ και έχουμε ελλειψικό παραβολοειδές.
 - (ii) για $\alpha < 1$, είναι $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ και έχουμε υπερβολικό παραβολοειδές.

Για $\alpha=1$, ο A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1=3, \lambda_2=\lambda_3=0$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $x_1 = (1, 1, 1)$, $x_2 = (1, 0, -1)$, $x_3 = (0, 1, -1)$ από τα οποία με ορθοκανονικοποίηση έχουμε την ορθοκανονική βάση: $\hat{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, $\hat{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$, $\hat{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1)$.
 Ο πίνακας $P = [\hat{x}_1 \ \hat{x}_2 \ \hat{x}_3]$ διαγωνοποιεί τον A και με τον ορθογώνιο μετασχηματισμό $X = P \tilde{X}$ λαμβάνουμε: $3\tilde{x}^2 + 2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 3\left(\tilde{x} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}\left(\tilde{y} + \frac{2\sqrt{2}}{9}\right) - \frac{4}{\sqrt{2}}\tilde{z} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\hat{x}^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}\hat{y} - \frac{4}{\sqrt{2}}\hat{z} = 0 \quad (\text{Μετασχηματισμός: } \hat{x} = \tilde{x} - \frac{1}{3\sqrt{3}}, \hat{y} = \tilde{y} + \frac{2\sqrt{2}}{9}, \hat{z} = \tilde{z})$$

$$\Leftrightarrow 3\hat{x}^2 + 4\left(\frac{\hat{y} - \hat{z}}{\sqrt{2}}\right) = 0, \quad (\text{αν } X = \hat{x}, Y = \frac{\hat{y} - \hat{z}}{\sqrt{2}}, Z = \frac{\hat{y} + \hat{z}}{\sqrt{2}})$$

$$\Leftrightarrow Y = -\frac{3}{4}X^2.$$

$$6. x^2 - 6yz = 1 \Leftrightarrow X^T A X - 1 = 0, \text{ όπου } X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ και } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ και $\lambda_3 = -3$, οπότε με κατάλληλη μετασχηματισμό του ορθογώνιου πίνακα P που διαγωνοποιεί τον A και τον ορθογώνιο μετασχηματισμό $X = P\tilde{X}$ λαμβάνουμε: $\tilde{x}^2 + 3\tilde{y}^2 - 3\tilde{z}^2 - 1 = 0$, που είναι έλλειψη μονόχωνου υπερβολοειδούς.

8. Αφού η ιδιοτιμή του A , θα υπάρχει $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \neq 0$ έτσι ώστε $AY = \lambda Y$, οπότε $Y^T A Y = \lambda Y^T Y$ ή $Q(Y) = \lambda (y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)$.

9. (i) $(AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T$, δηλαδή ο AA^T είναι συμμετρικός.

$X^T AA^T X = (A^T X)^T A^T X = Y^T Y = y_1^2 + \dots + y_n^2 > 0$, για κάθε $Y = A^T X \neq 0 \Leftrightarrow X \neq 0$, αφού A^T αντιστρέφεται.

(ii) Ο πίνακας AA^T ως θετικά-ορισμένος έχει θετικές ιδιοτιμές, ενώ ως συμμετρικός διαγωνοποιείται μέσω ενός ορθογώνιου πίνακα S ,

δηλαδή ισχύει $S^T AA^T S = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, όπου $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$

$\Rightarrow AA^T = SDS^T \Rightarrow AA^T = SD_1^2 S^T$, όπου $D_1 = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$

$\Rightarrow AA^T = SD_1 S D_1 S^T = P^2$, όπου $P = SD_1 S^T$.

(iii) Κατ' αρχήν ο P είναι συμμετρικός, αφού $P^T = (SD_1 S^T)^T = SD_1 S^T = P$.

Επιπλέον, $UU^T = P^{-1} A (P^{-1} A)^T = P^{-1} AA^T (P^{-1})^T = P^{-1} P^2 (P^T)^{-1} = P(P^T)^{-1}$

$= P^T (P^T)^{-1} = I \Rightarrow U$ ορθογώνιος.

(iv) Από $U = P^{-1} A \Rightarrow A = PU$, όπου P συμμετρικός και θετικά ορισμένος και U ορθογώνιος πίνακας.