

ΧΩΡΟΙ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

1. Να αποδείξετε ότι η σχέση  $\langle A, B \rangle := \text{tr} AB^T$  ορίζει στο διανυσματικό χώρο  $M_n(\mathbb{R})$  των  $n \times n$  πραγματικών πινάκων ένα πραγματικό εσωτερικό γινόμενο.

Να αποδείξετε ότι η σχέση  $\langle A, B \rangle := \text{tr} A\bar{B}^T$  ορίζει στο διανυσματικό χώρο  $M_n(\mathbb{C})$  των  $n \times n$  μιγαδικών πινάκων ένα μιγαδικό εσωτερικό γινόμενο.

Να αποδείξετε ότι η βάση  $\{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$  του διανυσματικού χώρου  $M_n(K)$ ,  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  είναι ορθοκανονική ως προς το αντίστοιχο της από τα παραπάνω εσωτερικά γινόμενα.

2. Στο διανυσματικό χώρο  $C[a, b]$  των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού  $[a, b]$ , να αποδείξετε ότι η σχέση

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx$$

ορίζει ένα πραγματικό εσωτερικό γινόμενο.

3. Στο χώρο των πραγματικών πολυωνύμων  $P_3$  βαθμού το πολύ 3 με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle P(x), Q(x) \rangle := \int_1^2 P(x)Q(x)dx$$

να προσδιορίσετε με τη μέθοδο Gram-Schmidt μία ορθοκανονική βάση.

4. Σε κάθε χώρο εσωτερικού γινομένου  $V$  να αποδείξετε ότι:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \text{ για κάθε } x, y \in V$$

5. Σε κάθε Ευκλείδειο χώρο να αποδείξετε τις ισοδυναμίες :

$$(a) \|x\| = \|y\| \Leftrightarrow \langle x + y, x - y \rangle = 0,$$

$$(b) \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0.$$

Να εξετάσετε αν αληθεύουν οι παραπάνω ισοδυναμίες στη περίπτωση που ο  $V$  είναι Ορθομοναδιαίος.

6. Στον Ευκλείδειο χώρο  $\mathbb{R}^3$  με το κανονικό εσωτερικό γινόμενο

(i) Να βρεθεί η ορθογώνια προβολή του  $u = (1, -1, 2)$  πάνω στον υπόχωρο  $U$  που παράγεται από το  $v = (0, 1, 1)$ .

(ii) Να βρεθεί μία βάση του  $W^\perp$ , αν είναι

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0, y - z = 0\}$$

7. Στον Ορθομοναδιαίο χώρο  $\mathbb{C}^3$  με εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται από τον πίνακα

$$G = \begin{bmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 2 & -i \\ 0 & i & 2 \end{bmatrix},$$

ως προς τη κανονική βάση του  $\mathbb{C}^3$ , να βρεθεί μία βάση του ορθογώνιου συμπληρώματος του υποχώρου  $U$  που παράγεται από το  $u = (-i, 0, 1)$ .

8. Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων

$$C[-\pi, \pi] = \{f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ συνεχής}\}$$

με το εσωτερικό γινόμενο  $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$

Έστω  $U$  ο υπόχωρος του  $C[-\pi, \pi]$  που αποτελείται από τα πολυώνυμα με πραγματικούς συντελεστές βαθμού το πολύ 5, δηλαδή  $U = P_5(\mathbb{R})$ .

Αν  $v(x) = \sin x \in C[-\pi, \pi]$ , να προσδιορίσετε ένα στοιχείο  $u(x) \in U$  έτσι ώστε:

$\|v(x) - u(x)\|$  να γίνεται ελάχιστη.

**Υπόδειξη:** Θεωρείστε τη βάση  $\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$  του  $U$  και με τη μέθοδο Gram-Schmidt κατασκευάστε μία ορθοκανονική βάση του  $\{e_1, e_2, \dots, e_6\}$  του  $U$ .

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

να υπολογίσετε την  $P_U(v)$  από τον τύπο

$$P_U(v) = \sum_{i=1}^6 \langle v(x), e_i \rangle e_i.$$

Με κατάλληλη προσέγγιση του  $\pi$  θα βρείτε τη συνάρτηση

$$P_U(v) = 0.987862x - 0.155271x^3 + 0.00564312x^5.$$

Για να δείτε πόσο καλή είναι η προσέγγιση που έχετε βρει να τη συγκρίνετε με την προσέγγιση που δίνει το θεώρημα Taylor

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

1. Η κλεισίση  $\langle, \rangle : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(A, B) \rightarrow \langle A, B \rangle := \text{tr } AB^T$  ικανοποιεί τις ιδιότητες:

- $\langle \lambda A + \mu B, C \rangle = \text{tr}(\lambda A + \mu B)C^T = \text{tr}(\lambda AC^T + \mu BC^T) = \lambda \text{tr } AC^T + \mu \text{tr } BC^T = \lambda \langle A, C \rangle + \mu \langle B, C \rangle$   
 για κάθε  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$  [γραμμική ως προς τον πρώτο βροχολύτη].
- $\langle A, B \rangle = \text{tr } AB^T = \text{tr} (AB^T)^T = \text{tr } BA^T = \langle B, A \rangle$ , για κάθε  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$
- $\langle A, A \rangle = \text{tr } AA^T = \sum_{k=1}^n (AA^T)_{kk} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \alpha_{ki} \alpha_{li} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \alpha_{ki}^2 \geq 0$  και  $\langle A, A \rangle = 0 \Leftrightarrow \alpha_{ki}^2 = 0$ , για κάθε  $i, k = 1, 2, \dots, n \Leftrightarrow \alpha_{ik} = 0$ , για κάθε  $i, k = 1, 2, \dots, n \Leftrightarrow A = 0$ .

Ομοίως η κλεισίση  $\langle, \rangle : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $(A, B) \rightarrow \langle A, B \rangle := \text{tr } A\bar{B}^T$  ικανοποιεί τα εξής:

- $\langle \lambda A + \mu B, C \rangle = \text{tr}(\lambda A + \mu B)\bar{C}^T = \text{tr}[\lambda A\bar{C}^T + \mu B\bar{C}^T] = \lambda \text{tr } A\bar{C}^T + \mu \text{tr } B\bar{C}^T = \lambda \langle A, C \rangle + \mu \langle B, C \rangle \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$   
 και για κάθε  $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$ .
- $\langle A, B \rangle = \text{tr } A\bar{B}^T = \text{tr} (A\bar{B}^T)^T = \text{tr } \bar{B}A^T = \text{tr} (\bar{B}A^T) = \overline{\text{tr } BA^T} = \overline{\langle B, A \rangle}$
- $\langle A, A \rangle = \text{tr } A\bar{A}^T = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \alpha_{ki} \bar{\alpha}_{li} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n |\alpha_{ki}|^2 > 0$ , για κάθε  $A \in M_n(\mathbb{C})$   
 και  $\langle A, A \rangle = 0 \Leftrightarrow |\alpha_{ki}|^2 = 0 \forall i, k = 1, 2, \dots, n \Leftrightarrow \alpha_{ki} = 0 \forall i, k = 1, 2, \dots, n \Leftrightarrow A = 0$ .

Επειδή ισχύει ότι:

$$\langle E_{ij}, E_{kl} \rangle = \text{tr } E_{ij}(E_{kl})^T = \text{tr } E_{ij}E_{lk} = \begin{cases} \text{tr } E_{ik}, & \text{για } j=l \\ 0, & \text{για } j \neq l \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{για } j=l, i=k \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

η βάση  $\{E_{ij}, i, j = 1, 2, \dots, n\}$  είναι ορθοκανονική.

2. (i)  $\langle \lambda f_1 + \mu f_2, g \rangle = \int_a^b (\lambda f_1(x) + \mu f_2(x))g(x)dx = \lambda \int_a^b f_1(x)g(x)dx + \mu \int_a^b f_2(x)g(x)dx = \lambda \langle f_1, g \rangle + \mu \langle f_2, g \rangle$ ,  
 για κάθε  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $f_1, f_2, g \in C[a, b]$ .

(ii)  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)f(x)dx = \langle g, f \rangle$ , για κάθε  $f, g \in C[a, b]$ .

(iii)  $\langle f, f \rangle = \int_a^b f(x)^2 dx \geq 0$  και αν  $\langle f, f \rangle = 0$ , τότε  $f = 0$ .

Πράγματι, αν υπήρχε  $\xi \in [a, b]$  με  $f(\xi) \neq 0$ , τότε λόγω της συνέχειας της  $f$ , θα ισχύει  $f(x) \neq 0$ , για κάθε  $x \in (\xi - \epsilon, \xi + \epsilon)$  για κάποιο κατάλληλο  $\epsilon > 0$ , οπότε:

$$\langle f, f \rangle = \int_a^b f(x)^2 dx = \int_a^{\xi-\epsilon} f(x)^2 dx + \int_{\xi-\epsilon}^{\xi+\epsilon} f(x)^2 dx + \int_{\xi+\epsilon}^b f(x)^2 dx > 0, \text{ ύποπο.}$$

3. Θεωρούμε τη βάση  $\{1, x, x^2, x^3\}$  του  $P_3$  και να  $x_1 = 1, x_2 = x, x_3 = x^2, x_4 = x^3$   
 μεταβάλλουμε με εφαρμογή του μεθόδου ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt:

$$\hat{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \hat{x}'_2 = x \text{ και } \hat{x}_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}x, \hat{x}'_3 = x^2 - \frac{1}{3} \text{ και } \hat{x}_3 = \frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2 - 1), \hat{x}'_4 = x^3 - \frac{3}{5}x \text{ και } \hat{x}_4 = \frac{\sqrt{14}}{4}(5x^3 - 3x).$$

$$4. \|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \quad (1)$$

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \quad (2)$$

Με πρόσθεση των (1) και (2) υααd μείζημ προκίωσα η φηωίβημ ισόζηηα.

$$5. (a) \langle x+y, x-y \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle - \langle y, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0 \Leftrightarrow \|x\|^2 = \|y\|^2 \Leftrightarrow \|x\| = \|y\|$$

$$(b) \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

$$\Leftrightarrow \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle = 0 \Leftrightarrow 2\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$$

Αν ο  $V$  είναι ορθομοναδιαίος χώρος οι (a) και (b) δεν ισχύουν (τότε  $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ )

$$6. (i) \text{ Είναι } \mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp \text{ και αν } u = (1, -1, 2) = \lambda v + w, \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}, v = (0, 1, 1), w \in U,$$

$$\text{τότε } u \cdot v = \lambda (v \cdot v) + w \cdot v \Rightarrow u \cdot v = \lambda \|v\|^2 \text{ (αφοί } w \cdot v = 0)$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} \text{ και η προβολή του } u \text{ στον υπόχωρο } U \text{ είναι: } \left( \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} \right) v = \left( 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$(ii) W = \{(x, y, z) : x+y+z=0, y-z=0\} = \{(x, y, z) : x+2z=0, y=z\} = \{(-2z, z, z) : z \in \mathbb{R}\}$$

Άρα βάση του  $W$  είναι το στοιχείο του  $(-2, 1, 1)$  και  $\dim W = 1$ .

$$\text{Αν } (x, y, z) \in W^\perp \text{ τότε } \langle (x, y, z), (-2, 1, 1) \rangle = 0 \Leftrightarrow -2x + y + z = 0 \Leftrightarrow z = 2x - y$$

$$\text{Άρα } W^\perp = \{(x, y, z) : z = 2x - y\} = \{(x, y, 2x - y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 2) + y(0, 1, -1) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{(1, 0, 2), (0, 1, -1)\}$$

ονόηη βία βάση του  $W^\perp$  είναι το σύνολο  $\{(1, 0, 2), (0, 1, -1)\}$ .

$$7. \text{ Αν } X = [z_1, z_2, z_3]^T \in U^\perp \text{ τότε } \langle X, u \rangle = 0 \Leftrightarrow X^T G \bar{u} = 0 \Leftrightarrow [z_1, z_2, z_3] \begin{bmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 2 & -i \\ 0 & i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +i \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2iz_1 + (1-i)z_2 + 2z_3 = 0 \Leftrightarrow z_3 = -iz_1 + \frac{-1+i}{2}z_2, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

$$\text{Άρα } (z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2, -iz_1 + \frac{-1+i}{2}z_2) = z_1(1, 0, -i) + z_2(0, 1, \frac{-1+i}{2}), z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

Μία βάση του  $U^\perp$  είναι το σύνολο  $\{(1, 0, -i), (0, 1, \frac{-1+i}{2})\}$ .

8. Εργαστείτε, όπως λέει η υπόδειξη. Για τη σύμπτωση των προσεγγίσεων δίνονται τα διαγράμματα:

