

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Α Λ Γ Ε Β Ρ Α

10 Φεβρουαρίου 2009

Απαντήστε και στα τρία θέματα.

ΘΕΜΑ 1ο

- α) Δώστε παράδειγμα ομάδας G που να περιέχει κυκλική υποομάδα τάξης n αν $|G| = 2n$.
- β) Δώστε παράδειγμα ομάδας G που να περιέχει μη αβελιανή υποομάδα τάξης n αν $|G| = 2n$.
- γ) Δώστε παράδειγμα ομάδας G που να περιέχει υποομάδα τάξης d για κάθε d διαιρέτη της τάξης $|G|$.
- δ) Δώστε παράδειγμα ομάδας G με μία κανονική υποομάδα H , τέτοια ώστε η ομάδα-πηλίκο G/H να μην είναι ισομορφική μέσα στην ομάδα της G .
- ε) Δείξτε ότι δεν υπάρχει μη τετριμμένος ομομορφισμός από την ομάδα \mathbb{Z}_7 στην ομάδα \mathbb{Z}_4 .
- στ) Δείξτε ότι υπάρχει μη τετριμμένος ομομορφισμός από την ομάδα S_4 στην ομάδα S_3 .
(3 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2ο

- α) Δεδομένου ότι τα στοιχεία της ομάδας $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ αντιστοιχούν στα σημεία του χαρτεσιανού επιπέδου με ακέραιες συντ/νες, περιγράψτε γεωμετρικά την υποομάδα $8\mathbb{Z} \times 10\mathbb{Z}$.
- β) Δώστε γεωμετρική ερμηνεία για την ομάδα-πηλίκο $\frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{8\mathbb{Z} \times 10\mathbb{Z}}$, βρίσκοντας ελάχιστους θετικούς εκπροσώπους των συμπλόκων της.
- γ) Κατατάξτε την ομάδα-πηλίκο $\frac{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}{8\mathbb{Z} \times 10\mathbb{Z}}$ σύμφωνα με το Θεώρημα Ταξινόμησης των πεπερασμένων αβελιανών ομάδων.
- δ) Δώστε γεωμετρική ερμηνεία για την υποομάδα $<2> \times <5>$ της ομάδας $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{10}$.
(3 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3ο

- α) Δείξτε ότι στον διακτύλιο \mathbb{Z}_n οι διαιρέτες του 0 είναι ακριβώς εκείνα τα στοιχεία που δεν είναι πρώτα προς τον n .
- β) Δείξτε ότι το σύνολο G_n των μη μηδενικών στοιχείων του \mathbb{Z}_n που δεν είναι διαιρέτες του 0 είναι ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό modulo n . (Τιόδ.:

Δείξτε πρώτα ότι το σύνολο G_n είναι χλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό modulo n .)

- γ) Βρείτε τα στοιχεία της ομάδας G_{12} . Με ποιά ομάδα τάξης 4 είναι ισόμορφη?
 δ) Εστω $|G_n| = \phi(n)$. Δείξτε ότι αν a ακέραιος πρώτος προς τον n , τότε $a^{\phi(n)} \equiv 1$ modulo n . (Υπόδ.: Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα Lagrange.)
 ε) Δείξτε ότι ο 12 δεν διαιρεί τον αριθμό 7^{402} . (4 μονάδες)

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Καλή επιτυχία! Ευχαριστούμε για την θαυμάτωρη συνεργασία σας με την Ε. Λαζαρίδη που έγινε διαθέσιμη στην παραγωγή από την Σ. Λαμπροπούλου.