

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΓΡΑΠΤΗ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΙΣ «ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ» ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ / Κατ. Μαθηματικού Εφαρμογών

ΑΘΗΝΑ 7/10/2005, ΩΡΑ: 08.30

Θέμα 1^ο : (α) (Μον. 1.25). Ναδειχτεί ότι η ολοκληρωτική επιφάνεια που επιλύει την εξίσωση $u_x + u_y = u^2$ και διέρχεται από την καμπύλη $x = s, y = -s, u = s$, απειρίζεται κατά μήκος της $x^2 - y^2 = 4$.

(β) (Μον. 0.5). Να καταγραφεί το γενικό πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για ορθογώνιο χωρίο για την κυματική εξίσωση.

Θέμα 2^ο : (α) (Μον. 0.75). Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν οι σταθερές A και B , ώστε το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\Delta u(\rho, \varphi) = 5, \quad 2 < \rho < 3, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi,$$
$$\frac{\partial u(2, \varphi)}{\partial \rho} = A, \quad \frac{\partial u(3, \varphi)}{\partial \rho} = 5 \cos \varphi + B,$$

να είναι επιλύσιμο;

(β) (Μον. 1.5). Ναλυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in (0, 3) \times (0, 5)$$
$$u(0, y) = u(3, y) = u(x, 0) = 0,$$
$$u(x, 5) = 5 \sin x.$$

(γ) (Μον. 1). Να βρεθεί η συνάρτηση Green του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad \underline{x} = (x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty),$$
$$u(0, y) = g(y), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial \underline{n}} = h(x),$$

όπου g, f, h , γνωστές συναρτήσεις και \underline{n} η εξωτερική κάθετος.

Δίνεται η θεμελιώδης λύση για το διαφορικό τελεστή Laplace στον \mathbb{R}^2 :

$$E(\underline{x}; \underline{x}') = \frac{1}{2\pi} \ln[(x - x')^2 + (y - y')^2]^{1/2}.$$

$$e^{s(t+x)} e^{st-isx} e^{is(t-x)} e^{-is(t+x)}$$

Θέμα 3°: (Μον. 2). (α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$y''(x) - 6y'(x) + 11y(x) = 0, \quad 0 < x < 2, \quad y(0) = y(2) = 0.$$

Στη συνέχεια να λυθεί, με τη μέθοδο ανάπτυξης σε πλήρες σύστημα ιδιοσυναρτήσεων (εναλλακτική μέθοδος Fredholm), το ημιμογενές πρόβλημα:

$$y''(x) - 6y'(x) + 5y(x) = e^{3x}, \quad 0 < x < 2, \quad y(0) = y(2) = 0.$$

Θέμα 4°: (Μον. 2). Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών για την εξίσωση θερμότητας:

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) - x, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$$

$$u(0,t) = u(2,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = \frac{x^3}{6} - \frac{2x}{3} + x(2-x), \quad 0 < x < 2.$$

(Δίνεται $\int_0^2 x(2-x) \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) dx = \frac{32}{\pi^3 n^3}$, $n = 1, 3, 5, \dots$).

Ποια φυσική διαδικασία περιγράφει το πρόβλημα;

Θέμα 5°: (Μον. 1). Με χρήση του μετασχηματισμού Fourier, να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών,

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0,$$

(υποθέτουμε ότι υπάρχουν οι μετασχηματισμοί Fourier).

Η λύση, είναι η λύση D' Alembert;

Δίνονται:

$$1. \quad F\{u(x,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{isx} dx = \hat{u}(s,t),$$

$$2. \quad F^{-1}\{\hat{u}(s,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(s,t) e^{-isx} ds = u(x,t),$$

$$3. \quad F\{u_{xx}(x,t)\} = (-is)^2 \hat{u}(s,t),$$

$$4. \quad \sin a = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i}.$$

Handwritten notes and calculations:

$$y = Ae^{-x} + Ce^{3x}$$

$$y' = -3Ae^{-x} + 3Ce^{3x}$$

$$y'' = 3Ae^{-x} + 9Ce^{3x}$$

$$y'' - 6y' + 11y = 0$$

$$3Ae^{-x} + 9Ce^{3x} - 6(-3Ae^{-x} + 3Ce^{3x}) + 11(Ae^{-x} + Ce^{3x}) = 0$$

$$3Ae^{-x} + 9Ce^{3x} + 18Ae^{-x} - 18Ce^{3x} + 11Ae^{-x} + 11Ce^{3x} = 0$$

$$(3+18+11)Ae^{-x} + (9-18+11)Ce^{3x} = 0$$

$$32Ae^{-x} + 2Ce^{3x} = 0$$

$$16A + Ce^{4x} = 0$$

$$C = -16Ae^{-4x}$$

$$y = Ae^{-x} - 16Ae^{-4x}$$

$$= -9Ae^{3x} - 3Ae^{-3x}$$