

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2006

1. Να αναχθεί το μη ομογενές πρόβλημα Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{στο } \Omega = (0,1) \times (0,1) \\ u = g, & \text{στο } \Gamma \end{cases}$$

όπου

$$g(x,y) = \begin{cases} x, & y=0 \\ -y+1, & x=1 \\ -x+1, & y=1 \\ y, & x=0 \end{cases}$$

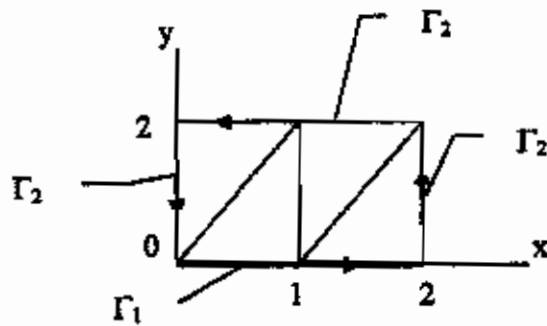
στο αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα.

2. Να υπολογιστούν τα στοιχεία του πίνακα A και του διανύσματος b του γραμμικού συστήματος $Ac = b$, που προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου Galerkin με συναρτήσεις βάσης στέγες στο πρόβλημα:

$$\begin{cases} -u'' + x \cdot u = x^2, & \text{στο } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

3. Έστω το πρόβλημα συνοριακών τιμών.

$$\begin{cases} -\nabla^2 u + u = x, & \text{στο } \Omega \\ u = 0, & \text{στο } \Gamma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial r} = 1, & \text{στο } \Gamma_2 \end{cases}$$



Να βρεθεί η ασθενής μορφή του παραπάνω προβλήματος και να εφαρμοστεί η μέθοδος Galerkin με συναρτήσεις βάσης πυραμίδες χρησιμοποιώντας τον τριγωνισμό του σχήματος. (Να υπολογιστούν οι συναρτήσεις βάσης πυραμίδες, να βρεθεί η μορφή του πίνακα A αλλά να μην υπολογιστούν τα στοιχεία του A και του b).

4. Έστω το γενικό (ακριβές) πρόβλημα σε ένα χώρο Hilbert V :

$$\begin{cases} \text{Να βρεθεί } u \in V \text{ τέτοιο ώστε} \\ B(u, v) = F(v), \quad \forall v \in V. \end{cases}$$

i. Να διατυπωθεί λεπτομερώς το Θεώρημα Lax-Milgram.

ii. Να οριστεί το προσεγγιστικό πρόβλημα Galerkin και να διατυπωθεί και να αποδειχθεί το Θεώρημα Galerkin (ύπαρξη και μοναδικότητα προσεγγιστικής λύσης).

iii. Αν \bar{u}_n η προσέγγιση Galerkin και V_n υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης του V δείξτε ότι

$$B(\bar{u}_n - u, \phi) = 0, \quad \forall \phi \in V_n.$$

Τι συμπεραίνετε από την παραπάνω σχέση για την προσέγγιση Galerkin στην περίπτωση που το $B(\cdot, \cdot)$ είναι εσωτερικό γινόμενο;

Διάρκεια εξέτασης: 2.5 ώρες.

Βαθμολογία: 1(2μονάδες), 2(3μονάδες), 3(2μονάδες), 4(3μονάδες).

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ