

Τοπολογία και Εφαρμογές 2012-2013

Α' ΟΜΑΔΑ

Θέμα 1. (i) Δώστε τον ορισμό της τοπολογίας \mathcal{T} ενός συνόλου X . Επίσης διατυπώστε τον ορισμό του εσωτερικού και της κλειστότητας ενός υποσυνόλου A του τοπολογικού χώρου (X, \mathcal{T}) . Ποιά χαρακτηριστική ιδιότητα έχουν τα σημεία της κλειστότητας του A ;

(ii) Έστω X άπειρο σύνολο και $\mathcal{T} = \{F \subseteq X : X \setminus F \text{ είναι πεπερασμένο}\} \cup \{\emptyset\}$. Δείξτε ότι η οικογένεια \mathcal{T} είναι μια τοπολογία του X . Βρείτε το εσωτερικό και την κλειστότητα ενός υποσυνόλου A του X . Είναι η \mathcal{T} μετριοποιητήσιμη;

Θέμα 2. Έστω X Hausdorff χώρος. Αν X άπειρο σύνολο δείξτε ότι ο X περιέχει άπειρα ξένα ανα δύο ανοικτά υποσύνολα.

Θέμα 3. (i) Διατυπώστε τον ορισμό του χώρου T_4 . Αναφέρετε δύο σημαντικά θεωρήματα για τους χώρους αυτούς.

(ii) Δείξτε ότι κάθε συμπαγής και Hausdorff χώρος είναι χώρος T_4 .

Θέμα 4. (α) Έστω X συμπαγής τοπολογικός χώρος. Αν $F \subseteq X$ κλειστό δείξτε ότι το F είναι συμπαγές υποσύνολο του X .

(β) Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \rightarrow Y$ συνεχής απεικόνιση. Αν $F \subseteq X$ συμπαγές δείξτε ότι το $f(F)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y .

(γ) Έστω Y τοπολογικός χώρος Hausdorff. Αν $K \subseteq Y$ συμπαγές δείξτε ότι το K είναι κλειστό υποσύνολο του Y .

(δ) Έστω X συμπαγής τοπολογικός χώρος, Y τοπολογικός χώρος Hausdorff και $f : X \rightarrow Y$ συνεχής 1-1 και επί. Δείξτε ότι η f είναι ομοιομορφισμός.

Θέμα 5. Έστω X συμπαγής και Hausdorff. Αν υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ που διαχωρίζει τα σημεία του X δείξτε ότι ο X είναι μετριοποιητήσιμος.

Με βάση το παραπάνω δείξτε ότι κάθε συμπαγής, Hausdorff και αριθμήσιμος είναι μετριοποιητήσιμος.

Θέμα 6. Έστω X συμπαγής και $(F_i)_{i \in I}$ οικογένεια κλειστών υποσυνόλων του X . Έστω U ανοικτό υποσύνολο του X . Αν $\bigcap_{i \in I} F_i \subseteq U$ δείξτε ότι για κάθε $i_0 \in I$ υπάρχουν πεπερασμένο πλήθος $i_1, \dots, i_n \in I$ ώστε $\bigcap_{k=0}^n F_{i_k} \subseteq U$.

Β' ΟΜΑΔΑ

Θέμα 7. Έστω $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ οικογένεια τοπολογικών χώρων ώστε για κάθε $i \in I$ η τοπολογία \mathcal{T}_i είναι μη τετριμμένη, δηλαδή $\mathcal{T}_i \supsetneq \{\emptyset, X_i\}$. Επιλέγουμε $U_i \in \mathcal{T}_i \setminus \{\emptyset, X_i\}$ και $x_i \in U_i$ για κάθε $i \in I$. Αν το $x = (x_i)_{i \in I}$ έχει αριθμήσιμη βάση $(B_n)_n$ περιοχών στον χώρο γινόμενο $\prod_{i \in I} X_i$ δείξτε ότι το I είναι αριθμήσιμο.

Θέμα 8. (α) Έστω X χώρος T_3 .

(1) Δείξτε ότι για κάθε $x \in X$ και U ανοικτό υποσύνολο του X με $x \in U$ υπάρχει V ανοικτό υποσύνολο του X με $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$.

(2) Αν ο X είναι και δεύτερος αριθμήσιμος δείξτε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο του X είναι F_σ .

(β) Έστω X T_3 και 2ος αριθμήσιμος. Εξηγήστε γιατί ο X είναι T_4 . Επίσης χρησιμοποιώντας το (α) δείξτε ότι αν U ανοικτό υποσύνολο του X τότε υπάρχει $f : X \rightarrow [0, 1]$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in U$ και $f(x) = 0$ $x \in X \setminus U$.

Θέμα 9. Διατυπώστε τον ορισμό της Stone–Cech συμπαγοποίησης ενός $T_{3\frac{1}{2}}$ -χώρου.

Σχολιάστε τις βασικές ιδιότητές της και εξηγήστε γιατί ο χώρος $[0, 1]$ δεν είναι η Stone–Cech συμπαγοποίηση του $(0, 1)$. Δείξτε ότι το $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια συμπαγοποίηση του \mathbb{N} που όμως πάλι δεν είναι η Stone–Cech.

Θέμα 10. Δείξτε ότι υπάρχει $I : \ell_\infty \rightarrow C(\beta\mathbb{N})$ γραμμική ισομετρία επί, όπου

$$\ell_\infty = \{(a_n) : \sup |a_n| < \infty\}$$

και

$$C(\beta\mathbb{N}) = \{f : \beta\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ συνεχής}\}$$

με νόρμα $\|f\|_\infty = \sup\{|f(p)| : p \in \beta\mathbb{N}\}$.

Γ' ΟΜΑΔΑ

Θέμα 11. Έστω X συμπαγής και $f : X \rightarrow X$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει μη κενό κλειστό υποσύνολο F του X με την ιδιότητα $f(F) = F$ (Υποδ. Χρησιμοποιείστε το Λήμμα Zorn).

Θέμα 12. Έστω X τοπολογικός χώρος ώστε για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχει $f : X \rightarrow [0, 1]$ συνεχής με $f(x) \neq f(y)$.

- (i) Αν $x \in X$ και $K \subseteq X$ συμπαγές με $x \notin K$ δείξτε ότι υπάρχει $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(x) = 0$ και $f(y) = 1$ για κάθε $y \in K$.
- (ii) Αν K_1, K_2 ξένα συμπαγή υποσύνολα του X δείξτε ότι υπάρχει $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(x) = 0$ για κάθε $x \in K_1$ και $f(x) = 1$ για κάθε $x \in K_2$.

∞- ΟΜΑΔΑ

Θέμα 13. Έστω $X_i, i \in I$ διαχωρίσιμοι τοπολογικοί χώροι, όπου $I = [0, 1]$. Δείξτε ότι ο χώρος $X = \prod_{i \in I} X_i$ με την τοπολογία γινόμενο είναι διαχωρίσιμος. (δείτε πχ σελ.336 του βιβλίου “Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση” του Σ. Νεγρεπόντη κ.α.)

Θέμα 14. Ο χρωματικός αριθμός ενός πεπερασμένου γραφήματος G είναι ο ελάχιστος φυσικός n για τον οποίο υπάρχει $f : G \rightarrow \{1, \dots, n\}$ τέτοια ώστε οποιοσδήποτε δύο κορυφές a, b του G με $f(a) = f(b)$ δεν συνδέονται με ακμή του G .

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και H άπειρο γράφημα με την ιδιότητα κάθε πεπερασμένο υπογράφημα του έχει χρωματικό αριθμό το πολύ n . Δείξτε ότι τότε υπάρχει $f : H \rightarrow \{1, \dots, n\}$ με την ιδιότητα οποιοσδήποτε δύο κορυφές a, b του H με $f(a) = f(b)$ δεν συνδέονται με ακμή του H .