

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΚΤΙΜΗΤΙΚΗ

1) Έστω  $X_1, \dots, X_n$  και  $Y_1, \dots, Y_m$  ανεξάρτητα τ.μ. από πληθυσμούς με μέση τιμή  $\theta$  και γνωστές διασπορές  $\sigma_1^2$  και  $\sigma_2^2$ . Δείξτε ότι για  $c \in [0,1]$  η  $U = c\bar{X} + (1-c)\bar{Y}$  είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της παραμέτρου  $\theta$  και βρείτε το  $c$  για το οποίο η διασπορά της  $U$  είναι ελάχιστη.

Λύση:

Έστω  $U = c\bar{X} + (1-c)\bar{Y}$ ,  $c \in [0,1]$ . Τότε:

$$E(U) = cE(\bar{X}) + (1-c)E(\bar{Y}) = cE\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) + (1-c)E\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m Y_i\right) = c\frac{1}{n}n\theta + (1-c)\frac{1}{m}m\theta = \theta,$$

δηλαδή η  $U$  είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της  $\theta$ .

Ακόμα:

$$\text{Var}(U) = c^2\text{Var}(\bar{X}) + (1-c)^2\text{Var}(\bar{Y}) = c^2\text{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) + (1-c)^2\text{Var}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m Y_i\right).$$

Αλλά  $X_i, Y_j$  ( $i=1,..n; j=1,..m$ ) ανεξάρτητα, άρα και ασυσχέτιστα, οπότε η τελευταία έκφραση παίρνει την μορφή:

$$\text{Var}(U) = c^2 \frac{1}{n^2} n\sigma_1^2 + (1-c)^2 \frac{1}{m^2} m\sigma_2^2 = g(c).$$

Η τελευταία συνάρτηση ελαχιστοποιείται στο σημείο που μηδενίζεται η παράγωγος της, δηλαδή:

$$g'(c) = 2c \frac{\sigma_1^2}{n} - 2(1-c) \frac{\sigma_2^2}{m} = 0 \Rightarrow c^* = \frac{\frac{\sigma_2^2}{m}}{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}.$$

2) Έστω  $X_1, \dots, X_n$  τ.δ. από την  $U(\theta, 2\theta)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .

i) Να βρεθεί η σ.π.π. της  $Y = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ .

ii) Δείξτε ότι η  $T = \frac{n+1}{2n+1} Y$  είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της  $\theta$ .

Λύση:

i) Θυμίζουμε ότι όταν μια τ.μ.  $X$  ακολουθεί την  $U(\alpha, \beta)$  έχει συνάρτηση κατανομής:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \alpha \leq x < \beta \\ 1, & \beta \leq x \end{cases}$$

Ενδιαφερόμαστε για την συνάρτηση κατανομής της τ.μ Y.

$$F(y) = P(Y \leq y) = P(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq y) = P(X_1 \leq y, \dots, X_n \leq y) \stackrel{X_i \text{ ανεξάρτητα}}{=} \prod_{i=1}^n P(X_i \leq y) \stackrel{X_i \sim U(0,2\theta)}{=} \left(\frac{y-\theta}{\theta}\right)^n.$$

Άρα η σ.π.π. της Y είναι:

$$f(y) = F'(y) = n \left(\frac{y-\theta}{\theta}\right)^{n-1} \frac{1}{\theta} = n \frac{(y-\theta)^{n-1}}{\theta^n}, \quad y \in (\theta, 2\theta).$$

ii) Είναι:

$$E(Y) = \int_{\theta}^{2\theta} n \frac{y(y-\theta)^{n-1}}{\theta^n} dy = \frac{y(y-\theta)^n}{\theta^n} \Big|_{\theta}^{2\theta} - \int_{\theta}^{2\theta} \frac{(y-\theta)^n}{\theta^n} dy = 2\theta \cdot \frac{\theta}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} \theta.$$

Άρα  $E(\frac{n+1}{2n+1} Y) = \theta$ , οπότε η  $T = \frac{n+1}{2n+1} Y$  είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της  $\theta$ .

3) Έστω  $X_1, \dots, X_n$  τ.δ. από πληθυσμό με σ.π.π  $f(x) = a^2 x e^{-ax}$ ,  $x > 0$ .

- i) Να βρεθεί η E.M.P. της  $a$ .
- ii) Να βρεθεί η E.M.P. της μέσης τιμής του πληθυσμού.

Λύση:

i) Καταρχήν παρατηρούμε ότι η συγκεκριμένη σ.π.π. είναι η  $G(a, p=2)$ . Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$L(a) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = a^{2n} \left( \prod_{i=1}^n x_i \right) e^{-a \sum_{i=1}^n x_i} \Rightarrow l(a) = 2n \cdot \ln(a) + \ln(\sum_{i=1}^n x_i) - a \sum_{i=1}^n x_i.$$

Άρα η E.M.P. της  $a$  προκύπτει από την λόση της εξίσωσης:

$$l'(a) = 0 \Rightarrow \frac{2n}{a} - \sum_{i=1}^n x_i = 0 \Rightarrow \hat{a} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n x_i}.$$

ii) Γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή μιας  $G(a, p)$  ισούται με  $\mu = \frac{p}{a}$ . Στην συγκεκριμένη οπότε περίπτωση  $\mu = \frac{2}{a}$ . Με χρήση του Θεωρήματος 9.1 η E.M.P τότε της  $a$  θα είναι:

$$\hat{\mu} = \frac{2}{\hat{a}} = \frac{2}{\frac{2n}{\sum_{i=1}^n x_i}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{X}.$$

4) Έστω  $X_1, \dots, X_n$  τ.δ. από την  $G(a,p)$ . Να προσδιοριστούν οι εκτιμήτριες των  $a, p$  με την μέθοδο των ροπών.

Λύση:

$$\text{Γνωρίζουμε ότι η σ.π.π. μιας } G(a,p) \text{ είναι } f(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax}.$$

Οι δύο πρώτες δειγματικές ροπές περί την αρχή είναι:

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X} \text{ και } m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \bar{X}^2.$$

Οι αντίστοιχες δύο πρώτες ροπές του πληθυσμού είναι:

$$\mu_1 = E(X) = \frac{p}{a} \text{ και } \mu_2 = E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2 = \frac{p(p+1)}{a^2}.$$

Άρα έχουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{p}{a} = \bar{X} \\ \frac{p(p+1)}{a^2} = \bar{X}^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{(\bar{X})^2}{\bar{X}^2 - (\bar{X}^2)} \\ a = \frac{\bar{X}}{\bar{X}^2 - (\bar{X}^2)} \end{cases}.$$

5) Έστω  $X_1, \dots, X_n$  τ.δ. από την  $U(a,b)$ .

- i) Να προσδιοριστούν οι εκτιμήτριες των  $a, b$  με την μέθοδο των ροπών.
- ii) Να προσδιοριστούν οι E.M.P των  $a, b$ .

Λύση:

$$\text{Γνωρίζουμε ότι η σ.π.π. μιας } U(a,b) \text{ είναι } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

i) Οι δύο πρώτες δειγματικές ροπές περί την αρχή είναι:

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X} \text{ και } m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \bar{X}^2.$$

Οι αντίστοιχες δύο πρώτες ροπές του πληθυσμού είναι:

$$\mu_1 = E(X) = \frac{a+b}{2} \text{ και } \mu_2 = E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

Άρα έχουμε το σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a+b}{2} = \bar{X} \\ \frac{a^2 + ab + b^2}{3} = \bar{X}^2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a' = \bar{X} - \sqrt{3} \left( \bar{X}^2 - \bar{X}^2 \right)^{1/2} \\ b' = \bar{X} + \sqrt{3} \left( \bar{X}^2 - \bar{X}^2 \right)^{1/2} \end{array} \right.$$

ii) Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$\begin{aligned} L(a,b) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{b-a} I_{[a,b]}(x_i) = \left( \frac{1}{b-a} \right)^n \prod_{i=1}^n I_{[a,b]}(x_i) = \left( \frac{1}{b-a} \right)^n \prod_{i=1}^n \{I_{(-\infty,b]}(x_i) I_{[a,+\infty]}(x_i)\} \\ &= \left( \frac{1}{b-a} \right)^n I_{(-\infty,b]}(\max x_i) I_{[a,+\infty]}(\min x_i). \end{aligned}$$

Η συνάρτηση αυτή δεν διαφορίζεται παντού ως προς a και b, για να μεγιστοποιηθεί όμως είναι φανερό ότι θα πρέπει να ελαχιστοποιηθεί η διαφορά b-a με την προϋπόθεση ότι ισχύει  $\max x_i \leq b$  και  $\min x_i \geq a$ .

Επομένως οι Ε.Μ.Π. των a, b είναι:  $\hat{a} = \min x_i$  και  $\hat{b} = \max x_i$ .

6) Το πλάτος ενός παλμού είναι τ.μ.  $X \sim N(\mu, 4)$ . Στην έξοδο του μηχανήματος μπορούμε να παρατηρήσουμε αν το X υπερβαίνει την τιμή 40 ή όχι. Αν σε 100 παρατηρήσεις το X υπερέβη την τιμή αυτή 80 φορές, ποια είναι η Ε.Μ.Π. της μέσης τιμής μ;

Λύση:

$$\text{Έστω } Y_i = \begin{cases} 1, & x_i > 40 \\ 0, & x_i \leq 40 \end{cases}. \text{ Γνωρίζουμε ότι } \hat{p} = \hat{P}(Y_i = 1) = 0.8 \text{ και} \\ (1 - \hat{p}) = \hat{P}(Y_i = 0) = 0.2.$$

Τότε:

$$p = P(x > 40) = P\left(\frac{X-\mu}{2} > \frac{40-\mu}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{40-\mu}{2}\right) \Rightarrow \Phi\left(\frac{40-\mu}{2}\right) = 1 - p.$$

Αν  $\hat{p}$  η Ε.Μ.Π του p και  $\hat{\mu}$  η Ε.Μ.Π. του μ τότε:

$$\Phi\left(\frac{40-\hat{\mu}}{2}\right) = 1 - \hat{p} = 0.20 \Rightarrow \hat{\mu} = 41.68.$$

7) Ο αριθμός των σωματιδίων α που εκπέμπονται από ραδιενεργό πηγή σε χρόνο t(sec) ακολουθεί την  $P(\lambda)$ , δηλαδή  $P(X=k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$ . Για την εκτίμηση του λ καταγράφηκε ο αριθμός ν των πηγών που εξέπεμψαν ένα τουλάχιστον σωματίδιο σε χρόνο 1sec από 30 πηγές. Να προσδιοριστεί η Ε.Μ.Π της λ για ν = 20.

Λύση:

$$\text{Έστω } Y_i = \begin{cases} 1, & x_i \geq 1 \\ 0, & x_i = 0 \end{cases}.$$

Τότε  $p = P(Y_i = 1) = P(X_i \geq 1) = 1 - P(X_i = 0) = 1 - e^{-\lambda}$ .

Αν  $\hat{p}$  η Ε.Μ.Π του  $p$  και  $\hat{\lambda}$  η Ε.Μ.Π. του  $\lambda$  τότε:

$$\hat{p} = 1 - e^{-\hat{\lambda}} \Rightarrow \frac{20}{30} = 1 - e^{-\hat{\lambda}} \Rightarrow \hat{\lambda} = \log(3).$$

8) Έστω  $X_1, \dots, X_n$  τ.δ. από την  $B(N, p)$  με  $N$  γνωστό. Να προσδιοριστεί η Ε.Μ.Π της  $p$ .

Λύση:

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$\begin{aligned} L(p) &= \prod_{i=1}^n \left\{ \binom{n}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{N-x_i} \right\} = \prod_{i=1}^n \binom{n}{x_i} p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{(nN - \sum_{i=1}^n x_i)} \\ \Rightarrow l(p) &= \log \left( \prod_{i=1}^n \binom{n}{x_i} \right) + \sum_{i=1}^n x_i \log(p) - (nN - \sum_{i=1}^n x_i) \log(1-p). \end{aligned}$$

Άρα η Ε.Μ.Π. της  $p$  προκύπτει από την λύση της εξίσωσης:

$$l'(p) = 0 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p} - \frac{nN - \sum_{i=1}^n x_i}{1-p} = 0 \Rightarrow \hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{nN} = \frac{\bar{X}}{N}.$$

Σημείωση:  $\hat{p} = \frac{\bar{X}}{N} = \frac{k}{m}$ , όπου  $k = \sum_{i=1}^n x_i$  είναι ο συνολικός αριθμός επιτυχιών και  $m = n \cdot N$  ο συνολικός αριθμός δοκιμών Bernoulli.

9) Έστω  $X_1, \dots, X_n$  τ.δ. από την  $N(\mu, \sigma^2)$ .

- i) Να βρεθεί η Ε.Μ.Π της  $\mu$  όταν  $\sigma^2$  γνωστό.
- ii) Να βρεθεί η Ε.Μ.Π της  $\sigma^2$  όταν  $\mu$  γνωστό.
- iii) Να βρεθούν οι Ε.Μ.Π. των  $\mu, \sigma^2$ .

Λύση:

i) Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow l(\mu) = -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}.$$

Άρα η Ε.Μ.Π. της  $\mu$  προκύπτει από την λύση της εξίσωσης:

$$l'(\mu) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0 \Rightarrow \frac{n}{\sigma^2} (\bar{X} - \mu) = 0 \Rightarrow \hat{\mu} = \bar{X}.$$

ii) Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow l(\mu) = -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}.$$

Άρα η Ε.Μ.Π. της  $\sigma^2$  προκύπτει από την λύση της εξίσωσης:

$$l'(\sigma^2) = 0 \Rightarrow -\frac{n}{2} \cdot \frac{2\pi}{2\pi\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = 0 \Rightarrow -n + \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{n}.$$

iii) Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \cdot e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \Rightarrow l(\mu) = -\frac{n}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}.$$

Άρα οι Ε.Μ.Π. των  $\mu, \sigma^2$  προκύπτουν από την λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} \frac{\partial l(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = 0 \\ \frac{\partial l(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0 \\ -n + \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\mu} = \bar{X} \\ \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} \end{cases}.$$

10) Έστω  $X_1, \dots, X_n$  τ.δ. από πληθυσμό με συνάρτηση κατανομής  $F(x; \theta) = 1 - (1+x^2)^{-\theta}$ ,  $x > 0, \theta > 0$ .

Να βρεθεί η Ε.Μ.Π της  $\theta$ .

Λύση:

Εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε την σ.π.π. της παραπάνω κατανομής.

$$f(x; \theta) = F'(x; \theta) = 2x \cdot \theta (1+x^2)^{-(\theta+1)}, x > 0.$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \{\theta(1+x_i^2)^{-(\theta+1)} \cdot 2x_i\} = (2\theta)^n \frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\prod_{i=1}^n (1+x_i^2)^{-(\theta+1)}}$$

$$\Rightarrow l(\theta) = n \log(2\theta) + \sum_{i=1}^n \log(x_i) - (\theta+1) \sum_{i=1}^n \log(1+x_i^2).$$

Άρα η Ε.Μ.Π. της  $\theta$  προκύπτει από την λύση της εξίσωσης:

$$l'(\theta) = 0 \Rightarrow \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \log(1+x_i^2) = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n \log(1+x_i^2)}{n}.$$

Μιας και η συγκεκριμένη κατανομή δεν είναι κάποια από τις γνωστές κατανομές που έχουμε μάθει για να είμαστε σίγουροι ότι η παραπάνω λύση είναι μέγιστο θα πρέπει να δείξουμε ότι η δεύτερη παράγωγος είναι αρνητική για  $\theta = \hat{\theta}$ . Πράγματι:

$$l''(\theta) = -\frac{n}{\theta^2} < 0 \quad \forall \theta > 0.$$