Ακολουθίες και συναρτήσεις

Αν παρατηρήσεις λάθη, ανάφερε το στο topic του μαθήματος

1.

Η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία στο x και η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο y. Δηλαδή,

$\forall\varepsilon>0,\exists n_1\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_1,\rho(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}$ και $\forall\varepsilon>0,\exists n_2\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_2,\rho(y_n,y)<\frac{\varepsilon}{2}$.

Από την τριγωνική ιδιότητα της μετρικής, παίρνουμε

$\rho(x_n,y_n)\leq\rho(x_n,x)+\rho(x,y_n)\Leftrightarrow\rho(x_n,y_n)-\rho(x,y_n)\leq\rho(x_n,x)$ και

$\rho(x,y_n)\leq\rho(x,y)+\rho(y_n,y)\Leftrightarrow\rho(x,y_n)-\rho(x,y)\leq\rho(y_n,y)$.

Προσθέτοντας τις δύο ανισότητες, παίρνουμε $\rho(x_n,y_n)-\rho(x,y)\leq\rho(x_n,x)+\rho(y_n,y)\quad(1)$.

Επίσης, από την τριγωνική ιδιότητα της μετρικής, παίρνουμε

$\rho(x,y_n)\leq\rho(x_n,y_n)+\rho(y_n,y)\Leftrightarrow\rho(x,y_n)-\rho(x_n,y_n)\leq\rho(y_n,y)$ και

$\rho(x,y)\leq\rho(x,y_n)+\rho(y_n,y)\Leftrightarrow\rho(x,y)-\rho(x,y_n)\leq\rho(y_n,y)$.

Προσθέτοντας τις δύο ανισότητες, παίρνουμε $\rho(x,y)-\rho(x_n,y_n)\leq 2\rho(y_n,y)\quad(2)$.

Λόγω της σύγκλισης των ακολουθιών $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, θέτοντας $n_0=max\{n_1,n_2\}$, οι ανισότητες (1) και (2) γράφονται

$$\begin{Bmatrix}\rho(x_n,y_n)-\rho(x,y)<\varepsilon\\ \rho(x,y)-\rho(x_n,y_n)<\varepsilon\end{Bmatrix}\Leftrightarrow|\rho(x_n,y_n)-\rho(x,y)|<\varepsilon,\quad\forall n\geq n_0,\forall\varepsilon>0\Leftrightarrow\rho(x_n,y_n)\to\rho(x,y)$$

2.

Από τη σύγκλιση της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο x και της $\rho(x_n,y_n)$ στο 0, εξορισμού έχουμε ότι

$\forall\varepsilon>0,\exists n_1\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_1,\rho(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}$ και $\forall\varepsilon>0,\exists n_2\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_2,|\rho(x_n,x)-0|<\frac{\varepsilon}{2}\Leftrightarrow\rho(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}$.

Από την τριγωνική ιδιότητα της μετρικής, λαμβάνουμε $\rho(x,y_n)\leq\rho(x_n,y_n)+\rho(x_n,x)$.

Θέτουμε $n_0=max\{n_1,n_2\}$ και έτσι, $\forall\varepsilon>0,\forall n\geq n_0,\rho(y_n,x)=\rho(x,y_n)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

Επομένως, $y_n\to x$.

3.

i)

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον (X,ρ_d) που συγκλίνει στο x_0. Αυτό σημαίνει ότι

$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_0,\rho(x_n,x_0)<\varepsilon$

Αν $x_n\neq x_0$,τότε $\rho(x_n,x_0)=1,\quad\forall n\geq n_0$. Επομένως, υπάρχει $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$ τέτοιο, ώστε $\rho(x_n,x_0)>\varepsilon_0$, που σημαίνει ότι η ακολουθία δεν θα συγκλίνει. Άτοπο, αφού έχουμε υποθέσει ότι η ακολουθία συγκλίνει. Άρα, $x_n=x_0,\quad\forall n\geq n_0$. Δηλαδή, η ακολουθία είναι τελικά σταθερή.

<u>Αντίθετη κατεύθυνση</u>:

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τελικά σταθερή ακολουθία. Αυτό σημαίνει ότι

$\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_0,x_n=x_{n_0}\Leftrightarrow\rho(x,x_{n_0})=0<\varepsilon,\quad\forall\varepsilon>0$. Επομένως, η ακολουθία αυτή συγκλίνει στο $x=x_{n_0}$.

(ii)

Έστω συνάρτηση $f_1:(X,\rho_d)\to(Y,d)$ όχι συνεχής. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $\varepsilon>0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\delta>0$ να υπάρχει $x_0\in X$ για το οποίο να ισχύει $\rho_d(x_0,x)<\delta$ και $d(f_1(x_0),f_1(x))\geq\varepsilon$.

Επειδή όμως, η f_1 είναι συνάρτηση από τον διακριτό μετρικό χώρο σε έναν άλλο, η μη συνέχειά της σημαίνει, ότι υπάρχει $\varepsilon>0$ τέτοιο, ώστε να υπάρχει $x_0\in X$ για το οποίο να ισχύει $\rho_d(x_0, x)=0$ και $d(f_1(x_0), f_1(x))\geq\varepsilon>0$. Το οποίο, σημαίνει ότι υπάρχει $x_0\in X$ για το οποίο ισχύει $x=x_0$, αλλά $f_1(x)\neq f_1(x_0)$. Αυτό δεν μπορεί να συμβαίνει σε συναρτήσεις, επομένως οδηγούμαστε σε άτοπο. Έτσι, η μοναδική υπόθεση που κάναμε (ότι υπάρχει συνάρτηση $f_1:(X,\rho_d)\to(Y,d)$ μη συνεχής) δεν ισχύει. Δηλαδή, όλες οι συναρτήσεις $f:(X,\rho_d)\to(Y,d)$ είναι συνεχείς.

4.

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία σε έναν μετρικό χώρο (X,ρ), η οποία συγκλίνει στο $x\in X$. Τότε κάθε υπακολουθία της συγκλίνει στο ίδιο όριο. Έστω $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ μία υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, η οποία όπως αναφέρθηκε, συγκλίνει στο x. Τότε κάθε υπακολουθία της $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει και αυτή στο ίδιο όριο x.

<u>Αντίθετη κατεύθυνση</u>:

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία σε έναν μετρικό χώρο (X,ρ), για την οποία ισχύει ότι κάθε της υπακολουθία έχει περαιτέρω υπακολουθία που συγκλίνει στο $x\in X$. Δηλαδή, $x_{k_{l_n}}\to x$. Και έστω ότι η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει. Τότε, υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, που κι αυτή δε συγκλίνει. Δηλαδή, $\exists\varepsilon>0:\forall n\in\mathbb{N}, \rho(x_{k_n}, x)\geq\varepsilon$. Όμως, από την υπόθεση έχουμε ότι $x_{k_{l_n}}\to x$, δηλαδή $\forall\varepsilon>0, \exists m\in\mathbb{N}:\forall n\geq m, \rho(x_{k_{l_n}}, x)<\varepsilon$. Άτοπο, γιατί $x_{k_m}=x_{k_{l_n}}$, για κάποια $m, n\in\mathbb{N}$.

5.

i)

$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|f_i(x)-f_i(y)|\geq 0,\quad \forall x, y\in X$, ως άθροισμα θετικών.

$\rho(x,y)=0\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}|f_i(x)-f_i(y)|=0\Leftrightarrow f_i(x)=f_i(y), \forall i=1,2,\ldots,n\Leftrightarrow x=y$

Επίσης,

$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|f_i(x)-f_i(y)|=\sum_{i=1}^{n}|f_i(y)-f_i(x)|=\rho(y,x)$

Τέλος, για την τριγωνική ιδιότητα έχουμε

$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|f_i(x)-f_i(y)|=\sum_{i=1}^{n}|f_i(x)-f_i(z)+f_i(z)-f_i(y)|\leq\sum_{i=1}^{n}|f_i(x)-f_i(z)|+\sum_{i=1}^{n}|f_i(z)-f_i(y)|$
$=\rho(x,z)+\rho(z,y)$

ii)

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στον (X,ρ), ώστε $x_n\to x_0, x_0\in X$. Δηλαδή,

$\forall\delta>0, \exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_0, \rho(x_n, x_0)<\delta\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}|f_i(x_n)-f_i(x_0)|<\delta$

Όμως, $|f_i(x_n)-f_i(x_0)|\leq\sum_{i=1}^{n}|f_i(x_n)-f_i(x_0)|<\delta\Leftrightarrow|f_i(x_n)-f_i(x_0)|<\delta, \forall i=1,\ldots,n, \forall\delta>0, \forall n\geq n_0$

Θέτοντας $\varepsilon=\delta$, έχουμε ότι

$\forall\varepsilon>0$ με $\rho(x_n, x_0)<\varepsilon$, ισχύει $\rho_{|\cdot|}(f_i(x_n), f_i(x_0))=|f_i(x_n)-f_i(x_0)|<\varepsilon$.

Έτσι, οι $f_i, i=1,\ldots,n$ είναι συνεχείς.

6.
Έστω $f:(X,\rho)\to(Y,d)$ συνάρτηση συνεχής στο x, όπου $x\in X$. Τότε, από αρχή μεταφοράς έχουμε ότι για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον (X,ρ), με $x_n\to x$, θα ισχύει $f(x_n)\to f(x)$.

<u>Αντίθετη κατεύθυνση</u>:
Έστω ότι για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον (X,ρ), με $x_n\to x$, η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία στον (Y,d) και έστω ότι η f δεν είναι συνεχής στο x. Τότε,
$\exists\varepsilon>0:\forall\delta>0,\exists y\in X$ με $\rho(x,y)<\delta$ και $d(f(x),f(y))\geq\varepsilon$. Θέτοντας $\delta=\frac{1}{n}$, έχουμε ότι
$\exists\varepsilon>0:\forall n\in\mathbb{N},\exists y_n\in X$ με $\rho(y_n,x)<\frac{1}{n}$ και $d(f(y_n),f(x))\geq\varepsilon$. Έτσι, έχουμε βρει μια ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$, όπου $y_n\to x$. Επομένως, από την υπόθεση, η $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσα στον (Y,d). Επειδή όμως, $d(f(y_n),f(x))\geq\varepsilon,\quad\forall n\in\mathbb{N}$, έχουμε ότι $f(y_n)\to y_0$ με $y_0\neq f(x)$.
Έστω τώρα ακολουθία $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $z_n=\begin{cases} y_n, & n\ \ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \\ x, & n\ \ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma \end{cases}$. Παρατηρούμε ότι $z_n\to x$, αφού $y_n\to x$ και τετριμμένα $x\to x$. Όμως, η $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει, αφού $f(x)\to f(x)$ και $f(y_n)\to y_0$ με $y_0\neq f(x)$. Βρήκαμε, λοιπόν, μια συγκλίνουσα στο x ακολουθία, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$, για την οποία η $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ δεν συγκλίνει στον (Y,d), επομένως οδηγηθήκαμε σε άτοπο. Άρα, η f είναι συνεχής.