

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ STURM - LIOUVILLE

1. Αριθμοί από το βιβλίο W. BOYCE & R. DI PRIMA

Σελίδα 701 / 9, 11

Σελίδα 707 / 3

Σελίδα 721 / 14, 16, 18 (αντοσυγγρίς... έχει την έννοια
των συμμετριών...)

Σελίδα 734 / 1, 3, 10, 11

2. Να δείξετε αν' είδιας (χωρίς τη χρήση του σκετικού
διαριγμάτος ή την είφεν των διοσυναρτήσεων)

ότι οι διοσυναρτήσεις των παραπάνω προβλημάτων (S-L)
έχουν ορθογώνιες:

$$(a) y'' + \lambda(1+x)y = 0, \quad y(0) = y'(1) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$(b) xy'' + y' + \lambda xy = 0, \quad 0 < x < 1, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

3. Να βρεθούν οι διοσυναρτήσεις των γενικούμενων λύσεων
(S-L): $\{y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi)\}$.

4. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε τα παραπάνω
Π.Σ.Τ. (ορθογώνιες εργίσων, ως ορθογωνίες (Σ.Σ.))
να έχουν γονατιών όριση:

$$(a) y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

$$(b) y'' + 4y' + (4 + 9\lambda)y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(2) = 0$$

ΑΠΑΝ.

$$(a) \lambda = -k^2 < 0, \quad y = \frac{\sinh kx}{\sinh k}$$

$$\lambda = 0, \quad y = x$$

$$\lambda = k^2 > 0, \quad K \neq n\pi, \quad y = \frac{\sin kx}{\sin k}, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

$$(b) \lambda = -k^2 < 0, \quad y = e^{2x} \left[\frac{\sinh 3k(2-x)}{\sinh 6k} \right]$$

$$\lambda = 0, \quad y = \left(1 - \frac{x}{2}\right) e^{-2x}$$

$$\lambda = k^2 > 0, \quad K \neq \frac{n\pi}{6}, \quad y = e^{-2x} \left[\frac{\sin 3k(2-x)}{\sin 6k} \right], \quad n=1, 2, 3, \dots$$

ΦΥΛΛΑΡΔΙΟ 2° / B

ΣΚΗΝΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΤΙΣ Μ.Α.Ε Β ΣΤΑ ΠΡΟΒ. ΣΥΝ/ΚΩΝ ΤΙΜΩΝ ΙΡΘΡΩΝ ΜΑΤΑ ΣΥΝΟΡΙΑΚΩΝ ΤΙΜΩΝ:

. Για τα παρακάτω προβλήματα συνεργίας τιμών να δείξετε ότι:

(α) το $\{ y'' + qy = 0, 0 < x < \pi, y(0) = 1, y(\pi) = \beta \}$,
δεν έχει λύση αν $\beta \neq -1$.

(β) το $\{ y'' + 16y = 32x, 0 < x < \frac{\pi}{8}, y(0) = y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0 \}$
έχει φυλλαρδική λύση και να βρεθεί.

(γ) το $\{ y'' + \pi^2 y = ax, y(0) = y(1) = 0 \}$,
έχει απειρες λύσεις για $a = -\frac{1}{2}$.

. Αν $\Delta = |B_i(y_j)|$, $i, j = 1, 2$, $B_i(y_j) = a_{ij}y_j(a_i) + a_{ij}'y_j'(a_i)$
 $a_1 = \alpha, a_2 = \beta$, με χρήση των οριζόντων Δ διαπιστώστε
αν τα παρακάτω προβλήματα έχουν ή όχι λύση:

(y_j είναι γραμμικοί ανεξάρτητοι λύσεις των οριζόντων εργαλίων)

(α) $y'' + \lambda y = 0, y(0) = y(1) = 0, \lambda \in \mathbb{R}$,

(β) $y'' + y = 0, y(0) = 3, y(\pi) = -2$,

(γ) $y'' - y = 0, 3y(0) + y'(0) = 0, y(1) + y'(1) = 1$.

. Να τεθούν σε γραμμή Sturm (ανωνυμή γραμμή)
οι παρακάτω εξισώσεις;

(α) $x y'' + (1-x)y' + ky = 0, x > 0$ (Εξισώση Laguerre)
αν. $(x e^{-x} y')' + k e^{-x} y = 0$.

(β) $y'' - 2xy' + 2\lambda y = 0, -\infty < x < \infty$, (Εξισώση Hermite)
αν. $(e^{-x^2} y')' + 2\lambda e^{-x^2} y = 0$.

(γ) $x^2 y'' + xy' + (\lambda x^2 - n^2) y = 0, x > 0$,
αν. $(xy')' + \left(\lambda x - \frac{n^2}{x}\right) y = 0$.

4. Είναι τα σύνορα συμβόλων: $\{\sin vx\}_{v \in \mathbb{N}}^2$
 $\{\cos vx\}_{v \in \mathbb{N}}$, $0 < x < \pi$. Είναι ορθογώνια;
 Είναι μετονυμία; αν δεν είναι μετονυμοποιήσου.
 (Θεωρείστε συάρτηση βαρούς $r(x) = 1$, οπότε $(q, g) = \int_a^b q(x)g(x)$
 και $\|q\|_2 = \left(\int_a^b q(x)^2 dx \right)^{1/2}$).
 An. $\left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos vx \right\}, \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cos v \right\}$

5. Να βρεθούν τα μονογένη (διατίτη, διούνικα) λύσεις προβλημάτων Sturm-Liouville:
- (α) $x^2 y'' + 3xy' + \lambda y = 0$, $1 < x < e$, $y(1) = y(e) = 0$, (οριζόντια)
 an. $\lambda_v = 1 + v^2 \pi^2$, $q_v(x) = \sin(v\pi \ln x) x^{-1}$, $v \in \mathbb{N}^*$
- (β) $y'' - 3y' + \lambda y = 0$, $0 < x < \pi$, $y'(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$, (οριζόντια)
 an. $(0, 1)$ και $\left(v^2 + \frac{9}{4}, e^{3x/2} \left(\sin vx - \frac{2}{3} x \cos vx \right) \right)$
- (γ) $y'' + \lambda y = 0$, $-1 < x < 1$, $y(-1) = y(1)$, $y'(-1) = y'(1)$, $v = 1, 2, \dots$
 an. $\lambda_v = v^2 \pi^2$, $q_v(x) = \cos v \pi x$, $\Psi_v(x) = \sin v \pi x$ ($v \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$)
- (δ) $x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0$, $0 < x < 1$, $y(1) = 0$, (διάστολο)
 an. $\lambda > 0$, $q_\lambda(x) = \sin(\sqrt{\lambda} \ln x)$ γραφίνα μετά $x \rightarrow 0$
- (ε) $y'' + \lambda y = 0$, $0 < x < e$, $y'(e) = y(0) = 0$.

6. Να λυθούν τα προβλήματα γεωμετρικής Fredholm:
- (α) $x^2 y'' + xy' + 16\pi^4 y = \pi^2$, $1 < x < e^{\sqrt{\pi}}$
 $y'(1) = y'(e^{\sqrt{\pi}}) = 0$.
- (β) $y'' + \pi^2 y = x + a$, $0 < x < 1$, $y(0) = y(1) = 0$, $a \in \mathbb{R}$.
- (γ) $y'' - y' + \lambda y = e^{-x/2}$, $0 < x < 1$, $y(0) = y(1) = 0$,
 όπου $\lambda = \pi^2$, $\pi^2 + \frac{1}{4}$, $4\pi^2 + \frac{1}{4}$ (3 περιπτώσεις).