

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ,
21/10/2011

ZHTHMA 1. Έστω A_1, A_2, \dots, A_k ένα σύνολο προτασιακών μεταβλητών και έστω Σ το σύνολο των προτασιακών τύπων που περιέχουν ως προτασιακές μεταβλητές ακριβώς τις A_1, A_2, \dots, A_k . Δείξτε πως είναι δυνατόν σε κάθε $\phi \in \Sigma$ να αντιστοιχήσουμε μια συνάρτηση Boole k -θέσεων (ή αληθοπίνακα) B_ϕ που να πραγματοποιείται από τον ϕ . Αντιστρόφως, δείξτε ότι για κάθε συνάρτηση Boole k -θέσεων B υπάρχει $\phi \in \Sigma$ ώστε B να πραγματοποιείται από τον ϕ .

Εάν $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots$ είναι μια άπειρη ακολουθία προτασιακών τύπων του Σ έτσι ώστε για κάθε n να έχουμε $\phi_n \models \phi_{n+1}$ τότε δείξτε ότι υπάρχει N τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq N$ έχουμε $\phi_n \models \phi_{n+1}$ και $\phi_{n+1} \models \phi_n$.

ZHTHMA 2. α) Διατυπώστε και αποδείξτε το θεώρημα της μοναδικής αναγνωσιμότητας στον προτασιακό λογισμό.

Η έχφραση ($A_5 \rightarrow \Lambda A_3$), όπου A_5 και A_3 προτασιακές μεταβλητές, δεν είναι προτασιακός τύπος. Μπορείτε να αποδείξτε ότι δεν είναι προτασιακός τύπος;

β) Εξηγήστε γιατί μία θεωρία T του κατηγορηματικού λογισμού είναι συνεπής αν και μόνον αν $T \not\vdash \phi$ για ένα τουλάχιστο ϕ .

ZHTHMA 3. 1) Σε μια πρωτοβάθμια γλώσσα εξηγήστε πότε η εμφάνιση μιας μεταβλητής είναι δεσμευμένη και πότε ελεύθερη. Πότε μια μεταβλητή x στον τύπο ϕ είναι αντικαταστάσιμη από τον όρο t ; Δώστε ένα παράδειγμα στο οποίο η x δεν είναι αντικαταστάσιμη από τον όρο t στον τύπο ϕ και ο τύπος $\forall x \phi \rightarrow \phi(t/x)$ δεν είναι έγκυρος.

2) Θεωρήστε τη γλώσσα $\mathcal{L} = \{<, =\}$ (γλώσσα με ισότητα), δηλαδή $<$ είναι σύμβολο κατηγορήματος 2-θέσεων. Γράψτε δύο προτάσεις ϕ_1 και ϕ_2 της \mathcal{L} ώστε κάθε ερμηνεία A της \mathcal{L} που ικανοποιεί τις προτάσεις αυτές να είναι αυστηρή μερική διάταξη (δηλ. $\eta <^A$ είναι μη-αυτοπαθής και μεταβατική). Δώστε παραδείγματα πεπερασμένων και άπειρων μοντέλων του συνόλου $\{\phi_1, \phi_2\}$. Έστω $n \in \mathbb{N}$: γράψτε μια πρόταση ϕ , η οποία να περιέχει ως μη λογικό σύμβολο μόνον το $=$, έτσι ώστε κάθε ερμηνεία της \mathcal{L} που την ικανοποιεί να έχει τουλάχιστον n (το πλήθος) στοιχεία. Χρησιμοποιώντας κατάλληλα το θεώρημα της συμπάγειας αποδείξτε ότι δεν υπάρχει σύνολο προτάσεων Σ ώστε αν A είναι ερμηνεία της \mathcal{L} τότε

A μοντέλο του $\Sigma \Leftrightarrow A$ είναι πεπερασμένη αυστηρή μερική διάταξη.

ZHTHMA 4. Ξεκινήστε από μια συνεπή θεωρία T στη γλώσσα \mathcal{L} (χωρίς ισότητα). Θεωρήστε γνωστό ότι υπάρχει μια συνεπής επέκταση T_H η οποία είναι θεωρία Henkin. Επίσης ότι κάθε θεωρία Henkin έχει μοντέλο. Αποδείξτε ότι η θεωρία T έχει μοντέλο. Να αποδείξτε κάθε επιπλέον λήμμα που θα χρειαστείτε. Γιατί αν η θεωρία T έχει ένα αριθμήσιμο πλήθος μη λογικών συμβόλων τότε θα δέχεται ένα αριθμήσιμο μοντέλο;

ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΙΝΑΙ ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ