

**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**
ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ/2^ο Εξάμηνο

21-6-2004

ΘΕΜΑ 1^ο

Αν ο διανυσματικός χώρος V είναι Ευκλείδειος και $u, v \in V$, να αποδείξετε ότι:

- (α) $u \perp v \Leftrightarrow \|u + v\| = \|u - v\|$
- (β) $(u - v) \perp (u + v) \Leftrightarrow \|u\| = \|v\|$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω V Ορθομοναδιαίος χώρος και $f: V \rightarrow V$ Ερμιτιανός γραμμικός μετασχηματισμός. Να αποδείξετε ότι :

- (α) ο f έχει πραγματικές ιδιοτιμές και
- (β) αν $u, v \in V$ είναι ιδιοδιανύσματα του f αντίστοιχα των ιδιοτιμών λ, μ με $\lambda \neq \mu$, τότε $u \perp v$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2-a & a & a-3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R}.$$

- (ι) Να βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες ο πίνακας A διαγωνοποιείται.
- (ii) Για τις τιμές του a που ο πίνακας A δεν διαγωνοποιείται, να βρείτε την κανονική μορφή Jordan αυτού.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 4^ο

(α) Χρησιμοποιώντας κατάλληλο γραμμικό μετασχηματισμό να βρείτε το είδος της επιφάνειας που έχει εξίσωση

$$3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 16 = 0,$$

ως προς το Καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $Oxyz$.

Μονάδες 2

(β) Αν A είναι ορθογώνιος 3×3 πίνακας και $\chi_A(\lambda)$ το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο, να αποδείξετε ότι

$$\chi_A(\lambda) = -\lambda^3 (\det A) \chi_A(\lambda^{-1}), \quad \text{για κάθε } \lambda = 0$$

Μονάδες 1.5

ΘΕΜΑ 5^ο

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Με τη θεωρία των χαρακτηριστικών μεγεθών να αποδείξετε ότι:

(α) $A^2 = 3A - 2I$, $A^3 = 7A - 6I$ και $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A)$.

Μονάδες 2

(β) $A^k = (2^k - 1)A - (2^k - 2)I$, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και λαμβάνοντας υπόψη την
ισότητα

$$e^A = I + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots + \frac{1}{v!}A^v + \dots,$$

να αποδείξετε ότι

$$e^A = (e^2 - e)A - (e^2 - 2e)I$$

Μονάδες 1,5

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Καλή επιτυχία