

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ
ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗ
ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

27-9-2004

ΘΕΜΑ 1^ο

(A) Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A , να αποδείξετε ότι:

- Ο αριθμός $\kappa\lambda$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα κA , $\kappa \in \mathbb{R}$,
- Ο αριθμός $\kappa + \lambda$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα $\kappa I + A$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 1

(B) Να αποδείξετε ότι όμοιοι πίνακες έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

Μονάδες 1

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a & -1 \\ -2 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a, \beta \in \mathbb{R}..$$

Αν είναι γνωστό ότι ο αριθμός $\lambda = 1$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A με αλγεβρική πολλαπλότητα 2, τότε :

(i) να αποδείξετε ότι $a = 1$ και

Μονάδες 1

(ii) να βρείτε την κανονική μορφή Jordan του πίνακα A , για τις διάφορες τιμές του $\beta \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 3^ο

(A) Αν ο πίνακας $P \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ είναι τέτοιος ώστε $P^T P = [1]$, να αποδείξετε ότι ο $n \times n$ πίνακας $H = I_n - 2PP^T$ είναι συμμετρικός και ορθογώνιος.

Μονάδες 1

(B) Έστω οι πίνακες $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}^T$ και $H = I_3 - 2PP^T$.

(α) Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα τους για τον πίνακα H .

Μονάδες 1,5

(β) Προσδιορίστε ορθογώνιο πίνακα S ο οποίος διαγωνοποιεί τον πίνακα H .

Μονάδες 1

(γ) Προσδιορίστε τις τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ο πίνακας $H_\kappa = \kappa I_3 - 2PP^T$ είναι θετικά-ορισμένος.

Μονάδες 1,5

(δ) Να βρείτε το είδος της καμπύλης που ορίζεται από την εξίσωση

$$M\Omega M^T = 0,$$

αν είναι $M = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}$ και $\Omega = 9H_{\kappa/9}$, για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5