

1ο φυλλάδιο ασκήσεων.

Άσκηση 1. Δίνεται η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^n, & \text{αν } x \in [0, 1 - \frac{1}{n}] \\ 2^n, & \text{αν } x \in (1 - \frac{1}{n}, 1). \end{cases}$$

Δείξτε ότι η $(f_n)_n$ συγκλίνει σημειακά στη σταθερή $f(x) = 0$ συνάρτηση, αλλά όχι ομοιόμορφα.

Τπόδειξη: Για τη σημειωκή σύγκλιση, παρατηρήστε ότι για κάθε $x \in [0, 1)$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$, ώστε $x > 1 - \frac{1}{n}$. Για την ομοιόμορφη σύγκλιση, υπολογίστε το $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0, 1]\}$.

Άσκηση 2. Έστω $\emptyset \neq X = \{x_1, \dots, x_k\} \subset \mathbb{R}$ πεπερασμένο και $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$
Δείξτε ότι η $(f_n)_n$ συγκλίνει κατά σημείο στην f αν και μόνο αν συγκλίνει ομοιόμορφα.

Τπόδειξη: Δείξτε το πρώτα για $k = 1$ και $k = 2$ και κατόπιν γενικεύστε.

Άσκηση 3. Εξετάστε ως προς τη σημειωκή και ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων:

- (1) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n}$,
- (2) $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{1-x^n}{1+x^n}$.

Τπόδειξη: Για το (2) παρατηρήστε ότι η οριακή συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Άσκηση 4. Αφού δώσετε τον ορισμό της σημειωτής και της ομοιόμορφης σύγκλισης ακολουθίας συναρτήσεων εξετάστε τις παρακάτω ακολουθίες ως προς τα δύο είδη σύγκλισης:

- (1) $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f_n(x) = \frac{1}{nx+1}$.
- (2) $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f_n(x) = \frac{x^2}{x^2 + (1-nx)^2}$.

Τπόδειξη: Για την ομοιόμορφη σύγκλιση στο (2), υπολογίστε το $f_n(x_n)$ όπου $x_n = \frac{1}{n}$.

Άσκηση 5. Δείξτε ότι αν $(f_n)_n$ είναι μια ακολουθία αυξουσών συναρτήσεων που συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνάρτηση f , τότε και η f θα είναι αύξουσα.

Άσκηση 6.* Έστω $f, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$, συνεχείς συναρτήσεις, και $x_0 \in X$, $(x_n)_n$ ακολουθία στο X ώστε $x_n \rightarrow x_0 \in X$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι η $(f_n)_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο X . Δείξτε ότι $f_n(x_n) \rightarrow f(x_0)$. Ισχύει το παραπάνω για σημειωτή σύγκλιση;

Τπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $|f(x_0) - f_n(x_n)| \leq |f(x_0) - f(x_n)| + |f(x_n) - f_n(x_n)|$.

Άσκηση 7. Έστω $f, g, f_n, g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}$, ώστε οι ακολουθίες $(f_n)_n, (g_n)_n$ να συγκλίνουν ομοιόμορφα αντίστοιχα στις f, g . Δείξτε ότι η ακολουθία $(f_n + g_n)_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f + g$.

Άσκηση 8. Εξετάστε ως πρός τη σημειωτή και την ομοιόμορφη σύγκλιση την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, με $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$.

Άσκηση 9. Έστω $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, με $(f_n)_n$ να συγκλίνει ομοιόμορφα στην f . Υποθέτουμε ότι κάθε f_n είναι φραγμένη συνάρτηση, δηλαδή

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists M_n > 0 : \sup\{|f(x)| : x \in X\} \leq M_n.$$

Δείξτε ότι και η f θα είναι φραγμένη συνάρτηση.

Άσκηση 10.** Έστω $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, κατά σημείο φραγμένη ακολουθία συναρτήσεων, δηλαδή,

$$\forall x \in A, \exists M_x \geq 0, \forall n \in \mathbb{N} : |f_n(x)| \leq M_x.$$

Δείξτε ότι αν το A είναι πεπερασμένο, τότε υπάρχει υπακολουθία $(f_{k_n})_n$ της $(f_n)_n$ και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε η $(f_n)_n$ να συγκλίνει κατά σημείο στην f .

Τρόδειξη: Χρησιμοποιείστε το γεγονός ότι κάθε φραγμένη ακολουθία στο \mathbb{R} έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, και επαγωγή στην πληθυκότητα του A .