

3. Αρκτίγεια Ανάλυσης I  
(ΙΝΝΕΞΙΑ ΙΝΑΡΤΗΣΕΩΝ)

1) Εστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνάρτηση με  $f(x)$  αρρενος για κάθε  $x \in X$ . Δείτε ότι  $f$  είναι σταθερή.

2) (i) Εστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνάρτηση με  $f(x) = 0$ , για κάθε  $x$  πντό. Δείτε ότι  $f(x) = 0$ . για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

(ii) Εστω  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνάρτηση με  $f(x) = g(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . κάθε  $x$  πντό. Δείτε ότι  $f(x) = g(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

3) Εστω  $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  συνάρτηση με  $f(x) > g(x)$ , για κάθε  $x \in [a, b]$ . Δείτε ότι υπάρχει  $\delta > 0$  για κάθε  $x \in [a, b]$ . ώστε  $f(x) \geq g(x) + \delta$ , για κάθε  $x \in [a, b]$ .

4) Εστω  $f: (0, 1) \cup (1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = 1$ , όταν  $x \in (0, 1)$  και  $f(x) = 2$ , όταν  $x \in (1, 2)$ . Είναι  $f$  συνάρτηση;  
 Είναι  $f$  ομοιομορφή συνάρτηση;

5) Εστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{όταν } x \text{ πντός} \\ 0, & \text{όταν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

Δείτε ότι  $f$  είναι συνάρτηση μόνο στο  $x_0 = 0$ .

\* 6) Εστω  $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$  το αντίστοιχο των πντών αριθμών.

Ορίστε  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{όταν } x = q_n \\ 0, & \text{όταν } x \text{ άρρητος} \end{cases}$$

Δείτε ότι  $f$  είναι συνάρτηση σε κάθε άρρητο λόγο  
 συνάρτηση σε κάθε πντό.

- 7) Εστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνάρτηση και  $\phi \neq X \subseteq \mathbb{R}$ , ώστε  
 Το  $X$  να είναι φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ .  
 Δείτε οι ο περιορισμός της  $f$  στο  $X$ ,  $f|_X$ , είναι  
 ομοιόμορφη συνάρτηση.
- 8) Δείτε οι ο παρακάτω συναρτήσεις δεν είναι ομοιόμορφη  
 συνάρτηση:  
 (i)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$  (ii)  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$   
 (iii)  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$
- 9) Δείτε οι η συνάρτηση  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \sqrt{x}$   
 είναι ομοιόμορφη συνάρτηση και δεν είναι Lipschitz.
- 10) Εστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ομοιόμορφη συνάρτηση. Δείτε οι  
 υπάρχει  $M > 0$  ώστε  $|f(x+1) - f(x)| \leq M$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- 11) Εστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  αριθμητική και  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Δείτε  
 οι τα παρακάτω είναι λεζάντα:  
 (i) Η  $f$  είναι συνάρτηση στο  $x_0$ .  
 (ii)  $\sup \{f(x): x < x_0\} = \inf \{f(x): x > x_0\}$ .
- 12) Εστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνάρτηση και 1-L. Δείτε οι η αντιστροφή<sup>\*</sup>  
 είναι γνησιώδης μονότονη.
- \* 13) Εστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνάρτηση και 1-L. Δείτε οι η αντιστροφή<sup>\*</sup>  
 $f^{-1}$  της  $f$  είναι συνάρτηση.
- \* 14) Εστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μονότονη. Δείτε οι το σύνολο των  
 συντεταγμένων συνάρτησης  $f$  είναι αριθμητικό.