

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ «ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ II & ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ»
Σ.Ε.Μ.Φ.Ε.
06/2017(Πτυχιακή)

Θέμα 1 (2 βαθμοί): (α) Για την άμεση μέθοδο του Euler, $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ να ορίσετε το τοπικό σφάλμα διακριτοποίησης (truncation error) T_n και να αποδείξετε ότι $|T_n| \leq T = \frac{1}{2} h \max_{a \leq x \leq b} |y''(x)|, n = 0, \dots, N-1$. Υποθέστε ότι η λύση y είναι ομαλή.

(β) Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών στο $[0,1]$:

$$y' = \frac{1}{8}y + (1 - \frac{9}{8}x)e^{-x}$$

$$y(0) = 0$$

Ο τύπος του σφάλματος για την άμεση μέθοδο του Euler είναι:

$$|e_n| \leq \frac{T}{L} (e^{L(x_n - x_0)} - 1), n = 0, \dots, N, \text{ όπου } L \text{ είναι η σταθερά Lipschitz της } f \text{ ως προς } y.$$

Να υπολογιστεί το βήμα h για είναι το σφάλμα στο $x_N=1$ να είναι μικρότερο από 10^{-4} . Δίνεται $y(x) = xe^{-x}$. Το βήμα είναι ομοιόμορφο.

Θέμα 2 (3 βαθμοί): (α) Να εξετάσετε τις ακόλουθες πολυβηματικές μεθόδους ως προς τη μηδενική ευστάθεια και σύγκλιση:

$$(1) y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12} (23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2})$$

$$(2) 3y_{n+2} - 4y_{n+1} + y_n = 2hf_{n+2}$$

Υπενθύμιση: Συμβολίζουμε με $f_i = f(x_i, y_i)$.

(β) Τα υπολογίσετε την τάξη ακρίβειας της (2).

(γ) Μπορείτε να κατασκευάσετε μία 4-βηματική μέθοδο με τάξη ακρίβειας 7; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Θέμα 3 (3 βαθμοί) : (α) Να εξεταστεί αν υπάρχουν τιμές της παραμέτρου a , ώστε η μέθοδος

$$y_{n+1} - ay_n = \frac{h}{2} (f_{n+1} + af_n)$$

να είναι συγκλίνουσα και να έχει τάξη ακρίβειας 2.

(β) Στη συνέχεια να μελετήσετε την μέθοδο (α) ως προς την απόλυτη ευστάθεια.

Υπενθύμιση: Συμβολίζουμε με $f_i = f(x_i, y_i)$. Μπορείται να θεωρήσετε τη συνάρτηση $f(x,y)$ Lipschitz και τη αρχική συνθήκη κατάλληλα επιλεγμένη.

(γ) Για τιμή της παραμέτρου $\alpha = 1$, να εκτελέσετε δύο επαναλήψεις της μεθόδου του τραπεζιού για το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y'(x) = y^2, y(0) = 1$$

για τον υπολογισμό μιας προσεγγιστικής τιμής στο 0.2. Για την επίλυση της μη-γραμμικής εξίσωσης χρησιμοποιείτε δύο επαναλήψεις της μεθόδου Newton-Raphson.

$$\text{Raphson: } (x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}, x_0 \text{ γνωστό}).$$

Θέμα 4 (1,5 βαθμοί): (α) Να ορίσετε την ασθενή λύση (λύση μεθόδου Galerkin) για το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$-\frac{d}{dx} \left(e^x \frac{d}{dx} u(x) \right) + e^x u(x) = 1 + x$$

$$u(0) = 0, u(1) = e^{-1}$$

(β) Για το πρόβλημα συνοριακών τιμών (με κατάλληλες υποθέσεις για τα δεδομένα $p(x), r(x), f(x)$)

$$-\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} u(x) \right) + r(x)u(x) = f(x)$$

$$u(a) = A, u(b) = B$$

η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (Galerkin) όταν εφαρμόζεται με γραμμικές κατά τμήματα βασικές συναρτήσεις (τύπου στέγη) ικανοποιεί την εκτίμηση σφάλματος:

$$\|u - u^h\|_A \leq \frac{h}{\pi} \left\{ \max_{a \leq x \leq b} p(x) + \frac{h^2}{\pi^2} \max_{a \leq x \leq b} r(x) \right\}^{1/2} \|u''(x)\|_{L^2(a,b)}$$

$$\text{όπου } \|f\|_{L^2(a,b)} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Να υπολογίσετε το βήμα h (ομοιόμορφη διαμέριση) ώστε το σφάλμα να ικανοποιεί τη σχέση $\|u - u^h\|_A \leq 10^{-2}$ για το πρόβλημα του ερωτήματος (α). Δίνεται $u(x) = xe^{-x}$.

Διάρκεια εξέτασης: 2 & 1/2 ώρες.

Καλή επιτυχία.