Ηλεκτρομαγνητισμός

1) ΗΛΕΚΤΡΟΣΤΑΤΙΚΗ

Ο διαφορικός διανυσματικός τελεστής ανάδελτα:

$$\boxed{\vec{\nabla} = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}}$$

Κλίση ή βαθμίδα βαθμωτής συνάρτησης:
Όταν ο τελεστής ανάδελτα δρα σε **βαθμωτή** συνάρτηση ονομάζεται **κλίση** ή **βαθμίδα**:

$$\boxed{gradV = \vec{\nabla}V = \hat{x}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial V}{\partial z}}$$

Απόκλιση διανυσματικής συνάρτησης:

Όταν ο τελεστής ανάδελτα δρα σε **διανυσματική** συνάρτηση ως **εσωτερικό γινόμενο**ονομάζεται **απόκλιση**:

$$div\vec{E} = \vec{\nabla}\vec{E} = \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\hat{x}E_x + \hat{y}E_y + \hat{z}E_z\right)$$

ή κάνοντας τις πράξεις

$$\boxed{div\vec{E} = \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}}$$

Στροβιλισμός διανυσματικής συνάρτησης:

Όταν ο τελεστής ανάδελτα δρα σε **διανυσματική** συνάρτηση ως **εξωτερικό γινόμενο**ονομάζεται **στροβιλισμός**:

$$\boxed{curl\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}}$$

Αν υπολογίσουμε την ορίζουσα παίρνουμε

$$\boxed{curl\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = \hat{x}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x}\right)}$$

Θεώρημα Gauss:

Το ολοκλήρωμα της απόκλισης ενός διανυσματικού πεδίου πάνω σε έναν τυχόντα όγκο *V* ισούται με το επιφανειακό ολοκλήρωμα του πεδίου πάνω στην κλειστή επιφάνεια *S* που περικλείει αυτόν τον όγκο:

$$\boxed{\int_V \vec{\nabla}\vec{A}dV = \oint_S \vec{A}d\vec{S}}$$

Παρατηρούμε ότι το ‘‘ολοκλήρωμα’’ της ‘’παραγώγου’’ της διανυσματικής συνάρτησης *A* ισούται με τις ‘’τιμές’’ της ‘’παραγωγιζόμενης’’ συνάρτησης *A* στο σύνορο *S* της περιοχής ολοκλήρωσης *V*(από ολοκλήρωμα σε τρεις διατάσεις πάμε σε ολοκλήρωμα δύο διαστάσεων).

Θεώρημα Stokes:

Το επιφανειακό ολκλήρωμα του στροβιλισμού ενός διανυσματικού πεδίου πάνω σε μια τυχούσα επιφάνεια S ισούται με το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του πεδίου πάνω στην κλειστή γραμμή C στην οποία καταλήγει η επιφάνεια:

$$\boxed{\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) d\vec{S} = \oint_C \vec{A} d\vec{l}}$$

Παρατηρούμε ότι το ‘‘ολοκλήρωμα’’ της ‘’παραγώγου’’ της συνάρτησης *A* ισούται με τις ‘’τιμές’’ της ‘’παραγωγιζόμενης’’ συνάρτησης *A* στο σύνορο *C* της περιοχής ολοκλήρωσης (από ολοκλήρωμα δύο διαστάσεων πάμε σε ολοκλήρωμα μιας διάστασης).
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Τα θεωρήματα Gauss και Stokes θυμίζουν το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού

$$\int_a^b f' dx = f(b) - f(a)$$

όπου το ολοκλήρωμα της παραγώγου μιας συνάρτησης ισούται με τις τιμές της παραγωγιζόμενης συνάρτησης στα όρια της ολοκλήρωσης
(στο σύνορο του διαστήματος ολοκλήρωσης). Εδώ από ολοκλήρωμα σε μια διάσταση πάμε σε ένα σημείο (μηδέν διαστάσεις)

Τελεστής Laplace (ή λαπλασιανή):

Είναι το εσωτερικό γινόμενο του ανάδελτα με τον εαυτό του:

$$\boxed{\vec{\nabla}^2 = \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$$

Νόμος Coulomb

(δύναμη μεταξύ δύο σημειακών φορτίων)

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 \cdot q_2}{r^3}\vec{r}$$

Ένταση ηλεκτρικού πεδίου

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Ένταση ηλεκτρικού πεδίου σε απόσταση *r* από σημειακό φορτίο *dq*

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{r}$$

Δυναμικό ηλεκτρικού πεδίου σε απόσταση *r* από σημειακό φορτίο *dq*

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$$

Σχέση έντασης - διαφοράς δυναμικού

$$\boxed{V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}d\vec{l}}$$

Ή

$$\boxed{V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}d\vec{l}}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις προκύπτουν από τον ορισμό της διαφοράς δυναμικού

$$V_A - V_B = \frac{W^{A\to B}}{q} = \frac{\int_A^B \vec{F}d\vec{l}}{q}$$

όπου

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Επίσης ισχύει:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

Και

$$d\vec{l} = \hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz$$

οπότε

$$dV = \left(\hat{x}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)\left(\hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz\right) \Rightarrow$$

$$dV = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{l}$$

και ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{\nabla} V \cdot d\vec{l}$$

Συγκρίνοντας την τελευταία εξίσωση με την

$$V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} d\vec{l}$$

προκύπτει ότι

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -gradV$$

<u>Συνθήκη για αστρόβιλο ή συντηρητικό πεδίο</u>
(ηλεκτροστατικό πεδίο)

Το έργο του ηλεκτροστατικού πεδίου για τη μεταφορά φορτίου σε μια κλειστή διαδρομή είναι μηδέν ή το έργο για τη μεταφορά φορτίου μεταξύ δύο σημείων του πεδίου είναι ανεξάρτητο της διαδρομής
ή το ηλεκτροστατικό πεδίο δεν σχηματίζει στροβίλους

$$\kappa\upsilon\kappa\lambda o\varphi o\rho\acute{\iota}\alpha = \oint_C \vec{E} d\vec{l} = 0 \text{ (ολοκληρωτική μορφή)}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Stokes

$$\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) d\vec{S} = \oint_C \vec{E} d\vec{l} = 0$$

εφόσον η ολοκλήρωση γίνεται σε τυχούσα επιφάνεια θα ισχύει η διαφορική μορφή

$$curl\vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Ηλεκτρική Ροή

$$\Phi = \int_S \vec{E} d\vec{S} = \int_S \vec{E} \hat{u}_N dS$$

όπου *u*N το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην επιφάνεια *S*.

Νόμος Gauss

Η **ροή** του ηλεκτρικού πεδίου μέσω μιας τυχούσας κλειστής επιφάνειας είναι **ανάλογη του φορτίου που περιέχεται μέσα στην κλειστή επιφάνεια**

$$\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

Αυτή είναι η **ολοκληρωτική** μορφή του νόμου Gauss.
Έστω *ρ(**r**)* η πυκνότητα φορτίου στον χώρο, τότε το φορτίο που περιέχεται στην κλειστή επιφάνεια *S* είναι:

$$Q_{in} = \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

Οπότε

$$\int_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} dV$$

Από το θεώρημα Gauss έχουμε

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla} \vec{E} dV$$

οπότε θα ισχύει

$$\int_V \vec{\nabla}\vec{E}dV = \int_V \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}dV$$

και εφόσον η ολοκλήρωση γίνεται σε τυχαίο όγκο *V*, οι συναρτήσεις που ολοκληρώνονται θα είναι ίσες:

$$div\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Αυτή είναι η **διαφορική** μορφή του νόμου Gauss.

Πυκνότητα φορτίου συναρτήσει της έντασης

$$\rho(\vec{r}) = \varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$$

Δυναμική ενέργεια δυο σημειακών φορτίων

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

Δυναμική ενέργεια συστήματος σημειακών φορτίων

$$U = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\k=1\\i\neq k}}^{N} q_i \frac{q_k}{4\pi\varepsilon_0 r_{ik}} \Rightarrow U = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\k=1\\i\neq k}}^{N} q_i V_{ik}$$

όπου *Vik* το δυναμικό στη θέση του φορτίου *qi* που οφείλεται σε όλα τα υπόλοιπα φορτία.

Δυναμική ενέργεια κατανομής φορτίων

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{all\ space} E^2 dV$$

(η ολοκλήρωση γίνεται παντού σε όλο το χώρο που υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο)

Εξίσωση δυναμικών γραμμών

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}$$

Ισοδυναμικές επιφάνειες

$$V(\vec{r}) = V(x, y, z) = c$$

όπου *c* σταθερά.
Η βαθμίδα του δυναμικού

$$gradV \equiv \vec{\nabla} V$$

είναι ένα διάνυσμα κάθετο στις ισοδυναμικές επιφάνειες και τούτο διότι

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz =$$
$$= \left(\hat{x}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial V}{\partial z} \right)\left(\hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz \right)$$
$$\Rightarrow dV = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r}$$

και εφόσον *V*=σταθερό

$$dV = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} V \perp d\vec{r}$$

όμως ισχύει

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

οπότε **η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι κάθετη στις ισοδυναμικές επιφάνειες ή οι δυναμικές γραμμές του πεδίου είναι κάθετες στις ισοδυναμικές επιφάνειες**.

Ιδιότητες αγωγών

1.Το φορτίο στους αγωγούς κατανέμεται στην επιφάνειά τους.
2. Στο εσωτερικό των αγωγών η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου είναι μηδέν και το δυναμικό σταθερό
3. Στην επιφάνεια ενός αγωγού ισχύει:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{u}_N$$

όπου *u**N*** το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια του αγωγού.

4. Χωρητικότητα αγωγού:

$$C = \frac{Q}{V}$$

όπου *Q* το φορτίο και *V* το δυναμικό του αγωγού.

Πυκνωτές

1. πυκνωτής είναι σύστημα δύο αγωγών φορτισμένων με αντίθετα φορτία

2. Χωρητικότητα πυκνωτή

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

όπου *ΔV* η διαφορά δυναμικού των δυο αγωγών.

3. Ενέργεια πυκνωτή

$$U = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

Εξίσωση Poisson

$$\vec{\nabla}^2 V = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Εξίσωση Laplace

$$\vec{\nabla}^2 V = 0$$

2) ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΡΕΥΜΑΤΑ

Ένταση ηλεκτρικού ρεύματος

$$\boxed{I = \frac{dQ}{dt}}$$

Είναι ο ρυθμός διέλευσης φορτίου μέσα από μια επιφάνεια ανά μονάδα χρόνου. Έστω ότι έχουμε ένα ρεύμα φορτισμένων σωματιδίων που κινούνται με μέση ταχύτητα ***υ***. Τα σωματίδια που διέρχονται μέσα από μέσα από στοιχειώδη επιφάνεια σε χρονικό διάστημα ***dt*** θα είναι:

$$n\,\vec{\upsilon}\,dt\,d\vec{S}$$

όπου ***n*** η πυκνότητα των φορτισμένων σωματιδίων. Αν ***q*** το φορτίο που φέρει το κάθε σωματίδιο τότε:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{q\,n\,\vec{\upsilon}\,dt\,d\vec{S}}{dt} = n\,q\,\vec{\upsilon}\,d\vec{S}$$

Πυκνότητα ρεύματος:

$$\vec{j} = nq\vec{\upsilon}$$

Είναι το φορτίο που διέρχεται μέσα από μια μοναδιαία επιφάνεια ανά μονάδα χρόνου.

Σχέση έντασης και πυκνότητας ρεύματος:

Το ολικό φορτίο που διέρχεται μέσα από μια επιφάνεια *S* ανά μονάδα χρόνου (δηλ. η ένταση του ηλεκτρικού ρεύματος) θα είναι:

$$I = \int_S \vec{j}\, d\vec{S}$$

Με άλλα λόγια το ηλεκτρικό ρεύμα μέσα από κάποια επιφάνεια ισούται με τη ροή της ηλεκτρικής πυκνότητας ρεύματος μέσα από την επιφάνεια.

Εξίσωση συνέχειας:

Η ποσότητα

$$\int_S \vec{j}\, d\vec{S}$$

είναι ο στιγμιαίος ρυθμός με τον οποίο το φορτίο εγκαταλείπει τον περικλειόμενο χώρο από την επιφάνεια *S* . Το συνολικό φορτίο μέσα σε αυτό το χώρο κάθε στιγμή θα είναι:

$$\int_V \rho\, dV$$

όπου ***ρ*** η πυκνότητα φορτίου. Έτσι σε κάθε χρονική στιγμή θα ισχύει:

$$\int_S \vec{j}\, d\vec{S} = -\frac{d\left(\int_V \rho dV\right)}{dt} = \int_V \left(-\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) dV$$

Όμως σύμφωνα με το θεώρημα Gauss:

$$\int_S \vec{j}\, d\vec{S} = \int_V \vec{\nabla}\vec{j}\, dV$$

και συγκρίνοντας τις δύο τελευταίες εξισώσεις προκύπτει:

$$\boxed{\vec{\nabla}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

που είναι **η εξίσωση συνέχειας και εκφράζει την αρχή διατήρησης του φορτίου**.

<u>Νόμος Ohm</u>(γενικευμένος):

$$\boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}}$$

όπου ***E*** η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και ***σ*** η ηλεκτρική αγωγιμότητα, μια σταθερά που χαρακτηρίζει το υλικό.

Νόμος Ohm - Αντισταση αγωγού:

Έστω ένα πρισματικός αγωγός μήκους ***L*** με σταθερό εμβαδόν διατομής ***S***. Στα άκρα του εφαρμόζεται διαφορά δυναμικού ***V***. Θα ισχύουν σύμφωνα με τα προηγούμενα:

$$I = jS = \sigma ES$$

Όμως

$$E = \frac{V}{L}$$

οπότε:

$$I = \frac{\sigma SV}{L} = \frac{V}{\frac{L}{\sigma S}} = \frac{V}{R}$$

που είναι ο γνωστός μας νόμος Ohm, με

$$R = \frac{L}{\sigma S} = \rho \frac{L}{S}$$

την αντίσταση του αγωγού. Βλέπουμε ότι η ηλεκτρική αγωγιμότητα συνδέεται με την ειδική αντίσταση μέσω της σχέσης:

$$\sigma = 1/\rho$$

Η ηλεκτρική αντίσταση ορίζεται από την εξίσωση :

$$R = \frac{V}{I}$$

Ηλεκτρεγερτική δύναμη:

Είναι το έργο του ηλεκτρικού πεδίου (μη συντηρητικού) κατά τη μεταφορά ενός φορτίου σε μια κλειστή διαδρομή:

$$\text{Η.Ε.Δ.} = \frac{W}{q} = \frac{\oint_C \vec{F} d\vec{l}}{q} = \oint_C \vec{E} d\vec{l}$$

ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ – ΕΠΑΓΩΓΗ

Δύναμη Lorentz:

$$\vec{F} = q\vec{\upsilon} \times \vec{B} + \vec{E}q$$

Δύναμη Laplace:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

Είναι η δύναμη που ασκείται από μαγνητικό πεδίο σε στοιχειώδες τμήμα ***dl*** ενός αγωγού που διαρρέεται από ρεύμα ***I***.
Η συνολική δύναμη υπολογίζεται με ολοκλήρωση σε όλο το μήκος του αγωγού:

$$\vec{F} = \int_l I d\vec{l} \times \vec{B}$$

Νόμος Biot - Savart:

Υπολογίζει την ένταση του μαγνητικού πεδίου που δημιουργεί στοιχειώδες τμήμα ***dl*** ενός αγωγού
που διαρρέεται από ρεύμα ***I*** σε απόσταση ***r*** από το στοιχειώδες τμήμα:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$$

Νόμος Ampere:

Η κυκλοφορία του μαγνητικού πεδίου κατά μήκος μιας τυχούσας κλειστής γραμμής, είναι ανάλογη με το ηλεκτρικό ρεύμα το οποίο διαπερνά μια επιφάνεια που καταλήγει στην κλειστή γραμμή:

$$\int_C \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 I_{in}$$

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί την **ολοκληρωτική** μορφή του νόμου Ampere.
Σύμφωνα με το θεώρημα του Stokes έχουμε

$$\int_C \vec{B}d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla}\vec{B}d\vec{S}$$

ενώ η σχέση έντασης - πυκνότητας ρεύματος είναι

$$I_{in} = \int_S \vec{j}d\vec{S}$$

Από τις δυο τελευταίες εξισώσεις προκύπτει

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}$$

Η τελευταία εξίσωση αποτελεί τη διαφορική μορφή του νόμου Ampere.

Μαγνητική ροή:

$$\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$$

Νόμος Gauss για το μαγνητικό πεδίο:

Για οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια ισχύει:

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

ή χρησιμοποιώντας το θεώρημα Gauss

$$\vec{\nabla}\vec{B} = 0$$

Οι εξισώσεις αυτές εκφράζουν το γεγονός ότι **δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα**.

Διανυσματικό δυναμικό:

Ορίζεται μέσω της εξίσωσης

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Χρησιμοποιώντας το νόμο του Ampere έχουμε:

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) = \mu_0 \vec{j}$$

Θα εφαρμόσουμε την ταυτότητα

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\vec{A}\right)-\vec{\nabla}^2\vec{A}$$

Αποδεικνύεται ότι μπορούμε να επιλέξουμε έτσι το δυναμικό ώστε:

$$\vec{\nabla}\vec{A}=0$$

οπότε θα ισχύει:

$$\boxed{\vec{\nabla}^2\vec{A}=-\mu_0\vec{j}}$$

Ενέργεια μαγνητικού πεδίου:

$$\boxed{W_B=\frac{1}{2\mu_0}\int_{all\,space}B^2dV}$$

Νόμος Faraday:

Σε ένα κύκλωμα αναπτύσσεται Η.Ε.Δ. από επαγωγή όταν μεταβάλλεται η μαγνητική ροή που διέρχεται μέσα από αυτό:

$$\boxed{E_{\varepsilon\pi}=-\frac{d\Phi}{dt}}$$

ή ισοδύναμα

$$\oint_C\vec{E}d\vec{l}=-\frac{d\left(\int_S\vec{B}d\vec{S}\right)}{dt}=\int_S\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)d\vec{S}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Stokes θα ισχύει:

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} d\vec{S}$$

και συγκρίνοντας με την προηγούμενη εξίσωση προκύπτει η διαφορική μορφή του νόμου Faraday:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Συντελεστής αυτεπαγωγής:

Είναι ο λόγος της ολικής μαγνητικής ροής που διασχίζει το κύκλωμα προς το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα:

$$\boxed{L = \frac{\Phi}{I}}$$

Συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής:

Θεωρούμε δύο γειτονικά κυκλώματα (1) και (2). Έστω ότι μεταβάλλεται η ένταση του ρεύματος στο κύκλωμα (1). Τότε μεταβάλλεται η μαγνητική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια του κυκλώματος (2) και δημιουργείται επαγωγικό ρεύμα ***I2***. Ορίζουμε ως συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής:

$$\boxed{M_{1,2} = \frac{\Phi_{1,2}}{I_2}}$$

όπου ***Φ12*** η μαγνητική ροή που δημιουργείται από το κύκλωμα (1) και διασχίζει το κύκλωμα (2). Αντίστοιχα έχουμε:

$$\boxed{M_{2,1} = \frac{\Phi_{2,1}}{I_1}}$$

Αποδεικνύεται ότι

$$\boxed{M_{1,2} = M_{2,1} = M}$$

Νόμος Ampere - Maxwell:

Ο νόμος Ampere συσχετίζει ένα σταθερό ρεύμα με το μαγνητικό πεδίο που παράγει. Ο νόμος Ampere – Maxwell προχωράει πιο πέρα και υποδεικνύει ότι στο μαγνητικό πεδίο συνεισφέρει και το μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο:

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{in} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Όπου

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} d\vec{S}$$

η ηλεκτρική ροή που διασχίζει την επιφάνεια ***S*** της οποίας το όριο είναι η καμπύλη ***C***. Χρησιμοποιώντας την σχέση έντασης και πυκνότητας ρεύματος:

$$I_{in} = \int_S \vec{j} d\vec{S}$$

η αρχική εξίσωση γίνεται

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \int_S \mu_0 \vec{j} d\vec{S} + \int_S \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Stokes θα ισχύει

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ή

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \vec{j}_d$$

όπου

$$\vec{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

η **πυκνότητα ρεύματος μετατόπισης**.

<u>1η εξίσωση Maxwell:</u> (νόμος Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο)

$$\boxed{\Phi = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}}$$

Ή

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

2η εξίσωση Maxwell: (νόμος Gauss για το μαγνητικό πεδίο)

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

Ή

$$\vec{\nabla} \vec{B} = 0$$

3η εξίσωση Maxwell: (νόμος Faraday)

$$\oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\left(\int_S \vec{B} d\vec{S}\right)}{dt} = \int_S \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) d\vec{S}$$

ή

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

<u>4η εξίσωση Maxwell:</u> (νόμος Ampere - Maxwell)

$$\boxed{\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I_{in} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\left(\int_S \vec{E} d\vec{S}\right)}{dt}}$$

ή

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$