

Σημειώσεις Θεωρίας Συνόλων

Γεώργιος Κολέτσος

October 16, 2005

1 Σύνολα

Ορισμός του Cantor

«Σύνολο είναι μία οποιαδήποτε συνάθροιση σε ολότητα οριστικών και διακεχριμένων στοιχείων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας».

Ο ορισμός αυτός αν και ασαφής συνεπάγεται ότι

1. Κάθε σύνολο έχει στοιχεία. Γράφουμε $x \in A$ εάν το αντικείμενο x είναι στοιχείο του (ή ανήκει στο) A . Γράφουμε $x \notin A$ εάν το x δεν ανήκει στο A .
2. Ένα σύνολο καθορίζεται από τα στοιχεία του. Ισχύει όπως λέμε η ιδιότητα της έκτασης. Γράφουμε $A = B$ όταν A είναι ίσο με το B και $A \neq B$ όταν δεν είναι.

Αρχή ή αξίωμα της έκτασης

Για οποιαδήποτε σύνολα A, B , $A = B \leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ ¹

Τα σύνολα καθορίζονται από τα στοιχεία τους. Αν π.χ. A είναι το σύνολο των αρτίων φυσικών αριθμών και B το σύνολο των φυσικών

¹Θα χρησιμοποιήσουμε τους συμβολισμούς της λογικής: Τα \wedge : και, \vee : ή, \rightarrow : συνεπάγεται, \leftrightarrow : αν και μόνον αν, \forall : για κάθε, \exists : υπάρχει. Με βάση αυτούς τους συμβολισμούς το αξίωμα της έκτασης μας λέει ότι A και B είναι ίσα αν και μόνον αν για κάθε σύνολο x το x είναι στοιχείο του A τότε και μόνον αν το x είναι στοιχείο του B , δηλαδή αν τα A και B έχουν τα ίδια στοιχεία.

αριθμών που δεν έχουν τη μορφή $2k + 1$ τότε $A = B$ ακριβώς επειδή κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B και αντιστρόφως. Ας σημειώσουμε εδώ ότι η αρχή της έκτασης είναι μια αρχή που νοιώθουμε ότι ισχύει για τα σύνολα (συνδέει την ισότητα = των συνόλων με το ανήκειν \in στα σύνολα) αλλά δεν είναι μια ιδιότητα που έχει μια λογική αναγκαιότητα ανεξαρτήτως του αν αναφερόμαστε σε σύνολα ή σε άλλα αντικείμενα και ανεξαρτήτως του τι εννοούμε με τη σχέση \in . Αν για παράδειγμα αντί για σύνολα αναφερόμαστε σε ανθρώπους και με το $x \in A$ εννοούμε ότι ο x είναι γονέας του A τότε η αρχή της έκτασης θα μας έλεγε ότι δύο ανθρώποι που έχουν τους ίδιους γονείς θα ήταν πάντα ίσοι (ίδιοι) πράγμα που δέν ισχύει (π.χ. δύο αδέλφια).

Εκτός του αξιώματος της έκτασης όλες οι άλλες αρχές που θα εξετάσουμε θα αφορούν στην ύπαρξη κάποιου συνόλου.

«Μέθοδοι» σχηματισμού συνόλων:

1. Ονομάζοντας ή παραθέτοντας όλα τα στοιχεία ενός συνόλου π.χ. το σύνολο $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ είναι αυτό που τα στοιχεία του αποτελούνται μόνον από τα α, β, γ .

Σχόλιο: Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται πλήρως μόνο στα πεπερασμένα σύνολα. Καταχρηστικά μπορούμε να περιγράφουμε «ατελώς» και άπειρα σύνολα όπως π.χ. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

2. Θεωρώντας κάποια ιδιότητα P και σχηματίζοντας το σύνολο των αντικειμένων που ικανοποιούν αυτήν την ιδιότητα δηλ. το $\{x | P(x)\}$.²

Το σύνολο αυτό (αν υπάρχει) είναι μοναδικό επειδή ισχύει η αρχή της έκτασης.

π.χ. αν $P(x) \leftrightarrow x$ είναι φυσικός και άρτιος, τότε το $\{x | P(x)\} =$ το σύνολο των αρτίων.

Αν το εκφραστικό μας όργανο (γλώσσα) έχει οριστεί καλώς τότε στο $\{x | P(x)\}$ έχουμε τη συνάθροιση των «օριστικών» στοιχείων του Cantor.

Ας σημειωθεί ότι η δεύτερη μέθοδος είναι πιο γενική από την πρώτη αφού π.χ. το σύνολο $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ μπορεί να οριστεί ως $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{x \mid x = \alpha \vee x = \beta \vee x = \gamma\}$.

² $P(x)$ σημαίνει ότι το x έχει την ιδιότητα P

Όμως, σύνολα που μπορούμε να ορίσουμε κατ' αυτό τον τρόπο μπορεί να μην υπάρχουν!

To παράδοξο του Russel

Εστω $P(x)$ είναι η ιδιότητα $x \notin x$. Υπάρχει το σύνολο $A = \{x|x \notin x\}$; Εστω ότι υπάρχει. Τότε είτε $A \in A$ είτε $A \notin A$. Αν $A \in A$ τότε επειδή το A ανήκει στο A θα πρέπει να ικανοποιεί την ιδιότητα $x \notin x$ οπότε $A \notin A$. Αν $A \notin A$ τότε το A θα ικανοποιεί την ιδιότητα $x \notin x$ άρα το A θα ανήκει στο A . Δηλαδή

$$\left. \begin{array}{l} A \in A \rightarrow A \notin A \\ A \notin A \rightarrow A \in A \end{array} \right\} \text{αντίφαση.}$$

Αρα όσον αφορά την ύπαρξη συνόλων τα οποία περιγράφουμε μέσω κάποιων ιδιοτήτων πρέπει να είμαστε επιφυλακτικοί. Την ύπαρξη αυτή θα την εξασφαλίσουμε μέσω αξιωμάτων.

Ορισμός 1.1

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

$$A \subsetneq B \Leftrightarrow A \subseteq B \& A \neq B.$$

$$\text{Ισχύει: } A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \& B \subseteq A.$$

$$A \cup B = \{x|x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x|x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{x|x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$\emptyset = \{x|x \neq x\} = \text{κενό σύνολο}$$

$$\mathcal{P}(A) = \{x|x \subseteq A\} = \text{το δυναμοσύνολο του } A$$

Σημειώστε ότι στους παραπάνω ορισμούς ορίζουμε τα $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, \emptyset , $\mathcal{P}(A)$ κάνοντας την υπόθεση ότι υπάρχουν! Αργότερα θα δούμε ότι η ύπαρξή τους εξασφαλίζεται από τα αξιώματα που θα διατυπώσουμε.

Σημείωση: Μια προσεκτική ανάγνωση του συμβολισμού θα μας δώσει τις συνήθεις έννοιες των παραπάνω ορισμών. Το $A \subseteq B$ σημαίνει ότι κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B . Μπορεί όμως το B να περιέχει και στοιχεία που δεν ανήκουν στο A . Λέμε ότι A είναι υποσύνολο του B ή ότι το B εγκλείει το A . Στην περίπτωση

που $A \subsetneq B$ το A είναι γνήσιο υποσύνολο του B . Είναι προφανές ότι σύμφωνα με το αξίωμα της έκτασης για να αποδείξουμε ότι $A = B$ αρχεί να αποδείξουμε πρώτα ότι $A \subseteq B$ και μετά ότι $B \subseteq A$.

Το $A \cup B$ (η ένωση των A και B) ορίζεται ως το σύνολο που τα στοιχεία του ανήκουν είτε στο A ή στο B . Δηλαδή «μαζεύει» τα στοιχεία του A και τα στοιχεία του B σε ένα ενιαίο σύνολο. Το $A \cap B$ (η τομή του A και B) συγκεντρώνει τα κοινά στοιχεία των A και B αφού για να ανήκει το x στο $A \cap B$ πρέπει να ανήκει και στο A και στο B . Το $A \setminus B$ (σχετικό συμπλήρωμα του B στο A) συγκεντρώνει τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B . Λέγεται και διαφορά των A και B και γράφεται μερικές φορές ως $A - B$. Το \emptyset , το κενό σύνολο, μπορεί να οριστεί ως το σύνολο των στοιχείων x που ικανοποιούν μια αδύνατη ιδιότητα π.χ. $x \neq x$. Το \emptyset δεν έχει κανένα στοιχείο και για οποιαδήποτε x η πρόταση $x \in \emptyset$ είναι πάντα φευδής. Το $\mathcal{P}(A)$ είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A .

Η άλγεβρα των συνόλων

Εστω A δοθέν σύνολο. Συμβολίζουμε το $A \setminus X$ με X^c και έστω $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- (1) Αντιμεταθετικοί νόμοι: $X \cup Y = Y \cup X$, $X \cap Y = Y \cap X$
- (2) Προσεταιριστικοί νόμοι: $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$,
 $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$
- (3) Επιμεριστικοί νόμοι: $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$,
 $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
- (4) Νόμοι συμπληρώματος: $X^{cc} = (X^c)^c = X$, $X \cup X^c = A$, $X \cap X^c = \emptyset$,
 $A^c = \emptyset$, $\emptyset^c = A$

Οι νόμοι (1)–(4) ονομάζονται νόμοι του *Boole* και η μαθηματική δομή³

$\langle \mathcal{P}(A), \cup, \cap, {}^c \rangle$ ονομάζεται άλγεβρα του δυναμοσυνόλου στο A .

³Μαθηματική δομή είναι ένα σύνολο εφοδιασμένο με πράξεις (ή/και) σχέσεις. π.χ. Η (μαθηματική) δομή $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, < \rangle$ είναι το σύνολο \mathbb{N} των φυσικών αριθμών εφοδιασμένο με τις πράξεις $+$ και \cdot της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού καθώς και με τη σχέση $<$ του μικρότερου.

2 Σχέσεις, Συναρτήσεις

Όταν έχουμε δύο σύνολα x και y μπορούμε να φανταστούμε ότι υπάρχει το σύνολο $\{x, y\}$ που έχει ως στοιχεία του μόνον το x και το y . Το σύνολο $\{x, y\}$ ονομάζεται (μη διατεταγμένο) ζεύγος που σχηματίζεται από το x και το y και μπορεί να οριστεί ως $\{x, y\} = \{z \mid z = x \vee z = y\}$. Το ζεύγος αυτό δεν επιβάλλει καμιά διάταξη στα x και y , δηλαδή $\{x, y\} = \{y, x\}$, γι' αυτό και λέγεται μη-διατεταγμένο. Σε αντίθεση με αυτό διατεταγμένο ζεύγος είναι ένα αντικείμενο $\langle x, y \rangle$ που αντιστοιχεί σε κάθε δύο αντικείμενα x, y έτσι ώστε να ισχύει η εξής βασική ιδιότητα:

$$\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle \Leftrightarrow x = x' \text{ και } y = y' \quad (1)$$

Το αντικείμενο αυτό επιβάλλει μια διάταξη στα x και y (το x είναι πρώτο και μετά είναι το y) και βέβαια αναμένεται ότι αν $x \neq y$ τότε $\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$ σε αντίθεση με την αντίστοιχη ιδιότητα του μη-διατεταγμένου ζεύγους.

Πρόβλημα: Να βρούμε ένα συνολοθεωρητικό ορισμό του διατεταγμένου ζεύγους, που να έχει την ιδιότητα ???. Η απάντηση σ' αυτό το ερώτημα θα είναι το πρώτο παράδειγμα του πώς μια μαθηματική διαισθητικά κατανοούμενη έννοια μπορεί να οριστεί με αυστηρό τρόπο στον «ακαθαρό» κόσμο των συνόλων. Θα ακολουθήσουν και άλλες έτσι ώστε να στοιχειοθετηθεί η άποψη ότι όλα τα μαθηματικά αντικείμενα είναι εντέλει σύνολα, με την έννοια ότι σε όλα τα μαθηματικά διαισθητικά αντικείμενα (ψυσικοί, ρητοί, πραγματικοί αριθμοί κ.λ.π.) αντιστοιχούν πιστές απεικονίσεις τους στον κόσμο των συνόλων. Μ' αυτή την έννοια στον κόσμο που εξετάζουμε υπάρχουν μόνο σύνολα και ορισμένα απ' αυτά αντιστοιχούν πιστά στις γνωστές μας μαθηματικές έννοιες (όλα είναι σύνολα!).

Ορισμός 2.1 (Kuratowski) Ορίζουμε $\langle x, y \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$

Απόδειξη της ιδιότητας ??:

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\} \Leftrightarrow x = x' \text{ και } y = y'$$

\Leftarrow : Προφανής.

• Αν $x \neq y$ τότε $\{x, y\} \neq \{x'\}$ επειδή $\{x, y\}$ έχει δύο στοιχεία, αρα $\{x\} = \{x'\}$ και $\{x, y\} = \{x', y'\}$. Αρα $x = x'$ και $y = y'$.

• Αν $x = y$ τότε $\{x, y\} = \{x, x\} = \{x\}$. Αρα το $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x\}\} = \{\{x'\}\}$. Αρα $x = x'$ και βέβαια $x = x' = y = y'$.

Με επαγωγή στο n μπορούμε να ορίσουμε τις διατεταγμένες n -άδες.

$$\langle x_{n+1}, x_n, \dots, x_1 \rangle \stackrel{\text{ορ}}{=} \langle x_{n+1}, \langle x_n, \dots, x_1 \rangle \rangle \text{ για όλα } n \geq 2$$

Εύκολα αποδεικνύεται με επαγωγή

$$\langle x_1, \dots, x_n \rangle = \langle y_1, \dots, y_n \rangle \Leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge \dots \wedge x_n = y_n$$

Ορισμός 2.2 (i) $X \times Y \stackrel{\text{ορ}}{=} \{\langle x, y \rangle \mid x \in X \wedge y \in Y\}$ (καρτεσιανό γινόμενο)

$$\text{Ορίζουμε } X^2 = X \times X \text{ και πιο γενικά } X^n = \underbrace{X \times X \times X \times \dots \times X}_{n \text{ φορές}}$$

(ii) Μία διμελής σχέση R στα X και Y είναι ένα υποσύνολο του $X \times Y$.

(iii) Μία διμελής σχέση R στο X είναι ένα υποσύνολο του $X \times X$.

(iv) Συνάρτηση από το X στο Y είναι μία σχέση F στα X και Y έτσι ώστε για κάθε $x \in X$ υπάρχει ακριβώς ένα $y \in Y$ ώστε $\langle x, y \rangle \in F$. Λέμε τότε ότι το X είναι το πεδίο ορισμού της F . Γράφουμε $y = F(x)$ αντί του $\langle x, y \rangle \in F$.

(v) Αν F είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού X , τότε για κάθε υποσύνολο $A \subseteq X$ το πεδίο τιμών της F στο A το οποίο θα γράφουμε ως $F[A]$ (ή εικόνα του A από την F) είναι το σύνολο

$$\{x \mid \exists y (y \in A \text{ και } \langle y, x \rangle \in F)\}$$

(vi) Αν F είναι σύνολο διατεταγμένων ζευγών τέτοιο ώστε εάν $\langle x, y \rangle \in F$ και $\langle x, z \rangle \in F$ τότε να έχουμε $y = z$, λέμε ότι F είναι συνάρτηση. Αν F συνάρτηση ορίζουμε

$$\text{Domain}(F) = \text{πεδίο ορισμού } F = \{x \mid \exists y (\langle x, y \rangle \in F)\}$$

$$\text{Range}(F) = \text{πεδίο τιμών της } F = \{y \mid \exists x(\langle x, y \rangle) \in F\}$$

Γράφουμε συνοπτικά dom και Rg για τα *Domain* και *Range* αντίστοιχα. Αν F συνάρτηση και $A = \text{dom}(F)$, $\text{Rg}(F) \subseteq B$ τότε F είναι συνάρτηση από το A στο B σύμφωνα με τον πιο πάνω ορισμό ?? και $\text{Rg}(F) = F[A]$. Δηλαδή μία συνάρτηση F είναι συνάρτηση από το A στο B αν $\text{Rg}(F) \subseteq B$.

(vii) Αν R είναι σχέση στα X και Y τότε

$$R^{-1} \stackrel{\text{ορ}}{=} \{\langle y, x \rangle \mid \langle x, y \rangle \in R\}$$

$$(viii) X Y \stackrel{\text{ορ}}{=} \{F \mid F \text{ συνάρτηση από το } X \text{ στο } Y\}$$

Σημείωση: 'Οταν ορίζουμε την F ως συνάρτηση από τα X στο Y «προκαθορίζουμε» τα πεδία ορισμού και τιμών της (ορισμός ??). Στην περίπτωση που ορίζουμε τη F απλώς ως σύνολο διατεταγμένων ζευγών, τα πεδία ορισμού και τιμών «ενυπάρχουν» στην F και μπορούν να καθοριστούν «εκ των υστέρων».

Ας σημειώσουμε γενικά ότι η συνήθης μαθηματική προσέγγιση για τις συναρτήσεις (ή για τις σχέσεις) είναι να ορίζονται βάσει κανόνων π.χ. ορίζουμε μια συνάρτηση στους παραγματικούς αριθμούς $f(x) = x^3$. Δίνουμε δηλαδή τον κανόνα βάσει του οποίου αποκτούνται οι τιμές (x^3) της συνάρτησης όταν δοθεί το όρισμα x . Αντίθετα, σύμφωνα με την συνολοθεωρητική οπτική ως συνάρτηση θεωρείται το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών που αντιστοιχούν στα ορίσματα και στις αντίστοιχες τιμές κατά κάποιο τρόπο ανεξάρτητα από τους ενδεχόμενους κανόνες που καθορίζουν αυτή την αντιστοιχία. Σε πιο φιλοσοφική γλώσσα λέμε ότι η πρώτη προσέγγιση ορίζει τη συνάρτηση εντασιακά (ως προς την ένταση) ενώ ο δεύτερος εκτασιακά (ως προς την έκταση).

Ορισμός 2.3 Αν A είναι σύνολο συνόλων ορίζουμε

(i) $\bigcup A \stackrel{\text{ορ}}{=} \{x \mid \exists X \in A \text{ τ.ω. } x \in X\}$, δηλαδή το $\bigcup A$ συγκεντρώνει σε ένα σύνολο όλα τα στοιχεία των στοιχείων του A . Και αυτό γιατί το $x \in \bigcup A$ ισχύει τότε και μόνον τότε το $x \in X$ για κάποιο στοιχείο X του A .

(ii) Αν $A \neq \emptyset$ τότε $\bigcap A \stackrel{\text{ορ.}}{=} \{x \mid \forall X (X \in A \rightarrow x \in X)\}$, δηλαδή το $\bigcap A$ συγκεντρώνει σε ένα σύνολο όλα τα στοιχεία που είναι κοινά σε όλα τα στοιχεία του A . Κι' αυτό γιατί το $\bigcap A$ ανήκει σε κάθε X που είναι στοιχείο του A .⁴

Ορισμός 2.4 (i) Οικογένεια συνόλων με δείκτες στο σύνολο I , είναι μία συνάρτηση F από το I σε κάποιο σύνολο συνόλων. Αν για κάθε $i \in I$, $F(i) = A_i$ γράφουμε $F = \langle A_i \rangle_{i \in I}$.

π.χ. η οικογένεια $\langle (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ με $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \subseteq \mathbb{R}$ παριστάνει όλα τα ανοιχτά διαστήματα της μορφής $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Αν $F = \langle A_i \rangle_{i \in I}$ οικογένεια συνόλων, ορίζουμε $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup \{A_i \mid i \in I\}$ και με την προϋπόθεση ότι $I \neq \emptyset$, $\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap \{A_i \mid i \in I\}$.

(iii) Δοθείσης μιας οικογένειας $\langle A_i \rangle_{i \in I}$ ορίζουμε το γινόμενο της οικογένειας

$$\prod_{i \in I} A_i \text{ ως εξής:}$$

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I} A_i &\stackrel{\text{ορ.}}{=} \{f \mid f \in {}^I(\bigcup_{i \in I} A_i) \text{ και για κάθε } i \in I \text{ } f(i) \in A_i\} \\ &= \text{το σύνολο όλων των οικογενειών } \langle x_i \rangle_{i \in I} \\ &\text{ώστε } x_i \in A_i \text{ για κάθε } i \in I \\ &\quad (\text{Γενίκευση του Καρτεσιανού Γινομένου}) \end{aligned}$$

Σημείωση: Η οικογένεια συνόλων αντιστοιχεί σε ένα σύνολο συνόλων που το καθένα «φέρει» ένα δείκτη. Το γεγονός ότι το κάθε σύνολο A_i της οικογένειας έχει ένα δείκτη i περιγράφεται με το να λέμε ότι το A_i είναι η τιμή μιας συνάρτησης (της F) στο όρισμα i .

Ο ορισμός του $\prod_{i \in I} A_i$ είναι η γενίκευση της έννοιας του καρτεσιανού γινομένου (που το έχουμε ήδη ορίσει στην περίπτωση του

⁴Η προϋπόθεση $A \neq \emptyset$ είναι απαραίτητη. Αν $A = \emptyset$ τότε σύμφωνα με τον ορισμό θα έχουμε ότι το $\bigcap A$ είναι το σύνολο όλων των συνόλων! Διότι το οποιοδήποτε x ικανοποιεί την πρόταση $\forall X (X \in A \rightarrow x \in X)$ αφού για το κάθε X το $X \in \emptyset$ είναι ψευδές!

$I = \{1, 2\}$ π.χ. ορίσαμε το $A_1 \times A_2$). Το $A_1 \times A_2$ είναι ισομορφικό με το $\prod_{i \in \{1, 2\}} A_i$ με την έννοια ότι το ζεύγος $\langle a_1, a_2 \rangle \in A_1 \times A_2$ μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι $f : \{1, 2\} \rightarrow A_1 \cup A_2$ όπου $f(1) = a_1$ και $f(2) = a_2$. Αυτό θα μπορούσε να ισχύει για όλες τις πεπερασμένες περιπτώσεις δηλ. το $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ θα μπορούσε είτε να οριστεί ως σύνολο διατεταγμένων n -άδων είτε ισοδύναμα να αντικατασταθεί από το $\prod_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} A_i$. Στην περίπτωση όμως που το I είναι άπειρο δεν έχουμε τη δυνατότητα να ορίσουμε το $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times \cdots$ παρά μόνον ως $\prod_{i \in \{1, 2, \dots\}} A_i$. Δηλαδή η n -άδα στην άπειρη περίπτωση θα είναι μια συνάρτηση $f : I \rightarrow$ με τιμές αντιστοιχα για κάθε i στο A_i ($f(i) = a_i \in A_i$). Ο ορισμός αυτός λοιπόν ως πιο γενικός μπορεί να θεωρηθεί ως ορισμός, κάθε περίπτωση, του καρτεσιανού γινομένου. Η ταύτιση αυτή, όταν το I είναι πεπερασμένο, λειτουργεί με το να θεωρήσουμε την προφανή φυσική αντιστοιχία:

$$G : \prod_{i \in I} A_i \rightsquigarrow \text{καρτεσιανό γινόμενο των } A_i$$

$$\begin{aligned} \text{π.χ. αν } I = \{1, 2\} \text{ τότε } G : \prod_{i \in I} A_i &\rightsquigarrow A_1 \times A_2 \\ G(f) &= \langle f(1), f(2) \rangle \text{ για όλα τα } f \in \prod_{i \in I} A_i \end{aligned}$$

Συμβολισμός-ορισμοί Γράφουμε

- $f : A \rightarrow B$ αν f συνάρτηση από το A στο B .
- $f : A \rightarrowtail B$ αν f είναι μονομορφισμός ή 1-1 δηλ. $x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)$.
- $f : A \twoheadrightarrow B$ αν f είναι επιμορφισμός ή επί του B δηλ. $\forall y (y \in B \rightarrow \exists x (x \in A \& f(x) = y))$.
- $f : A \rightsquigarrow B$ αν f είναι 1-1 και επί (αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία).
- Αν $f : A \rightarrow B$ και $C \subseteq A$. Τότε $f \upharpoonright C = \{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in f \wedge x \in C\}$. Άρα $f \upharpoonright C : C \rightarrow B$. Η $f \upharpoonright C$ είναι ο περιορισμός της f στο C

- Αν $f : A \rightarrow B$ και $C \subseteq B$, τότε $f^{-1}[C] = \{x \mid \exists y(y \in C \wedge f(x) = y)\}$. Ονομάζεται και αντίστροφη εικόνα του C μέσω της f .
- Αν $f : A \rightarrow B$ και $g : B \rightarrow C$ τότε $g \circ f = \{\langle x, z \rangle \mid \exists y(\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle y, z \rangle \in g)\}$ είναι συνάρτηση, η σύνθεση των συναρτήσεων f και g .
- Αν $f : A \rightarrow B$ τότε $f^{-1} = \{\langle y, x \rangle \in f\}$ είναι συνάρτηση και $f^{-1} : Rg(f) \rightarrow A$. Η σύνθεση των f και f^{-1} είναι η ταυτοτική συνάρτηση Id . Είναι $\forall x Id(x) = x$.

Παρατήρηση: Αν f και g συναρτήσεις: Τότε $f = g$ (ταυτίζονται ως σύνολα) τότε και μόνον τότε $dom(f) = dom(g)$ και $\forall x \in dom(f), f(x) = g(x)$.

Ορισμός 2.5 Μια διμελής σχέση R στο σύνολο A είναι

- (i) αυτοπαθής, αν $xRx, \forall x \in A$.
- (ii) αντισυμμετρική, αν $xRy \wedge yRx \rightarrow x = y \forall x, y \in A$.
- (iii) μεταβατική, αν $xRy \wedge yRz \rightarrow xRz \forall x, y, z \in A$.
- (iv) συμμετρική, αν $xRy \rightarrow yRx \forall x, y \in A$.

Ορισμός 2.6 Η διμελής σχέση R στο A είναι

- (i) σχέση ισοδυναμίας, αν είναι αυτοπαθής, συμμετρική και μεταβατική
- (ii) μερική διάταξη, αν είναι αυτοπαθής, αντισυμμετρική και μεταβατική
- (iii) ολική (ή γραμμική) διάταξη αν είναι μερική διάταξη και $\forall x, y \in A xRy \vee yRx$.

Πρόταση 2.7 Έστω R σχέση ισοδυναμίας στο A και για $a \in A$, $\bar{a} = \{b \mid b \in A \wedge bRa\}$ (Λέγεται και κλάση ισοδυναμίας του a). Τότε αν $a, b \in A$ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

$$1. aRb$$

$$2. \bar{a} = \bar{b}$$

$$3. a \in \bar{b}$$

$$4. \bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$$

Απόδειξη: $1 \rightarrow 2$: $\bar{a} \subseteq \bar{b}$ διότι αν $x \in \bar{a}$ τότε xRa οπότε επειδή aRb και R μεταβατική xRb δηλ. $x \in \bar{b}$. Ομοίως $\bar{b} \subseteq \bar{a}$.

$2 \rightarrow 3$: Επειδή R αυτοπαθής aRa δηλ. $a \in \bar{a}$ οπότε $a \in \bar{b}$.

$3 \rightarrow 4$: Επειδή $a \in \bar{b}$ και όπως προηγουμένως $a \in \bar{a}$, $a \in \bar{a} \cap \bar{b}$ δηλ. $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$.

$4 \rightarrow 1$: Έστω $z \in \bar{a} \cap \bar{b}$ (ένα τέτοιο z υπάρχει επειδή $\bar{a} \cap \bar{b} \neq \emptyset$). Άρα $z \in \bar{a}$ και $z \in \bar{b}$ δηλ. zRa και zRb . Επειδή R συμμετρική έχουμε aRz και επειδή R μεταβατική aRb . Ο.Ε.Δ.

Σημείωση: Η σχέση ισοδυναμίας διαμερίζει το σύνολο A στις ξένες μεταξύ τους κλάσεις ισοδυναμίας. Μπορεί να θεωρηθεί ως μια επέκταση της ισότητας με την έννοια ότι «ταυτίζει» τα αντικείμενα που ανήκουν στην ίδια κλάση.

Στο επόμενο παράδειγμα θα δούμε πώς χρησιμοποιώντας αυτή τη μέθοδο της «ταύτισης» δηλ. μέσω μιας σχέσης ισοδυναμίας μπορούμε να κατασκευάσουμε σύνθετες μαθηματικές δομές.

Παράδειγμα 2.8 (Κατασκευή του συνόλου των ακεραίων \mathbb{Z} από το σύνολο \mathbb{N}).

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το σύνολο $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ των φυσικών αριθμών και ας υποθέσουμε επίσης ότι στο \mathbb{N} έχει οριστεί η πρόσθεση $+$, η σχέση της διάταξης $<$ καθώς και ότι αυτές ικανοποιούν όλες τις γνωστές ιδιότητες.

$$\text{Ορίζουμε } \sim = \{\langle \langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \rangle \mid a, b, c, d \in \mathbb{N} \text{ και } a + d = b + c\}$$

$$\Delta\text{ηλαδή } \langle a, b \rangle \sim \langle c, d \rangle \leftrightarrow a + d = b + c.$$

Η σχέση \sim είναι σχέση ισοδυναμίας στο \mathbb{N}^2 . (Ασκηση!) Θέτουμε $\overline{\langle a, b \rangle} = \{\langle c, d \rangle \in \mathbb{N}^2 \wedge \langle c, d \rangle \sim \langle a, b \rangle\}$ και ορίζουμε \mathbb{Z} να είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας δηλ.

$$\mathbb{Z}, (\text{οι ακέραιοι}) = \{\overline{\langle a, b \rangle} \mid \langle a, b \rangle \in \mathbb{N}^2\}$$

Ισχύει αν $\langle a, b \rangle \in \mathbb{N}^2$

1. $a < b \rightarrow a + n = b$, για κάποιο $n \in \mathbb{N} \rightarrow \overline{\langle a, b \rangle} = \overline{\langle 0, n \rangle}$
2. $b \leq a \rightarrow a = b + m$, για κάποιο $m \in \mathbb{N} \rightarrow \overline{\langle a, b \rangle} = \overline{\langle m, 0 \rangle}$.

Και επειδή βέβαια για κάθε $a, b \in \mathbb{N}$ ισχύει $a < b$ ή $b \leq a$ όλα τα στοιχεία του \mathbb{Z} είναι (ισοδύναμα) της μορφής $\overline{\langle m, 0 \rangle}$ ή $\overline{\langle 0, m \rangle}$. Σε κάθε κλάση ισοδυναμίας (δηλαδή σε κάθε στοιχείο του \mathbb{Z}) υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο (εκπρόσωπος) που έχει τη μορφή $\overline{\langle m, 0 \rangle}$ ή $\overline{\langle 0, m \rangle}$. Στην πρώτη περίπτωση συμβολίζουμε το $\overline{\langle m, 0 \rangle} = +m$ (θετικό m) και στη δεύτερη $\overline{\langle 0, m \rangle} = -m$ (αρνητικό m).

Διατήρηση των συναρτήσεων

Ας υποθέσουμε ότι $F : A^n \rightarrow A$. Γράφουμε τότε $F(a_1, \dots, a_n)$ αντί του $F(\langle a_1, \dots, a_n \rangle)$. Υποθέτουμε απίσης ότι \sim είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο A και \bar{a} η κλάση ισοδυναμίας όπως έχει οριστεί ανωτέρω. Εστω $\bar{A} = \{\bar{a} \mid a \in A\}$. Θα θέλαμε να μεταφέρουμε τη συνάρτηση F από το A σε συνάρτηση \bar{F} στο \bar{A} . Δηλαδή να ορίσουμε

$$\bar{F} : (\bar{A})^n \rightarrow \bar{A} \text{ ως } \bar{F}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n) = \overline{F(a_1, \dots, a_n)}$$

Ο συμβολισμός του ορισμού είναι παραπλανητικός. Γενικά δεν μπορούμε να επιλέξουμε «το» a_i από το \bar{a}_i . Θα υπάρχει μια συνάρτηση F που να ικανοποιεί το πιο πάνω μόνο αν το σύνολο $\{\langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \rangle, F(a_1, \dots, a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in A\}$ είναι συνάρτηση δηλ.

$$\Leftrightarrow \langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n \rangle = \langle \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_n \rangle \rightarrow \overline{F(a_1, \dots, a_n)} = \overline{F(b_1, \dots, b_n)}$$

$$\Leftrightarrow a_i \sim b_i \quad i = 1, \dots, n \rightarrow F(a_1, \dots, a_n) \sim F(b_1, \dots, b_n)$$

Ορισμός. Στο πλαίσιο του ανωτέρω συμβολισμού λέμε ότι η σχέση \sim διατηρεί την F αν

$$a_i \sim b_i \quad i = 1, \dots, n \rightarrow F(a_1, \dots, a_n) \sim F(b_1, \dots, b_n)$$

Άρα υπάρχει η $\bar{F} \Leftrightarrow \sim$ διατηρεί την F .

Παράδειγμα. Στο σύνολο \mathbb{Z} που έχει οριστεί πιο πάνω αν

$$P : (\mathbb{N}^2)^2 \rightarrow \mathbb{N}^2 \text{ με}$$

$$P(\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle) = \langle a + c, b + d \rangle$$

τότε αν έχουμε $\langle a, b \rangle \sim \langle a', b' \rangle$ και $\langle c, d \rangle \sim \langle c', d' \rangle$ θα έχουμε αντίστοιχα $a + b' = a' + b$ και $c + d' = d + c'$ άρα και $(a + c) + (b' + d') = (b + d) + (a' + c')$, δηλαδή τελικά

$$P(\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle) \sim P(\langle a', b' \rangle, \langle c', d' \rangle)$$

Άρα \sim διατηρεί την P .

Όθεν υπάρχει συνάρτηση \bar{P} έτσι ώστε

$$\bar{P}(\overline{\langle a, b \rangle}, \overline{\langle c, d \rangle}) = \overline{\langle a + c, b + d \rangle}$$

Είναι $\bar{P} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}$. Για $a, b \in \mathbb{Z}$ γράφουμε $a + b$ αντί του $\bar{P}(a, b)$.

Ελέγξτε: $a + -a = \overline{\langle 0, 0 \rangle}$ δηλαδή το $\overline{\langle 0, 0 \rangle}$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης.

Ορισμός 2.9 Δομή μερικής διάταξης είναι ένα ζεύγος $\langle A, R \rangle$ όπου R είναι μερική διάταξη στο σύνολο A . Αν $\langle A, R \rangle$ και $\langle A', R' \rangle$ είναι δύο δομές μερικής διάταξης λέμε ότι είναι ισομορφικές αν $\exists f : A \rightarrow A'$ έτσι ώστε $x R y \leftrightarrow f(x) R' f(y) \forall x, y \in A$.

Στην ειδική περίπτωση όπου A είναι σύνολο συνόλων θα γράφουμε $\langle A, \subseteq \rangle$ για να δηλώσουμε το $\langle A, R \rangle$ όπου

$$R = \{\langle X, Y \rangle | X, Y \in A \text{ και } X \subseteq Y\}$$

δηλ. το R είναι η σχέση στο A που εισάγεται από το \subseteq .

Θεώρημα 2.10 (Θεώρημα αναπαράστασης της μερικής διάταξης)
Αν $\langle A, \leq \rangle$ είναι μία δομή μερικής διάταξης τότε υπάρχει ένα σύνολο συνόλων $B \subseteq \mathcal{P}(A)$ έτσι ώστε

$$\langle A, \leq \rangle \cong \langle B, \subseteq \rangle \quad (\cong : \text{ισομορφισμός})$$

Απόδειξη Πρέπει να βρούμε $B \subseteq \mathcal{P}(A)$ και $f : A \rightarrow B$ ώστε $a \leq b \leftrightarrow f(a) \subseteq f(b)$.

Για κάθε $a \in A$ έστω $f(a) = \{x | x \in A \text{ και } x \leq a\}$, έστω $B = \{f(a) | a \in A\}$. Από ορισμό, $B \subseteq \mathcal{P}(A)$ και $f : A \rightarrow B$ (επιμορφισμός).

(i) Τώρα $a \leq b \Rightarrow \{x | x \leq a\} \subseteq \{x | x \leq b\} \Rightarrow f(a) \subseteq f(b)$, από μεταβατικότητα.

(ii) Αντίστροφα, αν $\{x | x \leq a\} \subseteq \{x | x \leq b\}$ τότε $a \leq b$ διότι $a \in \{x | x \leq a\}$ επειδή $a \leq a$ άρα $a \in \{x | x \leq b\}$ δηλ. $a \leq b$.

(iii) Εστω $f(a) = f(b)$ τότε $\{x | x \leq a\} = \{x | x \leq b\}$. Για τον ίδιο λόγο με το (ii) έχουμε $a \leq b$ και $b \leq a$. Άρα από αντισυμετρικότητα $a = b$ (άρα f 1-1).

3 Πληθάριθμοι

Ορισμός 3.1 Δύο σύνολα A και B είναι ισοπληθικά (γράφουμε $A =_c B$ ή $A \sim B$) αν υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία $f : A \rightarrowtail B$.

Εύκολα βλέπουμε ότι για οποιαδήποτε σύνολα A, B, C

1. $A \sim A$
2. $A \sim B \rightarrow B \sim A$
3. $A \sim B \wedge B \sim C \rightarrow A \sim C$

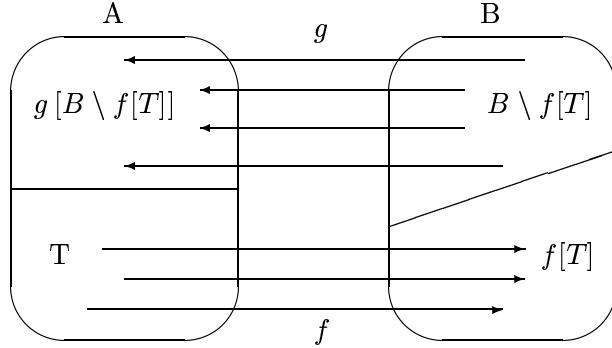
Δηλαδή \sim είναι συμπεριφέρεται ως σχέση ισοδυναμίας.

Ορισμός 3.2 Σε κάθε σύνολο A αντιστοιχούμε ένα αντικείμενο $\overline{\overline{A}}$, το οποίο καλείται ο πληθάριθμος του A , με τέτοιο τρόπο ώστε

$$\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} \leftrightarrow A \sim B$$

Σημείωση: Οι παραπάνω ορισμοί προσπαθούν να αναπαραστήσουν στα πλαίσια της συνολοθεωρίας, με ενιαίο τρόπο, την έννοια της ισοπληθικότητας των συνόλων ανεξαρτήτως αν αυτά είναι πεπερασμένα ή άπειρα. Για παράδειγμα, ξέρουμε ότι σε ένα μαγαζί παπούτσιών υπάρχει το ίδιο πλήθος αριστερών και δεξιών παπούτσιών, χωρίς αναγκαστικά να ξέρουμε τον ακριβή αριθμό αυτών των παπούτσιών. Το γεγονός ότι υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία (σε κάθε αριστερό παπούτσι αντιστοιχεί το δεξιό του και αντίστροφα) μας οδηγεί σ' αυτό το συμπέρασμα. Ομοίως θα δεχόμαστε ότι το πλήθος του συνόλου των αρτίων φυσικών αριθμών είναι το ίδιο με το πλήθος των περιττών (προφανής αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία), αλλά και το -όπως θα δούμε - "παράδοξο" συμπέρασμα ότι το σύνολο των φυσικών είναι ισοπληθικό με το υποσύνολό του των αρτίων.

'Οσον αφορά τους πληθαρίθμους, όπως ακριβώς και στα πεπερασμένα σύνολα αντιστοιχούμε αριθμούς με την έννοια ότι σε δύο ισοπληθικά σύνολα αντιστοιχούμε τον ίδιο αριθμό, έτσι και στα άπειρα σύνολα επεκτείνουμε την ίδια αυτή ιδέα. Έτσι λοιπόν υποθέτουμε ότι σε κάθε σύνολο έχουμε αντιστοιχήσει ένα αντικείμενο (είναι κι' αυτό σύνολο;) που το ονομάζουμε πληθάριθμο του συνόλου. Προφανώς θα πρέπει η αντιστοίχιση αυτή να έχει γίνει κατά τρόπο ώστε ισοπληθικά σύνολα να έχουν τον ίδιο πληθαρίθμο και δύο οποιαδήποτε σύνολα με τον ίδιο πληθαρίθμο να είναι ισοπληθικά. Εμείς προς το παρόν θα υποθέσουμε ότι αυτή η αντιστοίχιση έχει γίνει. Το να ορίσουμε μία συγκεκριμένη αντιστοίχιση στα πλαίσια της (αξιωματικής) συνολοθεωρίας είναι ένα πρόβλημα, γνωστό ως το πρόβλημα ανάθεσης πληθαρίθμων. Αργότερα, αφού αναπτύξουμε την έννοια των διατακτικών αριθμών, θα δούμε τη λύση που έδωσε σ' αυτό ο von Neumann.



Σχήμα 1: Απόδειξη του θεωρήματος Schröder-Bernstein

Ορισμός 3.3 Για σύνολα A και B

$$A \preccurlyeq B \iff \exists g : A \rightarrowtail B$$

Για πληθάριθμους

$$\overline{A} \leq \overline{B} \iff A \preccurlyeq B \quad (2)$$

Για τον ορισμό (2) πρέπει να ελέγξουμε ότι είναι καλός ορισμός.

Δηλαδή, αν $\overline{A} = \overline{A'}$ και $\overline{B} = \overline{B'}$ πρέπει να ισχύει

$$A \preccurlyeq B \leftrightarrow A' \preccurlyeq B'$$

Σημείωση: Το $A \preccurlyeq B$ ορίζει την ιδέα ότι το B έχει τουλάχιστον όσα στοιχεία (σε πλήθος) έχει το A .

Η σχέση \preccurlyeq (οπότε και $\eta \leq$ στους πληθικούς) είναι αυτοπαθής και μεταβατική. Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι είναι και αντισυμμετρική (με την έννοια ότι τα δύο σύνολα είναι ισοδύναμα και όχι ίσα όπως κανονικά απαιτείται).

Θεώρημα 3.4 (Schröder-Bernstein) Για οποιαδήποτε A, B , αν $A \preccurlyeq B$ και $B \preccurlyeq A$ τότε $A \sim B$.

Απόδειξη: [Σχήμα 1] Εστω $f : A \rightarrowtail B$ και $g : B \rightarrowtail A$. Θέλουμε να κατασκευάσουμε $h : A \rightarrowtail B$.

Αρκεί να βρούμε $T \subseteq A$ ώστε $T = A \setminus g[B \setminus f[T]]$.

Τότε ορίζουμε $h : A \rightarrowtail B$ ως ακολούθως

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) && \text{αν } x \in T \\ h(x) &= g^{-1}(x) && \text{αν } x \in A \setminus T \end{aligned}$$

Λήμμα 3.5 (Το λήμμα του σταθερού σημείου, Tarski) Εστω $F : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ έτσι ώστε αν $X \subseteq Y$ τότε $F(X) \subseteq F(Y)$, $\forall X, Y \in \mathcal{P}(A)$ (μονότονος τελεστής). Τότε υπάρχει κάποιο $T \in \mathcal{P}(A)$ ώστε $F(T) = T$.

Απόδειξη λήμματος: Εστω $S = \{X \mid X \in \mathcal{P}(A) \text{ και } X \subseteq F(X)\}$. Εστω $T = \cup S = \{x \mid \exists X \in S \text{ και } x \in X\}$.

Αν $X \in S$ τότε $X \subseteq F(X)$. Επίσης $X \subseteq T$ (επειδή $X \subseteq \cup S$).

Αρα $F(X) \subseteq F(T)$. Δηλαδή $X \subseteq F(X) \subseteq F(T)$ δηλ. $X \subseteq F(T)$.

Αρα αν $x \in T$ τότε $x \in X$ για κάποιο $X \in S$ και επειδή $X \subseteq F(T)$ έχουμε ότι $x \in F(T)$.

Αρα:

$$T \subseteq F(T) \quad (3)$$

Από (3) παίρνουμε $F(T) \subseteq F(F(T))$ από μονοτονία του F . Αρα από ορισμό του S , $F(T) \in S$. Αρα $F(T) \subseteq \cup S$ δηλαδή

$$F(T) \subseteq T \quad (4)$$

Από (3) και (4), $T = F(T)$.

Συνέχεια της απόδειξης του θεωρήματος: Ορίζουμε $F : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ με $F(X) = A \setminus g[B - f[X]]$. Η F ικανοποιεί τη μονοτονία:

$$\begin{aligned} X \subseteq Y &\Rightarrow f[X] \subseteq f[Y] \Rightarrow B \setminus f[Y] \subseteq B \setminus f[X] \\ &\Rightarrow g[B \setminus f[Y]] \subseteq g[B \setminus f[X]] \\ &\Rightarrow A \setminus g[B \setminus f[X]] \subseteq A \setminus g[B \setminus f[Y]] \\ &\Rightarrow F(X) \subseteq F(Y) \end{aligned}$$

Αρα από το λήμμα του Tarski υπάρχει $T \in \mathcal{P}(A)$ ώστε $F(T) = T$ δηλ. $T = A \setminus g[B \setminus f[T]]$. Αρα μπορούμε να ορίσουμε την αντιστοιχία $h : A \rightsquigarrow B$ με

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) && \text{αν } x \in T \\ h(x) &= g^{-1}(x) && \text{αν } x \in A \setminus T \end{aligned}$$

Πόρισμα 3.6 H σχέση \leq στους πληθικούς αριθμούς ικανοποιεί τις ιδιότητες της μερικής διάταξης.

Πόρισμα 3.7 Για να αποδείξουμε ότι $A \sim B$ ($\hat{\bar{A}} = \hat{\bar{B}}$) αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχουν μονομορφισμοί $A \rightarrowtail B$ και $B \rightarrowtail A$. (Δηλαδή αρκεί $\hat{\bar{A}} \leq \hat{\bar{B}}$ και $\hat{\bar{B}} \leq \hat{\bar{A}}$)

Ορισμός 3.8 Για σύνολα A και B

$$A \prec B \iff A \lessdot B \text{ και } \neg(A \sim B)$$

ισοδύναμα (χρησιμοποιώντας το θεώρημα Schröder - Bernstein)

$$A \prec B \Leftrightarrow A \lessdot B \text{ και } \neg(B \lessdot A)$$

Παρατήρηση: Το $A \preccurlyeq B$ σημαίνει ότι το B έχει τουλάχιστον τόσα στοιχεία όσα και το A , μπορεί όμως να έχει και το ίδιο πλήθος στοιχείων. Διότι $A \sim B$ συνεπάγεται $A \preccurlyeq$. Ενώ το $A \prec B$ σημαίνει ότι το B έχει γνησίως περισσότερα στοιχεία από το A .

Παραδείγματα ισοπληθικότητας:

Εστω $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

1. Είναι $A = \{1, 2, 3, \dots\} \subsetneq \mathbb{N}$ αλλά ορίζοντας $h : \mathbb{N} \rightarrow A$ με $h(x) = x+1$ έχουμε $A \sim \mathbb{N}$.
2. $\mathbb{N} \sim \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$, $h : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 2, 4, \dots\}$ με $h(k) = 2k$. Βλέπουμε λοιπόν ότι ένα (άπειρο) σύνολο μπορεί να είναι ισοδύναμο με ένα γνήσιο υποσύνολό του.
3. Τα διαστήματα των πραγματικών αριθμών $(0, 1) \sim (0, 2)$, $h(x) = 2x$. Δηλαδή το διάστημα $(0, 1)$ έχει τον ίδιο αριθμό σημείων με το μεγαλύτερο σε μήκος $(0, 2)$.
4. Αν $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ τότε $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.

Ορίζω $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ με

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ h(k) = 2k & (k > 0) \\ h(-k) = 2k - 1 & (k > 0) \end{cases}$$

Και επειδή προφανώς $\mathbb{N} \preccurlyeq \mathbb{Z}$, από Schröder-Bernstein $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$.

[Ασκηση: Αν $A \sim B \sim \mathbb{N}$ και $A \cap B = \emptyset$ τότε $A \cup B \sim \mathbb{N}$.]

5. Το σύνολο \mathbb{Q} των ρητών είναι αριθμήσιμο (δηλ. $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$).

Προφανώς $\mathbb{N} \preccurlyeq \mathbb{Q}$.

Τώρα, για κάθε $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ υπάρχει μοναδικό ζεύγος πρώτων προς αλλήλους p και q ώστε $r = \pm \frac{p}{q}$. ($p, q \in \mathbb{N}$)

Ορίζω $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$

$$\begin{cases} f\left(+\frac{p}{q}\right) = 2 \cdot 5^p \cdot 7^q \\ f\left(-\frac{p}{q}\right) = 3 \cdot 5^p \cdot 7^q \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Έχουμε $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$, δηλαδή f είναι 1-1, άρα $\mathbb{Q} \preccurlyeq \mathbb{N}$. Χρησιμοποιούμε το θεμελιώδες θεώρημα της αριθμητικής σύμφωνα με το οποίο κάθε αριθμός έχει μοναδική παραγοντοποίηση σε γινόμενο δυνάμεων πρώτων αριθμών (τα 2, 3, 5, 7 είναι πρώτοι).

Σημείωση: Το αποτέλεσμα $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$ είναι σε μεγάλο βαθμό «παράδοξο» αφού ένα σύνολο «διακριτό» όπως το \mathbb{N} είναι ισοπληθικό με ένα σύνολο

όπως το \mathbb{Q} με «πυκνή» διάταξη. Η πρώτη μας σκέψη είναι ότι το \mathbb{Q} λόγω της διάταξης των στοιχείων του (δηλ. $\forall x, y \in \mathbb{Q} \exists z \in \mathbb{Q} (x < z < y)$), έχει πολύ περισσότερα στοιχεία.

6. $(0, 1) \sim (\alpha, \beta)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\text{π.χ. } f : (0, 1) \rightarrow (\alpha, \beta), f(x) = \alpha + (\beta - \alpha)x$$

Δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα έχει το ίδιο πλήθος σημείων με ένα οποιοδήποτε άλλο μεγαλύτερου ή μικρότερου μήκους.

7. $(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}) \sim \mathbb{R}$

$$f : (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \varepsilon \varphi x$$

$$\text{άρα } (0, 1) \sim \mathbb{R}.$$

Δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα έχει το ίδιο πλήθος σημείων με την απέραντη ευθεία.

8. $\mathbb{R} \sim (0, 1) \sim {}^{\mathbb{N}} 2 \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (Ασκηση) [Εδώ ορίζουμε $2 = \{0, 1\}$]

$$\text{Εύκολα } {}^{\mathbb{N}} 2 \sim \mathcal{P}(\mathbb{N}), f : {}^{\mathbb{N}} 2 \rightarrowtail \mathcal{P}(\mathbb{N}), f(h) = \{k | h(k) = 0\}^5$$

Αρκεί, για έχουμε όλες τις ισοδυναμίες, να δείξουμε ότι $(0, 1) \sim {}^{\mathbb{N}} 2$.

Ορίζουμε $g : {}^{\mathbb{N}} 2 \rightarrow (0, 1)$ με

$$\begin{aligned} g(f) &= \frac{1}{4} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(i)}{3^{i+1}} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{f(0)}{3} + \frac{f(1)}{3^2} + \frac{f(2)}{3^3} + \dots \end{aligned}$$

Η $f(0), f(1), \dots$ είναι μια ακολουθία από 0 και 1. Δύο τέτοιες ακολουθίες που διαφέρουν σε τουλάχιστον μία θέση θα δώσουν διαφορετικό άπειρο ανάπτυγμα. Άρα g είναι 1 – 1.

Για την άλλη κατεύθυνση ορίζουμε $h : (0, 1) \rightarrow {}^{\mathbb{N}} 2$ ως ακολούθως: δοθέντος $a \in (0, 1)$ έστω $f \in {}^{\mathbb{N}} 2$ η μοναδική συνάρτηση ώστε

$$a = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f(i)}{2^{i+1}} = \frac{f(0)}{2} + \frac{f(1)}{2^2} + \dots$$

και τα $f(i)$ δεν είναι τελικά όλα 1. (Άσκηση: Αποδείξτε ότι υπάρχει μοναδική τέτοια συνάρτηση.)

⁵Γενικώτερα: Για κάθε $X \subseteq A$ η συνάρτηση $h : A \rightarrow \{0, 1\}$ που ορίζεται από

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \in X \\ 1 & \text{αν } x \notin X \end{cases}$$

ονομάζεται χαρακτηριστική (συνάρτηση) του X ($h \in {}^A 2$). Η συνάρτηση $f : {}^A 2 \rightarrowtail \mathcal{P}(A)$ με $f(h) = \{x \mid h(x) = 0\}$ ορίζει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των υποσυνόλων και των χαρακτηριστικών (συναρτήσεών) τους.

Μέχρι τώρα όλα τα άπειρα σύνολα που εξετάσαμε είναι ισοπληθικά με το \mathbb{N} . Μήπως τελικά όλα τα άπειρα σύνολα είναι ισοπληθικά μεταξύ τους; Το ακόλουθο αποτέλεσμα του Cantor μας δείχνει πως όχι.

Θεώρημα 3.9 (Μη αριθμησιμότητα του \mathbb{R} , Cantor) *Eίναι $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$. Άλλα $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$. (Δ ηλαδή $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$)*

Απόδειξη: Εστω ότι υπάρχει $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Συμβολίζουμε $h(k) = h_k$, δηλ. $\mathbb{R} = \{h_0, h_1, h_2, \dots, h_k, \dots\}$. Αν μπορέσουμε να κατασκευάσουμε ένα πραγματικό $c \in \mathbb{R}$ ο οποίος να μην συμπίπτει με κανένα από τα h_i αυτού του συνόλου θα έχουμε αντίφαση, άρα το \mathbb{R} δεν είναι δυνατόν να είναι ισοπληθικό με το \mathbb{N} .

Δημιουργούμε δύο ακολουθίες a_n και b_n .

(σε ότι ακολουθεί το «πρώτο h_k » σημαίνει το « h_k με το μικρότερο δείκτη k »)

$$a_0 = h_0$$

$b_0 =$ το πρώτο h_k ώστε $h_k > h_0$. [Άρα όλα τα h με μικρότερους δείκτες είναι εκτός του διαστήματος $[a_0, b_0]$.]

$$a_1 = \text{το πρώτο } h_k \text{ ώστε } a_0 < h_k < b_0$$

$$b_1 = \text{το πρώτο } h_k \text{ ώστε } a_1 < h_k < b_0$$

...

$$a_{n+1} = \text{το πρώτο } h_k \text{ ώστε } a_n < h_k < b_n \text{ (}a_n \text{ και } b_n \text{ έχουν ήδη οριστεί).}$$

$b_{n+1} =$ το πρώτο h_k ώστε $a_{n+1} < h_k < b_n$ [Παρατηρούμε ότι τα h με μικρότερους δείκτες είναι εκτός του διαστήματος $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.]

Έχουμε $a_n \uparrow$, $b_n \downarrow$, $a_n < b_n \forall n$, και $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$.

Άρα υπάρχει $c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ το κοινό όριο της αύξουσας a_n και της φθίνουσας b_n . Τότε $c \neq h_k \forall k$, διότι κάθε h_k κείται αριστερότερα κάποιου a_n ή δεξιότερα κάποιου b_n , ενώ το c είναι μεγαλύτερο όλων των a_n και μικρότερο όλων των b_n .

Παρατήρηση: Το \mathbb{R} είναι το πρώτο σύνολο που αποδείχτηκε ότι έχει γνησίως περισσότερα στοιχεία από το \mathbb{N} . Ήταν το πρώτο συγκλονιστικό αποτέλεσμα της θεωρίας συνόλων. Ας σημειωθεί ότι χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα της πληρότητας του συνόλου \mathbb{R} για να πάρουμε το κοινό όριο c των ακολουθιών. Όλο το επιχείρημα μπορεί να εφαρμοστεί και στο \mathbb{Q} αλλά στο \mathbb{Q} δεν εξασφαλίζεται η ύπαρξη του c (στο \mathbb{Q} δεν ισχύει η πληρότητα).

Συμβολισμός: Με γράμματα κ, λ, μ θα συμβολίζουμε τους πληθάριθμους.

$\kappa < \lambda$ συμβολίζει το $\kappa \leq \lambda$ και $\kappa \neq \lambda$, δηλ. $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}} \leftrightarrow A \not\sim B$ και $A \not\sim B$.

[έχουμε αποδείξει ότι $\overline{\overline{\mathbb{N}}} < \overline{\overline{\mathbb{R}}}$.]

$$\text{Γράφουμε } n = \overline{\overline{\{0, 1, \dots, n-1\}}}, \text{ (στην πραγματικότητα θα δούμε ότι μπορούμε να ορίσουμε και } n = \{0, 1, \dots, n-1\} \text{ δηλ. } 0 = \overline{\overline{\emptyset}}$$

$$1 = \overline{\overline{\{0\}}}$$

$$2 = \overline{\overline{\{0, 1\}}}$$

$$\dots$$

Επίσης, $\aleph_0 = \overline{\overline{\mathbb{N}}}$. Δηλ. το n είναι ο πληθάριθμος των συνόλων με n το πλήθος στοιχεία και \aleph_0 είναι ο πληθάριθμος του συνόλου των φυσικών. \aleph (άλεφ) είναι το πρώτο γράμμα του εβραϊκού αλφαβήτου.

Ορισμός 3.10 (Αριθμητικές πράξεις - πληθική αριθμητική) Θα επεκτείνουμε τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού και των δυνάμεων σε όλους τους πληθαρίθμους.

1. (πληθική) πρόσθεση

Εστω A και B σύνολα. Μπορούμε να επιλέξουμε σύνολα A' και B' ξένα μεταξύ τους (δηλ. $A' \cap B' = \emptyset$) ώστε $A \sim A'$ και $B \sim B'$.

π.χ. $A' = \{0\} \times A$ και $B' = \{1\} \times B$. Οταν επιλέγουμε δύο τέτοια σύνολα A' και B' λέμε ότι το $A' \cup B'$ είναι η ξένη ένωση των A και B και γράφουμε $A \uplus B$.

$$\text{Ορίζουμε } \overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A' \cup B'}} = \overline{\overline{A \uplus B}}.$$

2. (πληθικός) πολλαπλασιασμός

$$\overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A \times B}}$$

3. (πληθική) δύναμη

$$\overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}}} = \overline{\overline{(B A)}}$$

Παρατηρήσεις: (i) Πρέπει να ελέγξουμε ότι οι ορισμοί είναι καλοί, δηλ. αν $A' \sim A, B' \sim B$ τότε $A' \uplus B' \sim A \uplus B, A' \times B' \sim A \times B, \overline{\overline{(B' A')}} \sim \overline{\overline{(B A)}}$, τετριμένο.

(ii) Επίσης πρέπει να ελέγξουμε ότι οι ορισμοί συμπίπτουν με τις πράξεις των πεπερασμένων πληθαρίθμων, δηλ. αν $\overline{\overline{A}} = n, \overline{\overline{B}} = m$ τότε $\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} = n + m, \overline{\overline{A}} \cdot \overline{\overline{B}} = n \cdot m, \overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}}} = n^m$. ('Ασκηση)

Θεώρημα 3.11 (Μερικοί νόμοι της πληθικής αριθμητικής) Για κάθε κ, λ, μ ,

$$(i) \quad \kappa + \lambda = \lambda + \kappa$$

$$(ii) \quad (\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu)$$

- (iii) $\kappa\lambda = \lambda\kappa$
- (iv) $\kappa(\lambda\mu) = (\kappa\lambda)\mu$
- (v) $\kappa(\lambda + \mu) = \kappa\lambda + \kappa\mu$
- (vi) $\kappa\lambda\kappa\mu = \kappa^{\lambda+\mu}$
- (vii) $\kappa^\mu\lambda^\mu = (\kappa\lambda)^\mu$
- (viii) $\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\mu}$

Απόδειξη: Τα παραπάνω ισχύουν επειδή ισχύουν αντίστοιχα οι κάτωθι συνολοθεωρητικοί νόμοι (A, B, C ξένα μεταξύ τους).

- (i)' $A \cup B = B \cup A$
- (ii)' $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- (iii)' $A \times B \sim B \times A$
- (iv)' $A \times (B \times C) \sim (A \times B) \times C$
- (v)' $A \times (B \cup C) \sim (A \times B) \cup (A \times C)$
- (vi)' $(^B A) \times (^C A) \sim (^{B \cup C} A)$
- (vii)' $(^C A) \times (^B B) \sim ^C(A \times B)$
- (viii)' ${}^C(^B A) \sim (^{C \times B} A)$

Παρατήρηση: Για οποιουσδήποτε πληθαρίθμους

- (i) $\kappa + 0 = \kappa = \kappa \cdot 1$ και $\kappa \cdot 0 = 0$
- (ii) Άν $\kappa_i \leq \lambda_i$ για κάθε i , $(1 \leq i \leq n)$ τότε

$$\begin{aligned} \kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_n &\leq \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \\ \kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_n &\leq \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \end{aligned}$$

Ορισμός 3.12 Ενα σύνολο A είναι άπειρο αν $\overline{\overline{A}} \neq n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

A είναι απαριθμητό αν $\overline{\overline{A}} \leq \aleph_0$.

A είναι αριθμήσιμο αν $\overline{\overline{A}} = \aleph_0$.

Αρα A αριθμήσιμο $\leftrightarrow \exists f : A \rightarrowtail \mathbb{N}$ ή ισοδύναμα $\exists f : \mathbb{N} \rightarrowtail A$. Τότε μπορούμε να αναπαραστήσουμε την f με $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ και να την ονομάσουμε μια (απ)αριθμητή των στοιχείων του A .

Παρατήρηση: Κάθε υποσύνολο ενός απαριθμητού συνόλου είναι απαριθμητό ($B \subseteq A \rightarrow \overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}} \leq \aleph_0$).

Θεώρημα 3.13 Κάθε απαριθμητό σύνολο είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο ($\delta\eta\lambda. \kappa \leq \aleph_0 \Rightarrow \kappa = \aleph_0 \text{ ή } \exists n \in \mathbb{N} \text{ ώστε } \kappa = n$).

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι αν $\kappa < \aleph_0$ τότε κ είναι πεπερασμένο. Υποθέτουμε $\overline{\overline{\kappa}} < \aleph_0$. Τότε υπάρχει $f : A \rightarrow \mathbb{N}$. Αν A δεν είναι πεπερασμένο τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n' > n$ ώστε $n' \in f[A]$.

Ορίζουμε⁶ συνάρτηση $g : \mathbb{N} \rightarrowtail f[A]$,

$$\begin{aligned} g(0) &= \text{το μικρότερο } y, y \in f[A] \\ g(n+1) &= \text{το μικρότερο } y, y > g(n) \text{ και } y \in f[A] \end{aligned}$$

Αρα έχουμε $\mathbb{N} \sim f[A] \sim A$. Αρα $A \sim \mathbb{N}$.

Θεώρημα 3.14 Αν A και B απαριθμητά τότε απαριθμητό είναι και το $A \cup B$.

Απόδειξη: Εστω $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ και $g : B \rightarrow \mathbb{N}$. Ορίζουμε $h : A \cup B \rightarrow \mathbb{N}$ με

$$\begin{aligned} h(x) &= 2f(x) && \text{αν } x \in A \\ h(x) &= 2g(x) + 1 && \text{αν } x \in B \setminus A \end{aligned}$$

Προφανώς h είναι 1-1. Αρα $\overline{\overline{A \cup B}} \leq \aleph_0$.

Πόρισμα 3.15 $\aleph_0 + n = \aleph_0 \forall n \in \mathbb{N}$ και $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

(Επειδή \aleph_0, n είναι απαριθμητά άρα είναι επίσης και το άθροισμα-ένωση, δηλαδή $\aleph_0 + n \leq \aleph_0$ και επειδή $\aleph_0 \leq \aleph_0 + n$ έχουμε $\aleph_0 + n = \aleph_0$. Το ίδιο και για το $\aleph_0 + \aleph_0$.)

Πόρισμα 3.16 Η ένωση κάθε πεπερασμένης οικογένειας απαριθμητών συνόλων είναι απαριθμητή. Επίσης $\underbrace{\aleph_0 + \dots + \aleph_0}_{n \text{ φορές}} = \aleph_0$.

⁶Ο ορισμός της συνάρτησης γίνεται με επαγωγή (αναδρομή). Αργότερα θα δούμε ότι στα πλαίσια της αξιωματικής συνολοθεωρίας (θεώρημα αναδρομής) τέτοιοι ορισμοί μπορούν να δικαιολογηθούν δηλ. υπάρχει η συνάρτηση με τις αναδρομικές ιδιότητες.

Θεώρημα 3.17 Άν A και B απαριθμητά και το $A \times B$ είναι απαριθμητό.
Επίσης $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ (διότι αν $\kappa \leq \aleph_0, \lambda \leq \aleph_0$ τότε $\kappa \cdot \lambda \leq \aleph_0 \cdot \aleph_0$). Αρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

Ορίζουμε $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ με $f(n) = \langle n, 0 \rangle$.

Ορίζουμε $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ με $g(\langle n, m \rangle) = 2^n \cdot 3^m$.

Από Schröder-Bernstein $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$.

Ασκηση: Να βρεθεί $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Πόρισμα 3.18 $\underbrace{\aleph_0 \cdot \aleph_0 \dots \aleph_0}_{n \text{ φορές}} = \aleph_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Πόρισμα 3.19 $\overline{\overline{\mathbb{Q}}} = \aleph_0$ ('Αλλη απόδειξη - έχει ήδη αποδειχθεί)

Εστω $\mathbb{Q}^+ = \{x | x \in \mathbb{Q} \wedge x > 0\}$

$\mathbb{Q}^- = \{x | x \in \mathbb{Q} \wedge x < 0\}$

Ορίζουμε $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ με $f(x) = \langle m, n \rangle$ όπου $x = \frac{m}{n} \wedge (m, n) = \text{μέγιστος κοινός διαιρέτης} = 1$ άρα $\overline{\overline{\mathbb{Q}^+}} \leq \overline{\overline{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}} = \aleph_0$. Αντιστρόφως, $\overline{\overline{\mathbb{Q}^+}} \geq \overline{\overline{\mathbb{N}}} = \aleph_0$.

Άρα $\overline{\overline{\mathbb{Q}^+}} = \overline{\overline{\mathbb{Q}^-}} = \aleph_0$. Άρα $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+ \Rightarrow \overline{\overline{\mathbb{Q}}} = \aleph_0 + 1 + \aleph_0 = \aleph_0$.

Θεώρημα 3.20 (Cantor) Για κάθε σύνολο A , $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$.

Απόδειξη: Προφανώς $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$. Επειδή $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ με $f(x) = \{x\}$.

Εστω ότι υπάρχει $g : \mathcal{P}(A) \rightarrow A$. Εστω $T = \{x | x \in A \wedge x \notin g^{-1}(x)\}$.

Είναι $g^{-1}(x) \subseteq A$ και $T \subseteq A$.

Ερώτηση: Είναι $g(T) \in T$;

$$g(T) \in T \Leftrightarrow g(T) \notin g^{-1}(g(T)) \Leftrightarrow g(T) \notin T$$

Λήμμα 3.21 Άν $\overline{\overline{A}} = \kappa$ τότε $\overline{\overline{\mathcal{P}(A)}} = 2^\kappa$.

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$${}^A\{0, 1\} \sim \mathcal{P}(A)$$

Δοθέντος $f \in {}^A\{0, 1\}$ έστω $X_f = \{x | x \in A \wedge f(x) = 0\}$.

Ορίζουμε $F : {}^A\{0, 1\} \rightarrow \mathcal{P}(A)$ με $F(f) = X_f \forall f \in {}^A\{0, 1\}$.

Πόρισμα 3.22 Για κάθε πληθύριθμο κ ,

$$\kappa < 2^\kappa < 2^{2^\kappa} < 2^{2^{2^\kappa}} < \dots$$

(από Θεώρημα Cantor). Άρα υπάρχει απειρία συνόλων με διαφορετικές πληθυρίτητες.

Θεώρημα 3.23 $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = 2^{\aleph_0}$ (έχει αποδειχθεί)

Πόρισμα 3.24 Το \mathbb{R} είναι μή αριθμήσιμο.

Πόρισμα 3.25 Το σύνολο των σημείων του επιπέδου $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ είναι ισοπληθικό με το \mathbb{R} .

Απόδειξη: $\overline{\overline{\mathbb{R}}} \times \overline{\overline{\mathbb{R}}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}} \cdot \overline{\overline{\mathbb{R}}} = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \overline{\overline{\mathbb{R}}}$.

Η ανακάλυψη αυτή αποτέλεσε μια έκπληξη για τον Cantor. Πώς είναι δυνατόν η ευθεία με το επίπεδο αλλά και με το χώρο να έχουν τον ίδιο αριθμό σημείων!

Θεώρημα 3.26 Το σύνολο Σ όλων των πεπερασμένων ακολουθιών των φυσικών αριθμών έχει πληθυκότητα \aleph_0 .

Απόδειξη: Εστω p_1, \dots, p_n, \dots αριθμηση των πρώτων αριθμών. (είναι άπειροι)

Ορίζουμε $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{N}$, $f(k_1, \dots, k_n) = p_1^{k_1+1} \cdots p_2^{k_2+1} \cdots p_n^{k_n+1}$.

f είναι μονομορφισμός από το θεώρημα μοναδικής παραγοντοποίησης. Άρα $\overline{\overline{\Sigma}} \leq \aleph_0$. Προφανώς $\overline{\overline{\Sigma}} \geq \aleph_0$.

Πόρισμα 3.27 Το σύνολο των πεπερασμένων ακολουθιών με όρους που ανήκουν σε ένα καθορισμένο απαριθμητό σύνολο $A \neq \emptyset$ είναι αριθμήσιμο.

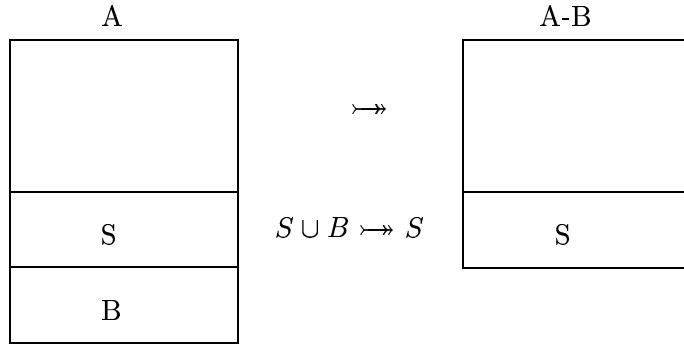
Πόρισμα 3.28 Το σύνολο όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων $Fin(A)$ ενός αριθμήσιμου συνόλου A είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη: Χάριν ευκολίας υποθέτουμε $A = \mathbb{N}$. Ορίζουμε μονομορφισμό $f : Fin(A) \hookrightarrow \Sigma$ με $f(X) = \langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle$ όπου $X = \{a_0, \dots, a_{n-1}\} \in Fin(A)$ και $a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1}$ (δηλ. f τακτοποιεί τα στοιχεία του X στη φυσική τους διάταξη).

Άρα $\overline{\overline{Fin(A)}} \leq \overline{\overline{\Sigma}} = \aleph_0$. Αλλά $\overline{\overline{Fin(A)}} \geq \aleph_0$. Άρα $\overline{\overline{Fin(A)}} = \aleph_0$.

Ορισμός 3.29 Ενας πραγματικός αριθμός b είναι αλγεβρικός εάν είναι ρίζα κάποιας εξίσωσης $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ όπου $a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{Q}$. Αν b δεν είναι αλγεβρικός τότε b είναι υπερβατικός (Transcendental).

Εστω $Al =$ το σύνολο των αλγεβρικών πραγματικών αριθμών, $Tr = \mathbb{R} \setminus Al$.



Σχήμα 2: Απόδειξη του λήμματος

Θεώρημα 3.30 $\overline{\overline{Al}} = \aleph_0$.

Απόδειξη: Κάθε εξίσωση της μορφής $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ μπορεί να παρασταθεί σαν μια διατεταγμένη n -άδα $\langle a_{n-1}, \dots, a_0 \rangle$ με $a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{Q}$. Επειδή $\overline{\overline{\mathbb{Q}}} = \aleph_0$, από το Πόρισμα 3.27 του προηγούμενου θεωρήματος το σύνολο αυτών των εξισώσεων είναι αριθμήσιμο. Εστω $q_1(x), q_2(x), \dots, q_n(x), \dots$ μία απαρίθμηση των εξισώσεων. Κάθε $q_n(x)$ έχει πεπερασμένο πλήθος ριζών. Άρα μπορούμε να ορίσουμε μονομορφισμό $f : Al \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ με $f(b) = \langle n, m \rangle$ όπου n είναι ο ελάχιστος αριθμός ώστε b είναι ρίζα της $q_n(x)$ και b είναι η m -οστή ρίζα στη φυσική διάταξη των πραγματικών ριζών της $q_n(x)$.

Άρα $\overline{\overline{Al}} \leq \overline{\overline{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}} = \aleph_0$. Αλλά Al είναι άπειρο επειδή περιέχει όλους τους ρητούς. Άρα $\overline{\overline{Al}} = \aleph_0$.

Πόρισμα 3.31 $\overline{\overline{Tr}} = 2^{\aleph_0}$.

Απόδειξη: $\overline{\overline{Tr}} = \overline{\overline{\mathbb{R} \setminus Al}}$. Εχουμε $\mathbb{R} = 2^{\aleph_0}$, $\overline{\overline{Al}} = \aleph_0$.

Πρώτα αποδεικνύουμε το εξής λήμμα: Εστω A σύνολο, B απαριθμητό υποσύνολο του A ώστε $A \setminus B$ έχει αριθμήσιμο υποσύνολο S . Τότε $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A \setminus B}}$.

Απόδειξη λήμματος: Από το σχήμα 2,
Διότι $S \cup B \sim S$.

Άρα αρκεί να αποδείξουμε ότι Tr έχει αριθμήσιμο υποσύνολο. Άλλα $\mathbb{R} \neq Al \Rightarrow Tr \neq \emptyset$.

Εστω $\vartheta \in Tr$, τότε $\vartheta, 2\vartheta, 3\vartheta, \dots, n\vartheta, \dots$ είναι αριθμήσιμο υποσύνολο των υπερβατικών. Άρα $\overline{\overline{Tr}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}} = 2^{\aleph_0}$. [Ο Cantor απέδειξε την ύπαρξη των υπερβατικών το 1873. Ο Hermite απέδειξε το 1873 ότι ο αριθμός e είναι υπερβατικός. Ο Lindemann απέδειξε το 1883 ότι ο π είναι επίσης υπερβατικός, και ότι κατά συνέπεια ο τετραγωνισμός του κύκλου είναι αδύνατος με κανόνα

και διαβήτη. Σε εντελώς διαφορετική αρχή στηρίζεται η απόδειξη του Liouville για την ύπαρξη υπερβατικών αριθμών το 1851.]

Στη συνέχεια, παρ'όλο που δεν έχουμε ακόμη παρουσιάσει όλα τα αξιώματα της συνολοθεωρίας και ως εκ τούτου δεν έχουμε αναπτύξει τη θεωρία συνόλων στο αξιωματικό της πλαίσιο, θα παρουσιάσουμε ένα αξίωμα, μια μαθηματική αρχή που υπήρξε πηγή προβληματισμού για τους μαθηματικούς. Υπήρξε το τελευταίο αλλά και το πιο επίμαχο από τα αξιώματα που παρουσιάσει ο Zermelo. Αναφέρεται στην επιλογή εκπροσώπων από ένα σύνολο συνόλων. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα αριθμήσιμο σύνολο $(\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ από ζεύγη παπουτσιών (δηλ. το κάθε Π_n είναι ένα ζεύγος παπουτσιών. Μπορούμε να επιλέξουμε ένα παπούτσι π_n από κάθε ζεύγος Π_n , δηλαδή μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει μία συνάρτηση επιλογής $f : \mathbb{N} \rightarrow \dots$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $f(n) \in \Pi_n$; Η απάντηση είναι ναι, διότι μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση f με $f(n) =$ το αριστερό παπούτσι του κάθε ζεύγους Π_n . Ας φανταστούμε τώρα ότι τα Π_n δεν είναι ζεύγη παπουτσιών αλλά ζεύγη καλτσών, δηλαδή ότι έχουμε ένα αριθμήσιμο σύνολο $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ όπου το κάθε K_n είναι ένα σύνολο αποτελούμενο από δύο κάλτσες. Μπορούμε και σ'αυτή την περίπτωση να κάνουμε την ίδια όπως και πριν επιλογή; Εδώ υπάρχει ένα πρόβλημα. Δεν μπορούμε να ορίσουμε την f με τον ίδιο τρόπο διότι τώρα δεν υπάρχει τρόπος να διαχωρίσουμε τις κάλτσες του κάθε ζεύγους (δεν υπάρχει αριστερή και δεξιά κάλτσα).⁷ Αν φανταστούμε ότι το σύνολο αυτών των ζευγών είναι πεπερασμένο δηλ. αν έχουμε να κάνουμε με ένα σύνολο $(K_n)_{n \in m}$, όπου $m \in \mathbb{N}$, τότε η ύπαρξη μιας τέτοιας συνάρτησης μπορεί να αποδειχθεί επαγωγικά με επαγωγή στο n . Άλλα στη γενική περίπτωση $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ή και πιο γενικά όταν στην θέση του \mathbb{N} είναι ένα οποιοδήποτε άπειρο σύνολο τότε το μόνο που μας απομένει είναι να υποθέσουμε την ύπαρξη αυτής της συνάρτησης επιλογής.

Αξίωμα της επιλογής - Axiom of Choice (AC)

Εαν $\langle A_i \rangle_{i \in I}$ είναι μη-κενή οικογένεια μη-κενών συνόλων (δηλ. $I \neq \emptyset$ και $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$) τότε $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Δηλαδή $\exists f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ ώστε $f(i) \in A_i$.

Κάθε στοιχείο του $\prod_{i \in I} A_i$ ονομάζεται συνάρτηση επιλογής για την οικογένεια.

Ισοδύναμη διατύπωση (AC^{}):* Αν $A \neq \emptyset$, τότε υπάρχει συνάρτηση $f : P(A) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow A$ έτσι ώστε $f(X) \in X$ για κάθε $X \in \text{dom}(f)$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται συνάρτηση επιλογής στο A .

Παρατήρηση: Σύμφωνα με τον ορισμό 2.4 κάθε μέλος του καρτεσιανού γινομένου $\prod_{i \in I} A_i$ είναι μία συνάρτηση επιλογής για την οικογένεια $\langle A_i \rangle_{i \in I}$.

⁷Φανταζόμαστε ότι οι δύο κάλτσες είναι ακριβώς οι ίδιες δηλαδή δεν υπάρχει τρόπος φυσικού ή άλλου διαχωρισμού μεταξύ τους.

Άρα το να λέμε ότι υπάρχει μια τέτοια συνάρτηση επιλογής είναι ισοδύναμο με το να λένε ότι το καρτεσιανό γινόμενο είναι μη κενό. Στην ισοδύναμη διατύπωση η συνάρτηση f μας δίνει την δυνατότητα μέσω των τιμών της να «επιλέγουμε» ένα στοιχείο από κάθε μη κενό υποσύνολο του A . Στο επόμενο θεώρημα θα αποδείξουμε ότι οι δύο αυτές διατυπώσεις είναι όντως ισοδύναμες.

Θεώρημα 3.32 $AC \Leftrightarrow AC^*$.

Απόδειξη: \Rightarrow : Εστω $F = \{\langle X, X \rangle | X \subseteq A \text{ και } X \neq \emptyset\}$. Η F είναι η οικογένεια των μη-κενών υποσυνόλων του A , με δείκτη τον εαυτό τους, δηλ. η οικογένεια $\langle X_X \rangle_{X \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}}$ και $X_X = X$.

Από αξιώματα επιλογής $\prod F \neq \emptyset$ ($\prod F = \{f | \text{dom } f = \text{dom } F \& \forall X \in \text{dom } f, f(X) \in F(X)\}$). Εστω λοιπόν $f \in \prod F$. Τότε $f(X) \in X \ \forall X \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$. Άρα f είναι συνάρτηση επιλογής στο A .

\Leftarrow : Ας υποθέσουμε ότι ισχύει το AC^* . Έστω τώρα $\langle A_i \rangle_{i \in I}$ μία μη κενή οικογένεια μη κενών συνόλων. Θέτουμε $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Τότε από το AC^* υπάρχει συνάρτηση επιλογής f στο A (δηλ. για κάθε $X \subseteq A$, $X \neq \emptyset$ ισχύει $f(X) \in X$). Ορίζουμε

$$g = \{\langle i, f(A_i) \rangle \mid i \in I\}$$

Τότε g είναι συνάρτηση επιλογής για την οικογένεια $\langle A_i \rangle_{i \in I}$ επειδή $f(A_i) \in A_i, \forall i \in I$.

Θεώρημα 3.33 Εάν κ είναι άπειρος πληθικός τότε $\aleph_0 \leq \kappa$.

Απόδειξη: Έστω A ένα άπειρο σύνολο με πληθάριθμο κ και έστω f συνάρτηση επιλογής στο A . Ορίζουμε μία ακολουθία $\langle a_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ στοιχείων του A ως ακολούθως:

$$a_0 = f(A)$$

$a_n = f(A - \{a_0, \dots, a_{n-1}\})$, τα a_0, \dots, a_{n-1} έχουν ήδη οριστεί.

Σε κάθε βήμα η f είναι καλά ορισμένη. Επειδή $A - \{a_0, \dots, a_{n-1}\} \neq \emptyset$, κι' αυτό επειδή A είναι άπειρο, $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ και $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \sim \mathbb{N}$. Άρα $\mathbb{N} \leq \kappa$.

Θεώρημα 3.34 (AC)⁸ H ένωση μιας απαριθμητής οικογένειας απαριθμητών συνόλων είναι απαριθμητό σύνολο.

Απόδειξη: Για πεπερασμένη οικογένεια απαριθμητών συνόλων το θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί με απλή μαθηματική επαγωγή στον αριθμό των μελών της οικογένειας (χωρίς τη χρήση του αξιώματος της επιλογής). Για τη συνέχεια λοιπόν υποθέτουμε ότι δίδεται μια αριθμήσιμη οικογένεια $\langle A_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ έτσι ώστε $\overline{\overline{A}_i} \leq \aleph_0, \forall i \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $B_i = A_i - \bigcup_{j < i} A_j$. Τότε τα B_i είναι ξένα μεταξύ τους (δηλ. $B_i \cap B_j = \emptyset, \text{ για } i \neq j$) και κάθε B_i είναι απαριθμητό

⁸ Οταν σε ένα θεώρημα ή απόδειξη υπάρχει το AC αυτό σημαίνει ότι στην απόδειξη χρησιμοποιούμε το αξιώμα της επιλογής, AC.

καθώς και $\cup_{i \in \mathbb{N}} B_i = \cup_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Επειδή κάθε B_i είναι απαριθμητό, για κάθε $i \in \mathbb{N}$ υπάρχει $f_i : B_i \rightarrow \mathbb{N}$. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει μία τέτοια f_i για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Τώρα ορίζουμε $h : \cup_{i \in \mathbb{N}} B_i \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ με $h(x) = \langle i, f_i(x) \rangle$ όπου i είναι ο μοναδικός αριθμός ώστε $x \in B_i$. Η h είναι μονομορφισμός. Επειδή: αν υποθέσουμε $h(x) = h(y)$ τότε $\langle i, f_i(x) \rangle = \langle j, f_j(y) \rangle \Rightarrow i = j$ και $f_i(x) = f_j(y) \Rightarrow x = y$, επειδή $f_i : B_i \rightarrow \mathbb{N}$ είναι μονομορφισμός.

Άρα $\overline{\cup_{i \in \mathbb{N}} B_i} \leq \overline{\mathbb{N} \times \mathbb{N}} = \aleph_0 \Rightarrow \cup_{i \in \mathbb{N}} A_i \leq \aleph_0$.

Όλα είναι καλά στην απόδειξη εκτός από το ότι σε κάποιο σημείο έχουμε υποθέσει την ύπαρξη μιας f_i για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Για να ορίσουμε αυτά τα f_i δουλεύουμε ως εξής:

Για κάθε $i \in \mathbb{N}$ έστω $S_i = \{f | f \in {}^{B_i} \mathbb{N}$ και f είναι 1-1}. Από υπόθεση $S_i \neq \emptyset$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Από αξιώματα επιλογής $\prod_{i \in \mathbb{N}} S_i \neq \emptyset$. Άρα έστω $G \in \prod_{i \in \mathbb{N}} S_i$. Ορίζουμε $f_i = G(i)$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Τότε h είναι ο απαιτούμενος μονομορφισμός από το $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ στο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Ασκηση: (AC) Εστω A σύνολο μη-κενών συνόλων, δηλ. $a \in A \Rightarrow a \neq \emptyset$. Τότε $\exists f$ με $A = \text{dom}(f)$ ώστε $f(a) \in a$, $\forall a \in A$. [Λέμε την f συνάρτηση επιλογής για το A .]

Παρατήρηση: Επιλογές μπορεί να υπάρχουν, όταν μπορούν να οριστούν, και χωρίς το αξιώμα της επιλογής.

Παράδειγμα: Εστω A σύνολο μη-κενών υποσυνόλων πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $a \in A \rightarrow a \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ (π.χ. A είναι ένα σύνολο ανοικτών συνόλων). Τότε υπάρχει συνάρτηση επιλογής για το A .

(Απόδειξη χωρίς το AC): Έστω $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ μια αρίθμηση του \mathbb{Q} . Η συνάρτηση επιλογής μπορεί να οριστεί ως $f : A \rightarrow \mathbb{Q}$, όπου $f(a) \in a$ είναι ο πρώτος ρητός του a που απαντάται στην πιο πάνω αρίθμηση. Οπότε αν A σύνολα ξένα μεταξύ τους τότε f είναι 1-1.

Λήμμα 3.35 (AC) Αν A, B μη-κενά σύνολα τότε $\exists f : A \rightarrow B \Leftrightarrow \exists g : B \rightarrow A$.

Απόδειξη: \Rightarrow Εστω $a \in A$. Ορίζουμε $g : B \rightarrow A$ επί με

$$\begin{aligned} g(x) &= f^{-1}(x) && \text{αν } x \in f[A] \\ g(x) &= a && \text{αν } x \notin f[A] \end{aligned}$$

\Leftarrow Εστω $g : B \rightarrow A$ και έστω F μια συνάρτηση επιλογής στο B . Ορίζουμε $f : A \rightarrow B$ με

$$f(x) = F(\{y \mid y \in B \wedge g(y) = x\}).$$

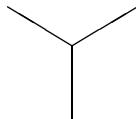
[Παρατήρηση:] Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- (i) $A \preceq B$
- (ii) $\exists f : B \rightarrow A$

Λήμμα 3.36 (AC) Εστω A αναπαρίθμητο και $f : A \rightarrow \mathbb{N}$. Τότε υπάρχει αναπαρίθμητο $B \subseteq A$ ώστε f είναι σταθερή στο B .

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}[\{n\}]$. Αν το καθένα από τα $f^{-1}[\{n\}]$ είναι απαριθμητό τότε η ένωση είναι απαριθμητή, άρα A απαριθμητό (άτοπο). Άρα για κάποιο n , $f^{-1}[\{n\}] \subseteq A$ είναι αναπαρίθμητο και βέβαια $x \in f^{-1}[\{n\}] \Rightarrow f(x) = n$ δηλ. η f είναι σταθερή στο $B = f^{-1}[\{n\}]$.

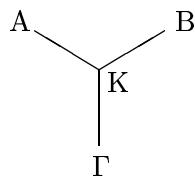
Παράδειγμα: Ένα τρίκρανο στο επίπεδο είναι κάθε σχήμα που έχει τη μορφή



με τις τρεις ακτίνες ίσες και τη γωνία μεταξύ των ακτίνων 120. Δύο τρίκρανα είναι μη τεμνόμενα όταν δεν έχουν κοινό σημείο. Ας φανταστούμε τώρα ένα σύνολο από (ανά δύο) μη τεμνόμενα τρίκρανα στο επίπεδο. Μέχρι πόσο μπορεί να φθάσει το πλήθος ενός τέτοιου συνόλου; Ας σημειωθεί ότι σε ένα τέτοιο σύνολο το κάθε τρίκρανο μπορεί να έχει διαφορετικό μέγεθος και διαφορετική κλίση από άλλο.

Πρόταση 3.37 Κάθε τέτοιο σύνολο A μη τεμνομένων τρικράνων στο επίπεδο είναι απαριθμητό.

Απόδειξη: Κάθε τρίκρανο z θα έχει τη μορφή



Το K είναι το κέντρο του και το συμβολίζουμε $ct(z)$ και το μήκος της ακτίνας AK το συμβολίζουμε με $\text{rad}(z)$. Όταν δύο τρίκρανα z_1 και z_2 δεν τέμνονται θα γράφουμε $z_1 \cap z_2 = \emptyset$. Όταν δύο τρίκρανα $z_1 \subseteq z_2$ είναι το ένα μέρος του άλλου θα λέμε ότι το z_1 είναι υποτρίκρανο του z_2 (σ' αυτή την περίπτωση βέβαια τα z_1 και z_2 θα έχουν κοινό κέντρο και οι ακτίνες του z_1 θα είναι υποδιαστήματα του z_2).

Θα αποδείξουμε την πρόταση με την εις άτοπο απαγωγή.

Εστω A αναπαρίθμητο.

Εστω $z \in A$, τότε $\text{rad}(z) > 0$. Εστω n το ελάχιστος αριθμός που ανήκει στο \mathbb{N} ώστε $\frac{1}{n} < \text{rad}(z)$ και έστω $p(z)$ το υποτρίκρανο του z με το ίδιο κέντρο και $\text{rad} = \frac{1}{n}$. Τότε για z_1, z_2 διαφορετικά στοιχεία του A , $z_1 \cap z_2 = \emptyset$ άρα

$p(z_1) \cap p(z_2) = \emptyset$ (ως υποσύνολα διαφορετικών σημειοσυνόλων). Αρα το $p[A]$ είναι σύνολο μη τεμνομένων τριχράνων και επειδή $p : A \rightarrowtail p[A]$, το $p[A]$ είναι επίσης αναπαρίθμητο.

Σημειώστε ότι $z \in p[A] \Rightarrow \text{rad}(z) \in \mathbb{Q}^+$.

Ορίζουμε $g : p[A] \rightarrow \mathbb{Q}$ με $g(z) = \text{rad}(z)$. Επειδή $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$, από προηγούμενο λήμμα υπάρχει αναπαρίθμητο $B \subseteq p[A]$ στο οποίο g είναι σταθερή, έστω $g(z) = s$ για $z \in B$, δηλαδή όλα τα τρίχρανα στο B έχουν ίδια ακτίνα μήκους s .

Εστω $t : \mathbb{N} \rightarrowtail \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ (υπάρχει από προηγούμενο αποτέλεσμα).

Για $z \in B$ έστω $m(z)$ είναι ο ελάχιστος $m \in \mathbb{N}$ ώστε $|t(m) - ct(z)| \leq \frac{s}{6}$, δηλ. $|t(m(z)) - ct(z)| \leq \frac{s}{6}$ (Δηλαδή το $t(m(z))$ είναι ένα σημείο του επιπέδου με ρητές συντεταγμένες το οποίο απέχει από το $ct(z)$ απόσταση μικρότερη από το $\frac{s}{6}$).

Τώρα για διαφορετικά $z_1, z_2 \in B$ από γεωμετρική θεώρηση επειδή $z_1 \cap z_2 = \emptyset$, $|ct(z_1) - ct(z_2)| \geq \frac{s}{2}$. Δηλαδή δύο ίσα τρίχρανα δεν μπορούν να «πλησιάσουν» το ένα το άλλο, χωρίς να τμηθούν, με τα κέντρα τους να απέχουν απόσταση μικρότερη του ημίσεος της ακτίνας τους.

Αρα $|t(m(z_1)) - t(m(z_2))| \geq \frac{s}{6}$. Δηλαδή εφόσον τα δύο διαφορετικά αλλά με ίση ακτίνα τρίχρανα δεν μπορούν να «πλησιάσουν» ώστε τα κέντρα τους να απέχουν λιγότερο από το μισό της ακτίνας τους, τα ρητά σημεία που επιλέξαμε γιαυτά σε καμιά περίπτωση δεν μπορούν να ταυτιστούν.

Αρα $m(z_1) \neq m(z_2)$.

Αυτό σημαίνει ότι η αντιστοιχία $m : B \rightarrowtail \mathbb{N}$ είναι 1–1, άτοπο επειδή το B είναι αναπαρίθμητο.

4 Αξιωματική συνολοθεωρία

Στα προηγούμενα κεφάλαια αναφερθήκαμε σε κάποια αξιώματα καθώς και στην ανάγκη να υπάρξουν αξιώματα ώστε να γίνονται δεκτά μόνον τα σύνολα που η ύπαρξή τους προκύπτει από αυτά με λογική παραγωγή. Το πρότυπο κάθε αξιωματικής θεωρίας είναι η Γεωμετρία του Ευκλείδη όπου από κάποιες απλές αδιαμφισβήτητες αρχές (τα αξιώματα) προκύπτουν όλες οι αλήθειες της Γεωμετρίας. Σε πλήρη αναλογία μ' αυτό το πρότυπο ο Zermelo διατύπωσε τα αξιώματα της συνολοθεωρίας και αργότερα ο Fränkel με μια δικιά του συμπλήρωση έδωσε την τελική τους μορφή.

Οριστικές συνθήκες — Η γλώσσα της συνολοθεωρίας

Για να διατυπώσουμε τα αξιώματα πρέπει να είμαστε σε θέση να χρησιμοποιούμε σχέσεις - συνθήκες που αφορούν στα αντικείμενα - σύνολα π.χ. για να σχηματίσουμε το σύνολο των συγκλινουσών ακολουθιών στο \mathbb{R} θα πρέπει να είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε τη συνθήκη «το x είναι μία συγλίνουσα ακολουθία στο \mathbb{R} ». Και επειδή στη συνολοθεωρία ασχολούμαστε με όλες τις ιδιότητες των συνόλων, όσο γενικές και αν είναι αυτές, θα πρέπει να εξετάσουμε και τον τρόπο με τον οποίο διατυπώνουμε τις οποιεσδήποτε συνθήκες δηλ. να εξετάσουμε ποιά είναι η γλώσσα της συνολοθεωρίας.

Οι συνθήκες ορίζουν ιδιότητες των αντικειμένων-συνόλων. Υπάρχουν μονεμελείς συνθήκες, διμελείς συνθήκες κ.ο.κ. Αν P είναι μία μονομελής συνθήκη γράφουμε $P(x)$ για να εκφράσουμε ότι το αντικείμενο x έχει την ιδιότητα P της συνθήκης, $\neg P(x)$ για να πούμε ότι το x δεν έχει αυτή την ιδιότητα. Παρομοίως γράφουμε $P(x, y), P(x, y, z), \dots, P(x_1, \dots, x_n)$ για διμελείς, τριμελείς και π-μελείς συνθήκες. Επιθυμούμε οι συνθήκες να είναι, όπως λέμε, οριστικές δηλ. να μπορεί να είναι καθορισμένο χωρίς αμφισβήτηση πότε η συνθήκη μπορεί να αληθεύει και πότε όχι. Αν δεν ορίσουμε ακριβώς πότε μια συνθήκη είναι οριστική μπορεί να οδηγηθούμε σε περίεργες καταστάσεις-παράδοξα.

Το παράδοξο του Berry

Εστω A το σύνολο των φυσικών αριθμών που μπορούν να οριστούν με μία πρόταση της ελληνικής γλώσσας που περιέχει λιγότερα από 300 γράμματα. A είναι πεπερασμένο επειδή υπάρχει μόνον ένα πεπερασμένο πλήθος τέτοιων προτάσεων ($< 50^{300}$). Αρα υπάρχει ένας αριθμός που δεν περιέχεται στο A . Εστω r ο μικρότερος αριθμός που δεν είναι στο A . Τότε « x είναι ο μικρότερος αριθμός που δεν ορίζεται με μία πρόταση της ελληνικής γλώσσας που περιέχει λιγότερες από 300 λέξεις» είναι μία συνθήκη $P(x)$ που ορίζει τον αριθμό r δηλ. ισχύει $P(r)$ και r είναι ο μοναδικός αριθμός που την ικανοποιεί. Άλλα αυτή η συνθήκη, ως πρόταση της ελληνικής γλώσσας, ορίζει τον r με λιγότερες από 300 λέξεις, άρα $r \in A$.

Για να παρακάμψουμε τέτοιες ασάφειες αποφασίζουμε να εκφράσουμε τις συνθήκες σε μια γλώσσα αυστηρά προσδιορισμένη. Θα θεωρούμε ότι η συν-

Θήκη είναι οριστική μόνον αν μπορούμε να την γράφουμε αρχίζοντας από συνθήκες της μορφής $x \in y$ ή $x = y$ και χρησιμοποιώντας τους λογικούς συνδέσμους και τους ποσοδείκτες. Δηλαδή μπορούμε να ορίσουμε τις οριστικές συνθήκες χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο επαγωγικό ορισμό.

Ορισμός 4.1 *Υποθέτουμε ότι τα x και y αναφέρονται σε σύνολα. Τα ακόλουθα δίνουν τον γενικευμένο επαγωγικό ορισμό της οριστικής συνθήκης.*

1. *Κάθε συνθήκη της μορφής $x \in y$ και $x = y$ είναι οριστική.*

2. *Αν Θ και Ψ είναι οριστικές συνθήκες τότε*

$$(\Theta \wedge \Psi), (\Theta \vee \Psi), \neg\Theta, (\Theta \rightarrow \Psi), (\Theta \leftrightarrow \Psi), \forall x\Theta, \exists x\Theta$$

είναι οριστικές συνθήκες.

3. *Οριστική συνθήκη είναι μόνον αυτή που γράφεται με διαδοχικές εφαρμογές των προηγουμένων βημάτων 1 και 2.*

Παραδείγματα

1. Η συνθήκη «το x είναι υποσύνολο του y » δηλ. το $x \subseteq y$ είναι οριστική διότι $x \subseteq y$ γράφεται ως $\forall z(z \in x \rightarrow z \in y)$ δηλ. γράφεται με τη χρήση των $z \in x$ και $z \in y$, τη χρήση του λογικού συνδέσμου \rightarrow και του ποσοδείκτη $\forall z$.

2. Η συνθήκη $x = \{y\}$ είναι οριστική. Κι' αυτό διότι είναι ισοδύναμη με το $\forall t(t \in x \leftrightarrow t = y)$

3. Η συνθήκη $x = \{y, z\}$ είναι οριστική διότι είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη $\forall t(t \in x \leftrightarrow t = y \vee t = z)$.

4. Η συνθήκη $x = \langle y, z \rangle$ είναι οριστική διότι είναι ισοδύναμη με την $x = \{\{y\}, \{y, z\}\}$ και αυτή είναι ισοδύναμη με την $\exists z \exists w(z = \{y\} \wedge w = \{y, z\} \wedge x = \{z, w\})$ και οι συνθήκες $z = \{y\}$, $w = \{y, z\}$, $x = \{z, w\}$ είναι όλες οριστικές.

Κλάσεις

Εάν $P(x)$ είναι μία μονομελής οριστική συνθήκη τότε η συλλογή $\{x \mid P(x)\}$ των αντικειμένων που ικανοποιούν τη συνθήκη P ονομάζεται κλάση. Είδαμε (παράδοξο του Russell) ότι κάθε κλάση δεν είναι σύνολο. Τα αξιώματα της συνολοθεωρίας θα μας παρέχουν τις αρχές με βάση τις οποίες θα μπορούμε να αποδεικνύουμε ότι κάποια σύνολα υπάρχουν. Θα καλούμαστε να αποδείξουμε (ή να δεχθούμε ως αξιώματα) μερικές φορές ότι αν $P(x)$ είναι οριστική συνθήκη τότε υπάρχει ένα σύνολο A για το οποίο ισχύει $\forall x(x \in A \leftrightarrow P(x))$. Τότε ισοδύναμα θα λέμε ότι η κλάση $\{x \mid P(x)\}$ είναι σύνολο π.χ. η κλάση $\{x \mid x \notin x\}$ δεν είναι σύνολο ενώ αν x και y είναι σύνολα η κλάση $\{z \mid z = x \vee z = y\}$ είναι σύνολο (βλέπε αξιώματα του ζεύγους), το σύνολο $\{x, y\}$.

Τα Αξιώματα Zermelo-Fraenkel της Θεωρίας Συνόλων

A1. *Αξίωμα της έκτασης:* Για κάθε σύνολο A και κάθε σύνολο B

$$A = B \leftrightarrow \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

Το αξίωμα μας λέει ότι αν A και B έχουν τα ίδια στοιχεία τότε ταυτίζονται. Ή διαφορετικά ότι $A \neq B$ μόνον στην περίπτωση που υπάρχει ένα στοιχείο του ενός που δεν είναι στοιχείο του άλλου.

A2. *Αξίωμα του κενού συνόλου:* Υπάρχει ένα σύνολο \emptyset έτσι ώστε $\forall x (x \notin \emptyset)$ [δηλ. το \emptyset δεν έχει κανένα στοιχείο].

Με άλλη διατύπωση το αξίωμα του κενού συνόλου λέει ότι $\exists z \forall x (x \notin z)$. Το κάθε τέτοιο z σύμφωνα με το αξίωμα της έκτασης είναι μοναδικό και το μοναδικό τέτοιο σύνολο το συμβολίζουμε με \emptyset .

Και στα αξιώματα που ακολουθούν, πάλι σύμφωνα με το αξίωμα της έκτασης, το σύνολο του οποίου η ύπαρξη εξασφαλίζεται μέσω του εκάστοτε αξιώματος θα είναι μοναδικό.

A3. *Αξίωμα του ζεύγους:* Για κάθε σύνολα x, y υπάρχει ένα σύνολο z , που το συμβολίζουμε με $\{x, y\}$ (δηλ. $z = \{x, y\}$) ώστε

$$\forall w (w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y)$$

A4. *Αξίωμα της ένωσης:* Για κάθε σύνολο x υπάρχει ένα σύνολο $\cup x$, που αποτελείται από όλα τα στοιχεία των στοιχείων του x δηλ.

$$\forall x \underbrace{\exists y}_{\cup x} \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists w (w \in x \wedge z \in w))$$

A5. *Αξίωμα του δυναμοσυνόλου:* Για κάθε σύνολο x υπάρχει το σύνολο όλων των υποσυνόλων του x . Δηλ.

$$\forall x \underbrace{\exists y}_{\mathcal{P}(x)} \forall w (w \in y \leftrightarrow w \subseteq x)$$

$$(w \subseteq x \text{ είναι το } \forall t (t \in w \rightarrow t \in x))$$

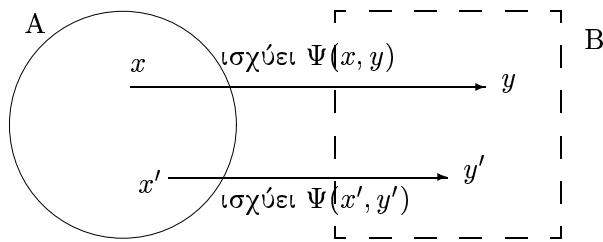
Πριν προχωρήσουμε στη διατύπωση του αξιώματος της αντικατάστασης χρειαζόμαστε έναν ορισμό.

Ορισμός 4.2 Μία διμελής οριστική συνθήκη $\Psi(x, y)$ είναι προτασιακή συνάρτηση εάν για κάθε x υπάρχει μοναδικό y ώστε να ισχύει η $\Psi(x, y)$, δηλ. ισχύει το $\forall x \exists!y \Psi(x, y)$ όπου όταν γράφουμε $\exists!y P(y)$ για οποιαδήποτε συνθήκη $P(y)$ αυτό σημαίνει $\exists y P(y) \wedge \forall y \forall y' (P(y) \wedge P(y') \rightarrow y = y')$.

Η προτασιακή συνάρτηση λειτουργεί όπως και μία συνάρτηση (ορισμός ref-function). Σε κάθε x του «σύμπαντος» των συνόλων αντιστοιχεί ένα μοναδικό y , συγκεκριμένα το y για το οποίο ισχύει η σχέση $\Psi(x, y)$. Η διαφορά με την έννοια της συνάρτησης είναι ότι ως συνάρτηση θεωρείται μία «συλλογή» διατεταγμένων ζευγών ενώ ως προτασιακή συνάρτηση η διατύπωση στη γλώσσα της συνολοθεωρίας ενός «κανόνα» αντιστοιχίας. Βέβαια στην περίπτωση της προτασιακής συνάρτησης έχουμε επιπλέον ότι το «πεδίο ορισμού» της είναι όλο το σύμπαν των συνόλων.

Για παράδειγμα η συνθήκη $x = y$ είναι μια προτασιακή συνάρτηση. Επίσης $\{x\} = y$ είναι προτασιακή συνάρτηση.

A6. Αξίωμα της αντικατάστασης: Για κάθε προτασιακή συνάρτηση $\Psi(x, y)$ και κάθε σύνολο A υπάρχει ένα σύνολο $A' = \{y | \exists x (x \in A \wedge \Psi(x, y))\}$, δηλ. η συλλογή των εικόνων των στοιχείων του A από τη $\Psi(x, y)$ αποτελεί σύνολο (βλ. Σχήμα 3).



Σχήμα 3: Αξίωμα της αντικατάστασης

Παρατήρηση: Με τα αξιώματα που προηγήθηκαν μόνο για πεπερασμένα σύνολα μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξή τους π.χ. Ξέρουμε ότι υπάρχει το \emptyset άρα θα υπάρχει (από (A3) το $\{\emptyset, \emptyset\} = \{\emptyset\}$. Άρα πάλι από (A3) το $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Ενδεχομένως να χρησιμοποιήσουμε το A5 για να πάρουμε το (πάλι πεπερασμένο) $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$. Αλλά δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε έτσι ένα άπειρο σύνολο. Το ότι υπάρχει ένα άπειρο σύνολο πρέπει να το υποθέσουμε ως αξίωμα.

Ορισμός 4.3 Για κάθε σύνολο x ορίζουμε $x^+ = x \cup \{x\}$.

π.χ. $\emptyset^+ = \{\emptyset\}$, $\{\emptyset\}^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

A7. Αξίωμα του απείρου:

$$\exists y (\emptyset \in y \wedge \forall x (x \in y \rightarrow x^+ \in y))$$

Το y που υπάρχει λόγω αυτού του αξιώματος ικανοποιεί την αντίληψη που έχουμε για τα άπειρα σύνολα. Διότι το \emptyset ανήκει σ' αυτό το σύνολο και

όποτε x ανήκει στο y έχουμε ότι x^+ ανήκει στο y . Άρα όλα τα $\emptyset, \emptyset^+, \emptyset^{++}, \dots$ που είναι διαφορετικά μεταξύ τους ανήκουν στο y οπότε το y έχει «άπειρα» στοιχεία, δηλαδή είναι ένα άπειρο σύνολο.

P1. Αρχή του διαχωρισμού:

Εάν A είναι σύνολο και $\Phi(x)$ είναι μονομελής οριστική συνθήκη τότε υπάρχει ένα σύνολο B ώστε $x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge \Phi(x)$.

(Δηλαδή το B είναι το υποσύνολο των στοιχείων του A που ικανοποιούν την $\Phi(x)$).

Θεώρημα 4.4 Η αρχή του διαχωρισμού προκύπτει ως θεώρημα από τα αξιώματα της συνολουεωρίας.

Απόδειξη: Έχουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: Αν $\forall x (x \in A \rightarrow \neg\Phi(x))$ τότε θέτουμε $B = \emptyset$.

Περίπτωση 2: Εστω ότι υπάρχει $a \in A$ και $\Phi(a)$. Ορίζουμε προτασιακή συνάρτηση $\Psi(x, y)$ ως εξής:

$$\Psi(x, y) \leftrightarrow (x \in A \wedge \Phi(x) \wedge y = x) \vee (\neg(x \in A \wedge \Phi(x)) \wedge y = a)$$

Δηλαδή η προτασιακή αυτή συνάρτηση είναι η διατύπωση στη γλώσσα της συνολοθεωρίας του ακόλουθου «κανόνα» αντιστοιχίας: Δοθέντος x τότε εάν μεν το x ανήκει στο A και ικανοποιεί τη συνθήκη $\Phi(x)$ τότε αντιστοιχείται στο $y = x$ δηλαδή στον εαυτό του· στην αντίθετη περίπτωση, δηλαδή εάν είτε το x δεν ανήκει στο A είτε ανήκει στο A αλλά δεν ικανοποιεί την $\Phi(x)$, τότε αντιστοιχείται στο $y = a$.

Από Α6 υπάρχει το σύνολο B

$$B = \{y \mid \exists x (x \in A \wedge \Psi(x, y))\} = \{y \mid y \in A \wedge \Phi(y)\}.$$

Σημείωση: Η αρχή του διαχωρισμού ήταν ένα από τα αξιώματα που πρότεινε ο Zermelo. 'Οταν αργότερα ο Frænkel συμπλήρωσε το σύστημά του με το αξιώμα της αντικατάστασης η αρχή του διαχωρισμού έγινε θεώρημα αυτού του συστήματος μια και όπως είδαμε αποδεικνύεται στο σύστημα αυτό.

Τα αξιώματα A1 - A7 αποτελούν την αξιωματική θεωρία Zermelo - Frænkel την οποία συμβολίζουμε με ZF.

Στη συνέχεια θα δούμε πώς με βάση αυτά τα αξιώματα τεκμαίρεται η ύπαρξη συνόλων που χρησιμοποιήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια όπως $A \cup B$, $A \times B$ κ.λ.π.

Λήμμα 4.5 Για κάθε σύνολο x και y

- (i) υπάρχει το σύνολο $\{x\}$,
- (ii) υπάρχει το σύνολο $\langle x, y \rangle$.

Απόδειξη: (i) Στο Α3 θέτουμε $x = y$, άρα $\exists\{x, x\} = \{x\}$.
(ii) Από (i) και Α3 τα σύνολα $\{x\}, \{x, y\}$ υπάρχουν. Άρα από Α3 το σύνολο $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ υπάρχει.

Λήμμα 4.6 Για κάθε σύνολα x και y υπάρχει το σύνολο $x \cup y$.

Απόδειξη: Από Α3 υπάρχει το σύνολο $\{x, y\}$.
Από Α4 υπάρχει το σύνολο $\cup\{x, y\} = x \cup y$.

Λήμμα 4.7 Για κάθε σύνολα A, B υπάρχει το σύνολο $A \times B$

Απόδειξη: Από Λήμμα 2 και Α5 υπάρχει το σύνολο $\mathcal{PP}(A \cup B)$.
(Σημείωση: $\{\{x\}, \{x, y\}\} \in \mathcal{PP}(A \cup B)$).
Ορίζουμε $A \times B = \{x | x \in \mathcal{PP}(A \cup B) \wedge \Phi(x)\}$ όπου

$$\begin{aligned} \Phi(x) &\leftrightarrow “x \text{ είναι διατεταγμένο ζεύγος } \langle a, b \rangle \text{ για κάποια } a \in A, b \in B” \\ &\leftrightarrow \exists y \exists z (y \in A \wedge z \in B \wedge x = \{\{y\}, \{y, z\}\}) \end{aligned}$$

Από P1, $A \times B$ είναι σύνολο.

Λήμμα 4.8 Για κάθε σύνολα A, B υπάρχει το σύνολο ${}^B A$.
 $[f \in {}^B A \Rightarrow f \subseteq B \times A \Rightarrow f \in \mathcal{P}(B \times A) \Rightarrow {}^B A \subseteq \mathcal{P}(B \times A)]$

Απόδειξη: $\mathcal{P}(B \times A)$ είναι σύνολο από Λήμμα 3 και Α5.
Ορίζουμε ${}^B A = \{x | x \in \mathcal{P}(A \times B) \wedge \Phi(x)\}$ όπου

$$\begin{aligned} \Phi(x) &\leftrightarrow “x \text{ είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού } B” \\ &\leftrightarrow \forall z (z \in x \leftrightarrow \exists y_1 \exists y_2 (y_1 \in B \wedge z = \langle y_1, y_2 \rangle) \wedge \\ &\quad \forall y (y \in B \rightarrow \exists w (\langle y, w \rangle \in x))) \end{aligned}$$

Λήμμα 4.9 Εάν $F = \langle A_i \rangle_{i \in I}$ είναι οικογένεια συνόλων τότε υπάρχουν τα σύνολα $\bigcup_{i \in I} A_i$ και $\prod_{i \in I} A_i$.

Απόδειξη: Ορίζουμε προτασιακή συνάρτηση

$$\Psi(x, y) \leftrightarrow (x \in I \wedge y = F(x)) \vee (x \notin I \wedge y = \emptyset)$$

Από αξίωμα αντικατάστασης υπάρχει το σύνολο $\{y | \exists x (x \in I \wedge \Psi(x, y)) = \{A_i | i \in I\}\}$.

Από Α4, $\bigcup\{A_i | i \in I\}$ είναι σύνολο ($= \bigcup_{i \in I} A_i$).

Για το δεύτερο μέρος:

Σημειώστε ότι $\prod_{i \in I} A_i \subseteq I \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)$. Το δεύτερο σύνολο (δεξιά) υπάρχει από το πρώτο μέρος του λήμματος και το Λήμμα 4. Ορίζουμε $\prod_{i \in I} A_i = \{f \mid f \in I \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \wedge \Phi(f)\}$ όπου

$$\Phi(f) \leftrightarrow "f \text{ είναι συνάρτηση και } f(i) \in A_i \forall i \in I"$$

Αρα από P1, $\prod_{i \in I} A_i$ είναι σύνολο.

Σημείωση: Από την αρχή του διαχωρισμού προκύπτει ότι δεν υπάρχει το σύνολο όλων των συνόλων δηλ. $\nexists V$ ώστε $\forall x (x \in V)$. Διότι τότε θα προέκυπτε και πάλι το παράδοξο του Russell.

Θεώρημα 4.10 Εστω $\Phi(x)$ οριστική συνθήκη έτσι ώστε $\exists x \Phi(x)$. Τότε υπάρχει σύνολο b ώστε $x \in b \leftrightarrow \forall y (\Phi(y) \rightarrow x \in y)$ δηλ. το b «μαζεύει» όλα τα κοινά στοιχεία των συνόλων που ικανοποιούν την $\Phi(x)$.

Αυτό το b το συμβολίζουμε με $\bigcap_{x|\Phi(x)} x$.

Απόδειξη: Εστω a ένα σύνολο ώστε $\Phi(a)$. Ορίζουμε $b = \{x \mid x \in a \wedge \forall y (\Phi(y) \rightarrow x \in y)\}$. Από την αρχή του διαχωρισμού b έναι σύνολο.

Πόρισμα 4.11 Άν $a \neq \emptyset$, τότε $\cap a$ είναι σύνολο.

Απόδειξη: Παίρνουμε το $\Phi(x)$ του θεωρήματος 4.10 να είναι $x \in a$.

5 Καλές Διατάξεις

Συμβολισμός

Αν $\langle A, R \rangle$ είναι δομή διάταξης (διατεταγμένος χώρος) και $B \subseteq A$ τότε $R \upharpoonright B$ συμβολίζει το $R \cap (B \times B)$ δηλ. τον περιορισμό της σχέσης R στο B . Αν $\langle A, \leq \rangle$ είναι μερικά διατεταγμένος χώρος θα συμβολίζουμε το $\langle B, \leq \upharpoonright B \rangle$ με $\langle B, \leq \rangle$ (όταν δεν υπάρχει αμφιβολία για το τι εννοούμε).

Με $x < y$ θα συμβολίζουμε το $x \leq y \wedge x \neq y$.

Ορισμός 5.1 Ένας ολικά διατεταγμένος χώρος $\langle A, \leq \rangle$ ικανοποιεί την αρχή της υπερπερασμένης επαγωγής (AYE) εάν για κάθε μονομελή συνθήκη Φ έχουμε ότι

$$\forall a \in A \{ \forall x \in A (x < a \rightarrow \Phi(x)) \rightarrow \Phi(a) \} \rightarrow \forall x \in A \Phi(x)$$

Αναλυτικότερα αυτό σημαίνει ότι, για να αποδείξουμε ότι η συνθήκη $\Phi(x)$ ισχύει για όλα τα x στο A , αρκεί να αποδείξουμε ότι για το τυχόν $a \in A$, η υπόθεση ότι η συνθήκη ισχύει για όλα τα μικρότερα του a επάγει την ισχύ της συνθήκης για το a , δηλ. από την υπόθεση $\forall x \in A (x < a \rightarrow \Phi(x))$ [που σημαίνει ότι η Φ ικανοποιείται από όλα τα στοιχεία που είναι μικρότερα από a] μπορούμε λογικά να συμπεράνουμε ότι $\Phi(a)$.

Ορισμός 5.2 Ένας ολικά διατεταγμένος χώρος $\langle A, \leq \rangle$ είναι καλή διάταξη ή καλά διατεταγμένος χώρος εάν κάθε μη κενό υποσύνολο $B \subseteq A$ έχει ελάχιστο στοιχείο ως προς τη διάταξη \leq . [Ένα στοιχείο b του B είναι ελάχιστο αν $\forall x (x \in B \rightarrow b \leq x)$]

$$(AYE) \quad \forall a \in A \{ \forall x \in A (x < a \rightarrow \Phi(x)) \rightarrow \Phi(a) \} \rightarrow \forall x \in A \Phi(x)$$

Αυτό είναι ισοδύναμο με το: Για κάθε σύνολο B

$$\forall a \in A \{ \forall x \in A (x < a \rightarrow x \in B) \rightarrow a \in B \} \rightarrow A \subseteq B$$

(Αρκεί να θέσουμε $\Phi(x) \leftrightarrow x \in B$)

Θεώρημα 5.3 Εάν $\langle A, \leq \rangle$ είναι καλή διάταξη τότε η AYE ικανοποιείται στο $\langle A, \leq \rangle$.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι δεν ισχύει. Τότε ισχύει η υπόθεση της AYE και δεν ισχύει το συμπέρασμά της, δηλ. το $\forall x \in A \Phi(x)$, πράγμα που σημαίνει ότι υπάρχει ένα $y \in A$ για το οποίο $\Phi(y)$ δεν ισχύει. Τότε το $B = \{y \mid y \in A \wedge \neg \Phi(y)\} \neq \emptyset$. Άρα B έχει ελάχιστο στοιχείο έστω $b \in B$. Αφού το b είναι το ελάχιστο στοιχείο για το οποίο δεν ισχύει Φ (είναι $\neg \Phi(b)$) έχουμε ότι $\forall x \in A (x < b \rightarrow \Phi(x))$, δηλαδή η συνθήκη ισχύει για όλα τα μικρότερα του b . Αλλά από την υπόθεση της AYE έχουμε ότι $\forall b \in A (\forall x \in A (x < b \rightarrow \Phi(x)) \rightarrow \Phi(b))$. Άρα ως συμπέρασμα ισχύει ότι $\Phi(b)$, άτοπο διότι ήδη έχουμε ότι $\neg \Phi(b)$.

Ορισμός 5.4 Έστω $\langle A, \leq \rangle$ και $\langle B, \leq' \rangle$ διατάξεις. Κάθε συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ που είναι 1 – 1 και επί και για την οποία ισχύει ότι

$$x \leq y \leftrightarrow f(x) \leq' f(y)$$

λέγεται ισομορφισμός από το A στο B . Είναι προφανές ότι αν f είναι ισομορφισμός από το A στο B τότε η f^{-1} είναι ισομορφισμός από το B στο A . Αν μεταξύ των διατάξεων υπάρχει ένας ισομορφισμός τότε λέμε ότι οι $\langle A, \leq \rangle$ και $\langle B, \leq' \rangle$ (ή πιο απλά οι A και B) είναι ισομορφικές και το συμβολίζουμε με $\langle A, \leq \rangle \cong \langle B, \leq' \rangle$.

Παράδειγμα: Έστω η διάταξη $\langle \mathbb{R}^+, \leq \rangle$ όπου \leq είναι η συνήθης διάταξη των πραγματικών αριθμών. Τότε οι συναρτήσεις f, g, h που ορίζονται αντίστοιχα με $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ και $h(x) = e^x - 1$ είναι όλες διαφορετικοί ισομορφισμοί από το \mathbb{R}^+ στο \mathbb{R}^+ . Βλέπουμε ότι είναι δυνατόν να έχουμε πολλούς ισομορφισμούς από μια διάταξη σε μια άλλη. Η διάταξη στο \mathbb{R}^+ δεν είναι καλή διάταξη. Αντιθέτως, μεταξύ δύο καλών διατάξεων μπορεί να υπάρχει μόνον ένας ισομορφισμός.

Θεώρημα 5.5 Έστω $\langle A, \leq \rangle$ και $\langle B, \leq' \rangle$ είναι καλές διατάξεις. Τότε υπάρχει το πολύ ένας ισομορφισμός f από το A στο B ,
 $f : A \rightarrow B \wedge (x \leq y \leftrightarrow f(x) \leq' f(y))$.⁹

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχουν δύο διαφορετικοί ισομορφισμοί f και g από το A επί του B . Τότε, επειδή η σύνθεση ισομορφισμών είναι ισομορφισμός θα έχουμε ότι $f^{-1} \circ g$ είναι ισομορφισμός από το A επί του εαυτού του και $f^{-1} \circ g \neq \text{Id} = \text{ταυτοτικός}$, επειδή f και g είναι διαφορετικοί.¹⁰ Άρα για κάποιο x , $f^{-1} \circ g(x) \neq x$. Έστω a το ελάχιστο στοιχείο του A ώστε $f^{-1} \circ g(a) \neq a$. Αν $f^{-1} \circ g(a) = b < a$ τότε $f^{-1} \circ g(b) = b$, επειδή $x < a \rightarrow f^{-1} \circ g(x) = x$. Άρα $f^{-1} \circ g(a) = f^{-1} \circ g(b)$, αδύνατο διότι η $f^{-1} \circ g$ είναι 1–1. Άρα $f^{-1} \circ g(a) > a$, οπότε επειδή η $f^{-1} \circ g$ σέβεται τη διάταξη το $a \notin \text{Rg}(f^{-1} \circ g)$, δηλαδή η $f^{-1} \circ g$ δεν είναι επί. (Άτοπο) Όντως αν υπήρχε b ώστε $f^{-1} \circ g(b) = a$ τότε $f^{-1} \circ g(a) > f^{-1} \circ g(b)$ οπότε θα ήταν $a > b$, αλλά τότε από την ελαχιστότητα του a θα ήταν $f^{-1} \circ g(b) = b$.

Σημείωση: Αν f είναι ένας ισομορφισμός από το διατεταγμένο A στο διατεταγμένο B η f θα διατηρεί την διάταξη $<$ δηλ. $x < y \rightarrow f(x) < f(y)$ επειδή αν $f(x) = f(y)$ λόγω του μονομορφισμού f θα είχαμε $x = y$.

Πόρισμα 5.6 Μόνον ένας ισομορφισμός υπάρχει από την καλή διάταξη $\langle A, \leq \rangle$ στον εαυτό της.

⁹ Αν για $f : \langle A, R \rangle \rightarrow \langle A', R' \rangle$ ισχύει ότι $xRy \rightarrow f(x)R'f(y)$ λέμε ότι η f διατηρεί (ή σέβεται) την σχέση R .

¹⁰ Αν $f^{-1} \circ g = \text{Id}$ τότε $\forall x \in A$, $f^{-1} \circ g(x) = x$ άρα $f^{-1}(f(g(x))) = f(x)$ άρα $g(x) = f(x)$.

Ορισμός 5.7 Αν $\langle A, \leq \rangle$ είναι καλή διάταξη και $a \in A$ ορίζουμε $A_a = \{x \mid x \in A \wedge x < a\}$. Το A_a καλείται αρχικό τμήμα του A .

Θεώρημα 5.8 Μια καλή διάταξη $\langle A, \leq \rangle$ δεν είναι ισομορφική με κανένα $\langle A_a, \leq \rangle$ για οποιοδήποτε $a \in A$.

Απόδειξη: Εστω $f : A \rightarrow A_a$. Επειδή $f(a) < a$ έστω b το ελάχιστο στοιχείο του A ώστε $f(b) < b$. Επειδή f διατηρεί τη διάταξη έχουμε $f(f(b)) < f(b)$ (Από πρώτη $f(b) < b$).
 (Από πρώτη $f(f(b)) < f(b)$).

Θεώρημα 5.9 Κάθε καλή διάταξη $\langle A, \leq \rangle$ είναι ισομορφική με το $\langle B, \subseteq \rangle$, όπου $B = \{A_a \mid a \in A\}$.

Απόδειξη: Ο ισομορφισμός ορίζεται με $f(a) = A_a$ για κάθε $a \in A$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι $a \leq a' \leftrightarrow A_a \subseteq A_{a'}$.

Θεώρημα 5.10 Έστω $\langle A, \leq \rangle$ καλή διάταξη και $a \in A$. Τότε είτε το a είναι το μέγιστο στοιχείο του A (μοναδικό από τη γραμμικότητα) ή το a έχει έναν επόμενο $b \in A$ δηλ. $a < b$ και δεν υπάρχει c ώστε $a < c < b$.

Απόδειξη: Έστω a δεν είναι το μέγιστο. Τότε το σύνολο $B = \{x \mid a < x\} \neq \emptyset$. Άρα έχει ελάχιστο b . Είναι $a < b$. Επειδή το b είναι το ελάχιστο στοιχείο του B δεν είναι δυνατό να έχουμε $a < c < b$ διότι τότε το $c \in B$ και c μικρότερο από το ελάχιστο.

Παρατήρηση: Ποιά μπορεί να είναι η εικόνα (του τύπου) μιας καλής διάταξης ενός συνόλου A ; Κατ' αρχάς το ίδιο το A ως υποσύνολο του A θα έχει ελάχιστο στοιχείο. Δηλαδή το A έχει ελάχιστο στοιχείο. Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα (αν υπάρχουν στο A και άλλα στοιχεία) αυτό θα έχει ένα επόμενο το οποίο θα έχει ένα επόμενο κ.ο.κ. Δηλαδή ένα αρχικό τμήμα του A θα έχει τη μορφή $\bullet, \bullet, \bullet, \bullet, \dots$. Εάν αυτά τα στοιχεία δεν εξαντλούν το A θα υπάρχει ένα στοιχείο του A μεγαλύτερο από όλα αυτά, άρα και ένα ελάχιστο τέτοιο στοιχείο \diamond ώστε να μην παρεμβάλλεται τίποτα μεταξύ των \bullet και του (πρώτου) \diamond . Βέβαια θα υπάρχει πάλι ένα επόμενό του κ.ο.κ. και η διαδικασία θα μπορεί να συνεχιστεί επ' άπειρον. Θα έχουμε λοιπόν την εξής εικόνα:

$$\bullet \bullet \bullet \bullet \cdots \diamond \diamond \diamond \cdots \circ \circ \circ \circ \cdots \text{ κ.ο.κ.}$$

Πόσο μπορεί να συνεχιστεί αυτή η διαδικασία; Αργότερα θα δούμε με ποιό τρόπο μπορούμε να αναπαραστήσουμε διατάξεις με μήκος πολύ μεγαλύτερο από αυτή.

Λήμμα 5.11 Εάν $\langle A, \leq \rangle$ και $\langle B, \leq' \rangle$ καλές διατάξεις τότε αυτές είναι ισομορφικές τότε και μόνο τότε οι ακόλουθες συνθήκες ισχύουν

1. $\forall x \in A$ υπάρχει $y \in B$ ώστε A_x ισομορφικό με το B_y

2. $\forall y \in B$ υπάρχει $x \in A$ ώστε B_y ισομορφικό με το A_x

Απόδειξη: \Rightarrow : Έστω f ισομορφισμός από το A στο B . Τότε αν $x \in A$ το A_x θα είναι ισομορφικό με το $B_{f(x)}$. Δηλαδή ισχύει η ιδιότητα 1 αν πάρουμε $y = f(x)$. Αντίστροφα ισχύει η 2 παίρνοντας $x = f^{-1}(y)$.

\Leftarrow : Έστω ότι ισχύουν οι ιδιότητες 1 και 2. Ορίζουμε ισομορφισμό f από το A στο B ως εξής: Για κάθε $x \in A$, $f(x)$ είναι το μοναδικό y ώστε A_x ισομορφικό με το B_y . Η ύπαρξη εξασφαλίζεται από την ιδιότητα 1 και η μοναδικότητα από το θεώρημα 5.8 διότι αν το A_x ήταν ισομορφικό με τα B_y και B_z (έστω $y < z$) τότε το B_y θα ήταν αρχικό τμήμα του B_z και B_z θα ήταν ισόμορφο με το B_y . (άτοπο) [Σημειώστε ότι δύο δομές που είναι ισομορφικές με μία τρίτη είναι και μεταξύ τους ισομορφικές.] Εύκολα βλέπουμε ότι η f είναι 1-1 και επί (από ιδιότητα 2). Διατηρεί τη διάταξη διότι $x < x'$ συνεπάγεται $f(x) < f(x')$ διότι διαφορετικά με το ίδιο ως άνω σκεπτικό θα παραβιαζόταν το θεώρημα 5.8.

Θεώρημα 5.12 [Συγκρισιμότητα των καλών διατάξεων]

Εάν $\langle A, \leq \rangle$ και $\langle B, \leq' \rangle$ καλές διατάξεις τότε

- είτε A και B ισομορφικές
- είτε A ισομορφική με αρχικό τμήμα της B
- είτε B ισομορφική με αρχικό τμήμα του A

Απόδειξη: Από το θεώρημα 5.8 έχουμε ότι μόνον μία από τις τρείς ιδιότητες μπορεί να ισχύει.

Έστω τώρα ότι οι A και B δεν είναι ισομορφικές. Τότε από προηγούμενο θεώρημα μία από τις δύο συνθήκες δεν ικανοποιείται. Έστω δεν ικανοποιείται η πρώτη. Τότε θα πρέπει να υπάρχει $x \in A$ ώστε για όλα τα $y \in B$ το B_y δεν είναι ισομορφικό με το A_x . Επειδή A καλή διάταξη μπορούμε να διαλέξουμε το x_0 να είναι το ελάχιστο τέτοιο x . Δηλαδή

1. $x < x_0 \rightarrow A_x$ είναι ισομορφικό με κάποιο B_y (για κάποιο $y \in B$).
2. το A_{x_0} δεν είναι ισομορφικό με κανένα B_y (για οποιοδήποτε $y \in B$).

Ισχυρίζόμαστε ότι A_{x_0} είναι ισομορφικό με το B . Από προηγούμενο θεώρημα αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι

1. $\forall x \in A_{x_0} \exists y \in B$ ώστε $(A_{x_0})_x$ ισομορφικό με το B_x .
(Ισχύει διότι $x \in A_{x_0}$ σημαίνει $x < x_0$ και σ' αυτήν την περίπτωση $(A_{x_0})_x = A_x$.)
2. Για κάθε $y \in B$ υπάρχει $x \in A_{x_0}$ ώστε $(A_{x_0})_x$ ισομορφικό με το B_y .

Και αυτό ισχύει διότι αν δεν ίσχυε θα μπορούσαμε να πάρουμε το μικρότερο y για το οποίο δεν ισχύει, έστω y_0 . Τότε $y < y_0 \rightarrow \exists x < x_0$ ώστε $(A_{x_0})_x$ ισομορφικό με το B_y και B_{y_0} δεν είναι ισομορφικό με κανένα A_x για οποιοδήποτε $x < x_0$. Αλλά τότε για το A_{x_0} και B_{y_0} ισχύουν και οι δύο ιδιότητες του λήμματος 5.11 άρα A_{x_0} και B_{y_0} ισομορφικά μεταξύ τους πράγμα που παραβιάζει την επιλογή του x_0 .

Σημείωση: Μέχρι τώρα τους ορισμούς της μερικής διάταξης, γραμμικής και καλής διάταξης τους δώσαμε για σχέσεις (που τις συμβολίζαμε R, \leq, \subseteq κ.λ.π.) που ικανοποιούσαν την xRx δηλ. ήταν αυτοπαθείς. Είναι χρήσιμο να δούμε ότι τους ορισμούς των ίδιων εννοιών μπορούμε να τους δώσουμε και για σχέσεις που είναι μη αυτοπαθείς.

Ορισμός 5.13 Μία διμελής σχέση R στο σύνολο A είναι αυστηρή μερική διάταξη αν ισχύουν για $x, y, z \in A$

1. $\neg(xRx) - \text{μη αυτοπαθής}$
2. $xRy \wedge yRz \rightarrow xRz - \text{μεταβατική}$

Μία αυστηρή μερική διάταξη R είναι και αντισυμμετρική δηλ. ικανοποιεί την σχέση $xRy \rightarrow \neg(yRx)$, διότι αν xRy και yRx , από τη μεταβατικότητα θα παίρναμε xRx , άτοπο διότι η R είναι μη αυτοπαθής.

Η σχέση R είναι (αυστηρή) γραμμική διάταξη όταν ισχύουν:

1. R είναι μεταβατική
2. Ακριβώς ένα από τα $x < y, y < x, x = y$ ισχύει για οποιαδήποτε $x, y \in A$.

Τότε η R θα είναι και αυστηρή μερική διάταξη διότι επειδή $x = x$ δεν μπορεί να έχουμε xRx αφού μόνον ένα από τα $x = x$ ή xRx μπορεί να ισχύει.

Η αυστηρή γραμμική διάταξη είναι και καλή διάταξη αν, όπως και στον άλλο ορισμό, κάθε μη κενό υποσύνολο του πεδίου της διάταξης έχει ελάχιστο στοιχείο.

Παρατήρηση: Οταν έχουμε μία αυστηρή διάταξη, π.χ. $<$, τότε μπορούμε να ορίσουμε την \leq ως $x \leq y \leftrightarrow x < y \vee x = y$ και να αποκτήσουμε την επέκταση της $<$ που είναι αυτοπαθής και ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες της (αυτοπαθούς) διάταξης. Επίσης και αντίστροφα αν έχουμε την μη αυτοπαθή διάταξη \leq μπορούμε να ορίσουμε το $<$ ως $x < y \leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$ και να αποκτήσουμε τον μη αυτοπαθή περιορισμό της \leq που βέβαια θα ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες της (μη αυτοπαθούς) διάταξης. Δηλαδή οι \leq και $<$ (ομοίως οι \subseteq και \subset κ.λ.π.) είναι οι δύο όψεις του ίδιου νομίσματος. Σε ό,τι ακολουθεί όταν μία διάταξη είναι αυστηρή, θα την ονομάζουμε απλά διάταξη και θα την συμβολίζουμε με $<, \leq, \subset, \subseteq, \text{κ.λ.π.}$ Διαφορετικά θα γράφουμε $\leq, \subseteq, \text{κ.λ.π.}$ και θα εννοούμε την αυτοπαθή διάταξη.

6 Διατακτικοί αριθμοί (Ordinal numbers)

Αναζητούμε με ομοιόμορφο τρόπο αντιπροσώπους για όλες τις καλές διατάξεις.

Ορισμός 6.1 1. Το σύνολο A είναι μεταβατικό εάν $\forall x(x \in A \rightarrow x \subseteq A)$ ($\delta\eta\lambda. y \in x \in A \rightarrow y \in A$).

2. Το σύνολο A είναι διατακτικός (αριθμός) αν το A είναι μεταβατικό και η διάταξη $\langle A, \in \rangle$ είναι αυστηρή καλή διάταξη.

Η μεταβατικότητα του A μπορεί ισοδύναμα να εκφραστεί με τη σχέση $\cup A \subseteq A$. Παραδείγματα μεταβατικών συνόλων είναι τα σύνολα \emptyset , $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$. Το σύνολο $\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$ δεν είναι μεταβατικό σύνολο διότι έχουμε ότι $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\} \in \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$ αλλά $\{\emptyset\} \notin \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$.

Αναλυτικότερα και ισοδύναμα A είναι διατακτικός αν για $x, y, z \in A$ ισχύουν:

Δ1 $x \in y \wedge y \in z \rightarrow x \in z$ (\in μεταβατική)

Δ2 Ακριβώς ένα από τα $x \in y, x = y, y \in x$ ισχύει (\in γραμμική)

Δ3 Άν $\emptyset \neq B \subseteq A$ τότε $\exists b \in B$ ώστε $\forall x \in B, x \notin b$ (το b είναι το \in -ελαχιστό στοιχείο του B) [ισοδύναμα μπορούμε να πούμε ότι $\exists b \in B, b \cap B = \emptyset$] (\in καλή διάταξη)

Δ4 $x \in y \wedge y \in A \rightarrow x \in A$ (A μεταβατικό)

π.χ. $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ είναι διατακτικοί.

Η ισοδυναμία του ορισμού 6.1 και των ιδιοτήτων Δ1–Δ4 μπορεί εύκολα να αποδειχθεί. Στην περίπτωση του Δ3, η συνθήκη $b \cap B = \emptyset$ είναι ισοδύναμη με το ότι το b είναι το ελαχιστό στοιχείο ως προς τη διάταξη \in διότι αν υπήρχε ένα μικρότερο του b , έστω x , ως προς αυτή τη διάταξη θα είχαμε $x \in B$ και $x \in b$ (x μικρότερο του b) οπότε θα ήταν $b \cap B \neq \emptyset$.

Συμβολισμός: Τα γράμματα $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ συμβολίζουν διατακτικούς. Επίσης γράφουμε $x \in \text{Ord}$ και εννοούμε x είναι διατακτικός. Γράφουμε επίσης $A \subset B$ όταν A είναι γνήσιο υποσύνολο του B δηλαδή όταν $A \subseteq B \wedge A \neq B$.

6.1 Ιδιότητες των διατακτικών

1. $\forall \alpha, \alpha \notin \alpha$

Απόδειξη: Έστω $\alpha \in \alpha$. Τότε $\emptyset \neq \{\alpha\} \subseteq \alpha$, άρα από Δ3 διαλέγουμε $x \in \{\alpha\}$ ώστε $x \cap \{\alpha\} = \emptyset$. Αλλά $x = \alpha$ άρα $\alpha \in x \cap \{\alpha\}$ (Ατοπο).

2. $x \in \alpha \rightarrow x \subset \alpha$

Απόδειξη: Έστω $x \in \alpha$. Από Δ4 $x \subseteq \alpha$. Άν $x = \alpha$ τότε $\alpha \in \alpha$. Άρα $x \subset \alpha$.

3. Άν $x \in \alpha$ τότε x είναι διαταχτικός.

Απόδειξη: Πρέπει να ελέγξουμε τα Δ1-Δ4 για το x . Εστω $b, c, d \in x$. Τότε $b, c, d \in \alpha$, από μεταβατικότητα. Άρα ακριβώς ένα από $b \in c, c \in b, b = c$ ισχύει και ($b \in c \& c \in d \rightarrow b \in d$). Άρα έχουμε τα Δ1 και Δ2. Εάν $\emptyset \neq Y \subseteq x$ τότε $Y \subseteq \alpha$ (επειδή $x \subseteq \alpha$). Άρα υπάρχει $e \in Y$ τέτοιο ώστε $e \cap Y = \emptyset$. Άρα Δ3. Τελικά για το Δ4 έστω $e \in f, f \in x$ (θέλουμε $e \in x$). Από Δ1-Δ4 $e, f, x \in \alpha$. Άρα είτε $e \in x$ ή $e = x$ ή $x \in e$. Άν $e = x$ ή $x \in e$ τότε δεν θα είχαμε ότι $\exists y \in \{e, f, x\} \subseteq \alpha$ ώστε $y \cap \{e, f, x\} = \emptyset$ ('Ασκηση: Να ελεγχθούν όλες οι περιπτώσεις). Άρα θα πρέπει να έχουμε $e \in x$ όπως απαιτείται.

4. $\beta \in \alpha \leftrightarrow \beta \subset \alpha$.

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε $\beta \subset \alpha \rightarrow \beta \in \alpha$. Έστω $\beta \subset \alpha$, άρα $\emptyset \neq \alpha \setminus \beta \subseteq \alpha$. Διαλέγουμε $\delta \in \alpha \setminus \beta$ ώστε $\delta \cap (\alpha \setminus \beta) = \emptyset$. Για να αποδείξουμε $\beta \in \alpha$ αρκεί να αποδείξουμε ότι $\delta = \beta$ δηλ. $\nu \in \delta \leftrightarrow \nu \in \beta$.

Εάν $\nu \in \delta \rightarrow \nu \in \alpha$ (επειδή Δ4 για το α , επειδή $\delta \in \alpha$) και $\nu \notin \alpha \setminus \beta \rightarrow \nu \in \beta$.

Αντίστροφα, έστω $\nu \in \beta$. Τότε $\nu \in \alpha$, επειδή $\beta \subset \alpha$ άρα επειδή $\delta \in \alpha$, ένα από τα $\delta \in \nu, \nu = \delta, \nu \in \delta$ ισχύει. Εάν $\delta \in \nu$ τότε $\delta \in \beta$ (από Δ4 για β), άρα $\delta \notin (\alpha \setminus \beta)$ (άτοπο). Εάν $\delta = \nu$ τότε $\delta \in \beta$, άρα άτοπο. Άρα $\nu \in \delta$, άρα $\delta = \beta$ & επειδή $\delta \in \alpha, \beta \in \alpha$.

5. Ακριβώς ένα από τα $\alpha \in \beta, \beta \in \alpha, \beta = \alpha$ ισχύει.

Απόδειξη: Αν ίσχυαν περισσότερα από ένα θα είχαμε είτε $\alpha \in \alpha$ ή $\beta \in \beta$ (άτοπο). Άρα υποθέτουμε ότι $\alpha \notin \beta, \beta \notin \alpha$ (θέλουμε $\beta \in \alpha$). Από 4. $\alpha \neq \beta$ και $\neg(\alpha \subset \beta)$ άρα $\neg(\alpha \subseteq \beta)$, άρα $\emptyset \neq \alpha \setminus \beta \subseteq \alpha$. Διαλέγουμε $\delta \in \alpha \setminus \beta$ ώστε $\delta \cap (\alpha \setminus \beta) = \emptyset$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\delta = \beta$. Εάν $\nu \in \delta$, τότε $\nu \in \alpha \& \nu \notin \alpha \setminus \beta$ άρα $\nu \in \beta$ δηλ. $\delta \subseteq \beta$. Εάν $\delta \subset \beta$ τότε $\delta \in \beta$ άρα $\delta \notin \alpha \setminus \beta$, άρα $\delta = \beta$, άρα $\beta \in \alpha$.

Σημείωση: Άν $a, b \in \alpha$ τότε a και b είναι διαταχτικοί και

$a \in b \leftrightarrow a$ είναι μικρότερο από το b στη διάταξη \in

Γράφουμε λοιπόν

- $\alpha < \beta$ αντί του $\alpha \in \beta$
- $\alpha \leq \beta$ αντί του $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$

και χρησιμοποιούμε λέξεις όπως «ελάχιστος» για τους διατακτικούς.

Επίσης $\alpha = \{\beta \mid \beta \in \alpha\} = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$. Βλέπουμε λοιπόν ότι κάθε διατακτικός αριθμός είναι το σύνολο όλων των μικροτέρων του. \emptyset είναι ο ελάχιστος διατακτικός, επειδή για κάθε διατακτικό α

$\emptyset \subseteq \alpha \rightarrow (\emptyset \subset \alpha \text{ οπότε } \emptyset \in \alpha \text{ ή } \emptyset = \alpha)$. Και στις δύο περιπτώσεις έχουμε $\emptyset \leq \alpha$.

Πρόταση 6.2 $\alpha \in \beta \wedge \beta \in \gamma \rightarrow \alpha \in \gamma$.

Απόδειξη: Είναι το Δ4.

Θεώρημα 6.3 Εστω $\Theta(x)$ μονομελής συνθήκη ώστε $\Theta(\alpha)$ ισχύει για κάποιο διατακτικό α . Τότε υπάρχει ένας ελάχιστος διατακτικός α ώστε $\Theta(\alpha)$ και $\forall \gamma < \alpha \neg \Theta(\gamma)$.

Απόδειξη: Έστω α ώστε $\Theta(\alpha)$. Τότε αν το σύνολο $b = \{\gamma \in \alpha \wedge \Theta(\gamma)\} = \emptyset$ τότε στην περίπτωση αυτή ο α είναι ο ελάχιστος. Αν $b \neq \emptyset$ τότε επειδή $b \subseteq \alpha$ διαλέγουμε $\gamma \in b$ ώστε $\gamma \cap b = \emptyset$. Τότε $\delta < \gamma \rightarrow \delta \notin b \rightarrow \neg \Theta(\delta)$, άρα γ είναι ο ελάχιστος.

Θεώρημα 6.4 Αν B είναι σύνολο διατακτικών $B \neq \emptyset$, τότε υπάρχει στο B ελάχιστος διατακτικός δηλ. $\exists \gamma \in B$ ώστε $\gamma \cap B = \emptyset$.

Απόδειξη: Στο θεώρημα παίρνουμε $\Theta(x) \equiv x \in B$.

Πόρισμα 6.5 Η κλάση όλων των διατακτικών δεν είναι σύνολο δηλ. δεν υπάρχει σύνολο B ώστε $\forall x(x \in B \leftrightarrow x \text{ εναι διατακτικος})$.

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχει τέτοιο B . Εύκολα αποδεικνύεται ότι B είναι διατακτικός. Διότι αν $\alpha, \beta, \gamma \in B$, $\alpha \in \beta \wedge \beta \in \gamma \rightarrow \alpha \in \gamma$ (από πρόταση 6.2 και ακριβώς ένα από τα $\alpha \in \beta, \beta \in \alpha, \alpha = \beta$ ισχύει (από ιδιότητα 5)). Αν $\emptyset \neq A \subseteq B$ τότε από πρόταση 6.4 $\exists \alpha \in A$ ώστε $A \cap \alpha = \emptyset$. (Άρα το Δ3 για το B). Τελικά αν $x \in \alpha, \alpha \in B \rightarrow x \in B$ είναι διατακτικός $\rightarrow x \in B$ άρα B ικανοποιεί τα Δ1-Δ4 και B είναι διατακτικός άρα $B \in B$ (άτοπο από ιδιότητα 1).

Πόρισμα 6.6 Δεν υπάρχει μεγαλύτερος διατακτικός.

Απόδειξη: Αν α ήταν ο μεγαλύτερος τότε $\alpha \cup \{\alpha\}$ θα ήταν το σύνολο όλων των διατακτικών.

Λήμμα 6.7 Έστω A σύνολο διατακτικών. Τότε: Εάν διατακτικός (που τον συμβολίζουμε με $\sup(A)$) ώστε α είναι ο μικρότερος διατακτικός μεγαλύτερος ή ίσος από όλους τους $\beta \in A$.

Επίσης Εάν διατακτικός (που τον συμβολίζουμε με $\text{seq}(A)$) ώστε α είναι ο μικρότερος διατακτικός μεγαλύτερος από όλους τους $\beta \in A$.

Απόδειξη: Εστω ότι $\exists \delta$ ώστε $\forall \beta \in A, \beta \leq \delta$. Τότε ο ελάχιστος τέτοιος δ είναι το $\sup(A)$. Εάν δεν υπήρχε τέτοιος δ τότε $\forall \delta \in \text{Ord} \exists \beta \in A \delta < \beta$. Αρα $\delta \in \text{Ord} \rightarrow \delta \in \cup A$, άρα $\{\delta \mid \delta \in \cup A \wedge d \in \text{Ord}\}$ είναι το σύνολο όλων των διατακτικών (άτοπο). Ομοίως για το $\text{seq}(A)$.

6.2 Ο επόμενος διατακτικός

Ορισμός 6.8 Άν $\gamma \in \text{Ord}$ θέτουμε $\gamma' = \gamma + 1 = \text{seq}(\{\gamma\})$.¹¹ γ' ονομάζεται ο επόμενος του γ .

Παρατηρούμε ότι επειδή $\text{seq}(A)$ είναι ο ελάχιστος διατακτικός που είναι μεγαλύτερος από όλους τους διατακτικούς του A τότε αν έχουμε $\nu < \text{seq}(A)$, $\nu \leq$ από κάποιο στοιχείο του A (αφού δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο από δλα). Αρα

$$\nu < \text{seq}(A) \rightarrow \exists \beta \in A \text{ ώστε } \nu \leq \beta$$

Αρα έχουμε $\nu < \gamma' \rightarrow \exists \beta \in \{\gamma\}$ ώστε $\nu \leq \beta \rightarrow \nu \leq \gamma$.

Αντίστροφα, $\nu \leq \gamma \rightarrow \nu = \gamma \vee \nu \in \gamma \rightarrow \nu < \gamma'$ (επειδή $\gamma < \gamma'$).

Αρα $\nu \in \gamma' \leftrightarrow \nu \in \gamma \vee \nu = \gamma$ δηλ.

$$\gamma' = \gamma \cup \{\gamma\}$$

Παρατηρούμε ότι $\gamma' = \gamma^+$, με το συμβολισμό του αξιώματος του απείρου.

Πρόταση 6.9 Ισχύουν τα κάτωθι:

1. $\beta < \gamma' \leftrightarrow \beta \leq \gamma$
2. $\gamma < \beta \leftrightarrow \gamma' \leq \beta$
3. $\gamma \leq \beta \leq \gamma' \rightarrow \gamma = \beta \vee \gamma' = \beta$

Απόδειξη: 1. $\beta < \gamma' \leftrightarrow \beta \in \gamma' \leftrightarrow \beta \in \gamma \vee \beta = \gamma \leftrightarrow \beta \leq \gamma$

2. $\gamma < \beta \rightarrow \gamma \cup \{\gamma\} \subseteq \beta \rightarrow \gamma' \subseteq \beta \rightarrow \gamma' \subset \beta \vee \gamma' = \beta \rightarrow \gamma' < \beta \vee \gamma' = \beta \rightarrow \gamma' \leq \beta \rightarrow \gamma < \beta$.

Ορισμός 6.10 Ο διατακτικός λ λέγεται οριακός αν $\lambda \neq \emptyset$ και $\forall \alpha (\alpha < \lambda \rightarrow \alpha + 1 < \lambda)$.

Έστω τώρα διατακτικός $\alpha \neq \emptyset$ που δεν είναι επόμενος (δηλ. δεν έχει τη μορφή $\alpha = \gamma$ για κάποιο διατακτικό γ). Τότε για κάθε $\gamma < \alpha$ έχουμε ότι $\gamma' \neq \alpha$. Πρέπει τότε $\gamma' < \alpha$ ή $\alpha < \gamma'$. Αλλά αν έχουμε $\alpha < \gamma' \rightarrow \alpha \leq \gamma$ αδύνατο δύτικι $\gamma < \alpha$. Άρα $\gamma < \alpha \rightarrow \gamma' < \alpha$. Άρα α είναι οριακός. Άρα υπάρχουν μόνο δύο είδη διατακτικών διάφορων του \emptyset .

¹¹ Εδώ το $\gamma + 1$ δεν είναι κάποια πρόσθεση αλλά απλώς ένας εναλλακτικός συμβολισμός, πλην του γ' , για τον επόμενο.

1. $\alpha = \beta + 1$ για κάποιο β (λέμε τότε ότι α είναι επόμενος).
2. $\alpha =$ οριακός

Πρόταση 6.11 Αν A σύνολο διατακτικών τότε $\sup(A) = \cup A$.

Απόδειξη: Ο $\sup(A)$ είναι ο μικρότερος γ ώστε $\forall \alpha \in A, \alpha \leq \gamma$. Αν λοιπόν $\beta \in \gamma$, δηλαδή $\beta < \gamma$, τότε β δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από όλα τα $\alpha \in A$, áρα $\exists \alpha \in A$ ώστε $\neg(\alpha \leq \beta)$ δηλαδή $\beta < \alpha$. Άρα $\beta \in \cup A$. Επειδή $\beta \in \alpha \in A$.

Αντιστρόφως, αν $\beta \in \cup A$ τότε $\beta \in \alpha$ για κάποιο $\alpha \in A$, áρα $\beta < \alpha \leq \sup(A)$.

Άρα

- στην περίπτωση που $\alpha = \beta + 1$ τότε $\beta = \cup \alpha < \alpha$.
- στην περίπτωση που α οριακός τότε $\cup \alpha = \alpha$.

Οι διατακτικοί αριθμοί κατασκευάστηκαν για να αποτελέσουν τα «αρχέτυπα» των καλών διατάξεων. Το ακόλουθο θεώρημα το επιβεβαιώνει.

Θεώρημα 6.12 Κάθε καλά διατεταγμένο σύνολο A είναι ισομορφικό με ένα μοναδικό διατακτικό α δηλ. αν $\langle A, \leq \rangle$ καλά διατεταγμένος χώρος τότε υπάρχει μοναδικός α ώστε $\langle A, \leq \rangle \cong \langle \alpha, \leq \rangle$.

Απόδειξη: Μοναδικότητα: Επειδή δύο καλές διατάξεις που είναι ισομορφικές με μια τρίτη είναι και μεταξύ τους ισομορφικές, αν υπήρχαν δύο διαφορετικοί διατακτικοί $\alpha < \beta$ τότε θα είχαμε το β ισόμορφο με το αρχικό τμήμα του α (διότι $\alpha \in \beta$ και $\alpha = \beta_\alpha$).

Υπαρξή: Έστω $B \subseteq A$ με $B = \{x \in A \mid A_x$ ισομορφικό με ένα διατακτικό}. Από μοναδικότητα, για κάθε $x \in B$ υπάρχει ένας μοναδικός διατακτικός, έστω $\beta(x)$, ο οποίος είναι ισομορφικός με το A_x με μοναδικό ισομορφισμό f_x (γράφουμε τότε $A_x \cong_{f_x} \beta(x)$).

Παρατηρούμε τα εξής:

1. Το B έχει την εξής ιδιότητα:

$$x \in A \wedge x < y \wedge y \in B \rightarrow x \in B$$

Διότι αν $y \in B$ τότε $A_y \cong_{f_y} \beta(y)$ áρα το $x < y$ συνεπάγεται ότι $x \in A_y$ και $(A_y)_x = A_x$, áρα $A_x = (A_y)_x \cong_{f_x} \beta(x)$ (όπου $f_x = f_y \upharpoonright A_x$) και $\beta \circ \beta(x) < \beta(y)$.

Παρατήρηση: Για B που ικανοποιεί την ως άνω ιδιότητα ισχύει ότι $B = A$ ή B είναι αρχικό τμήμα του A . Διότι αν z είναι το μικρότερο $z \in A$ που να μην ανήκει στο B τότε εύκολα $B = A_z$. Επίσης ισχύει $x < y \rightarrow \beta(x) < \beta(y)$.

2. Η κλάση $\mathcal{B} = \{\beta(x) \mid x \in B\}$, με βάση το αξίωμα της αντικατάστασης, είναι ένα σύνολο από διαταχτικούς που ικανοποιούν την ιδιότητα

$$\gamma < \beta(x) \rightarrow \gamma \in \mathcal{B}$$

Διότι αν $\gamma < \beta(x)$ για $x \in B$ τότε γ ισομορφικό με ένα αρχικό τμήμα ενός A_x άρα ισομορφικό με ένα A_y όπου $y < x$.

Αλλά τότε $y \in B$ άρα $\gamma = \beta(y) \in \mathcal{B}$. Μια τέτοια κλάση \mathcal{B} δεν μπορεί παρά να είναι ένας διαταχτικός έστω β . Πράγματι, επειδή \mathcal{B} είναι σύνολο διαταχτικών θα υπάρχει ένας διαταχτικός μεγαλύτερος από όλους τους διαταχτικούς στο \mathcal{B} . Αν β είναι ο ελάχιστος τέτοιος διαταχτικός τότε $\mathcal{B} = \beta$. Διότι βέβαια $\gamma \in \mathcal{B} \rightarrow \gamma < \beta$ και αν $\gamma < \beta$ τότε πρέπει $\gamma < \beta(x)$ για κάποιο $\beta(x) \in \mathcal{B}$, άρα $\gamma \in \mathcal{B}$ από την παραπάνω ιδιότητα.

3. Χρησιμοποιώντας όλα τα παραπάνω έχουμε ότι $\langle B, \leq \rangle \cong \langle \beta, \leq \rangle$. Και B πρέπει να είναι ίσο με A διότι διαφορετικά $B = A_x$ για κάποιο x άρα $A_x \cong \beta$ αλλά τότε, από τον ορισμό του B , $x \in B = A_x$, άτοπο ($x \notin A_x$).

Σημείωση: Με βάση το θεώρημα 6.12 μπορούμε να έχουμε ως πόρισμα το θεώρημα 5.12 της συγκριτικότητας των καλών διατάξεων. Η διαφορά είναι η εξής. Στο θεώρημα 6.12 για την απόδειξη χρησιμοποιήσαμε το αξίωμα της αντικατάστασης ενώ στο θεώρημα 5.12 μόνο την ασθενέστερη αρχή του διαχωρισμού. Δηλαδή δουλέψαμε στην ασθενέστερη αξιωματική θεωρία του Zermelo, θεωρία Z , όπου

$$Z = ZF - \{\text{Αξίωμα της Αντικατάστασης}\} + \{\text{Αρχή του Διαχωρισμού}\}$$

Είναι γεγονός ότι στη θεωρία Z μπορούμε να αποδείξουμε όλες σχεδόν τις ιδιότητες που αφορούν στις καλές διατάξεις αλλά για να έχουμε το αποτέλεσμα ότι κάθε καλή διάταξη είναι ισομορφική με ένα διαταχτικό χρειαζόμαστε το αξίωμα της αντικατάστασης, δηλ. το αποτέλεσμα ισχύει στη ZF .

6.3 Κατασκευή των Φυσικών αριθμών

Ο ορισμός των μαθηματικών αντικειμένων αποτέλεσε μια από τις κύριες δραστηριότητες των Λογικών - Μαθηματικών στα τέλη του 19^{ού} αρχές του 20^{ού} αιώνα. Είναι μνημειώδεις οι εργασίες των Frege, Dedekind, Russell και πολλών άλλων. Οι προσπάθειες αυτές ήταν μέρος του προγράμματος θεμελίωσης των Μαθηματικών γνωστού ως «λογικισμού». Το πρόγραμμα αυτό φιλοδοξούσε να αναγάγει όλα τα Μαθηματικά στη Λογική και στις αρχές της με βάση κατασκευές που την εποχή εκείνη θεωρούνταν «λογικές». Ως αποτέλεσμα του ξεκαθαρίσματος πολλών από τις ψευδαισθήσεις που επικρατούσαν τότε σε σχέση μ' αυτά τα ζητήματα αναπτύχθηκε η αξιωματική συνολοθεωρία.

Οι «λογικές» κατασκευές εκείνης της εποχής μετατράπηκαν σε ορισμούς των μαθηματικών αντικειμένων στο πλαίσιο της αξιωματικής συνολοθεωρίας.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε στα πλαίσια της ZF το σύνολο \mathbb{N} των φυσικών αριθμών. Το σύνολο αυτό θα αποδειχθεί ότι υπάρχει με βάση τα αξιώματα της ZF. Θα συνοδεύεται δε από μία διάταξη η οποία θα «αντιστοιχεί» στη διάταξη $<$ των φυσικών αριθμών. Στην πορεία του μαθήματος θα ορίζονται και τα άλλα υπόλοιπα «δομικά» στοιχεία του \mathbb{N} όπως η πρόσθεση, ο πολ./συμός κ.λ.π. και θα αποδειχνύεται ότι ικανοποιούν τις συνήθεις ιδιότητές τους.

Θεωρούμε τη συνθήκη $\Phi(x)$ που ορίζεται από

$$\Phi(x) \leftrightarrow \emptyset \in x \wedge \forall z(z \in x \rightarrow (z \cup \{z\}) \in x)$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι η συνθήκη είναι οριστική. Επειδή ισχύει το αξιώμα του απείρου υπάρχει ένα τουλάχιστον σύνολο που ικανοποιεί τη συνθήκη άρα από θεώρημα 4.10 υπάρχει το σύνολο $\omega = \bigcap_{x|\Phi(x)} x$ και βέβαια ω είναι το μικρότερο σύνολο που ικανοποιεί τη συνθήκη $\Phi(x)$.

Πρόταση 6.13 Το ω είναι οριακός διατακτικός και μάλιστα ο ελάχιστος οριακός διατακτικός.

Απόδειξη: Διότι έστω α ο ελάχιστος διατακτικός που δεν ανήκει στο σύνολο ω . Τότε επειδή $\emptyset \in \omega$, $\emptyset \neq \alpha$. Αν ήταν $\alpha = \beta + 1$ τότε λόγω του ελάχιστου του α $\beta \in \omega$ και άρα $\beta + 1 \in \omega$ (επειδή $\beta + 1 = \beta \cup \{\beta\}$) δηλ. $\alpha \in \omega$, (άτοπο). Άρα α οριακός και επειδή ένας οριακός διατακτικός ικανοποιεί την $\Phi(x)$ έχουμε $\omega \subseteq \alpha$ (στην πραγματικότητα υποσύνολο κάθε οριακού α). Από την άλλη μεριά αν $\beta \in \alpha$, τότε λόγω του ελάχιστου του α έχουμε $\beta \in \omega$ άρα $\alpha \subseteq \omega$. Άρα $\omega = \alpha$ και άρα ω είναι ο ελάχιστος οριακός.

Για το ω ισχύουν:

1. $\emptyset, \emptyset', \emptyset'', \emptyset''', \dots < \omega$
2. Εάν $\alpha < \omega$ τότε α δεν είναι οριακός διατακτικός και κατά συνέπεια είτε $\alpha = \emptyset$ ή $\alpha = \beta + 1$ για κάποιο $\beta < \alpha$.

Ορισμός 6.14 Ορίζουμε ω να είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών \mathbb{N} . Επίσης ορίζουμε $0 = \emptyset$, $1 = \emptyset' = \{\emptyset\}$, $2 = \emptyset'' = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, κ.ο.κ.

Παρατηρούμε ότι η διάταξη των διατακτικών $0, 1, 2, \dots$ συμφωνεί με τη «φυσική» τους διάταξη. Επίσης ότι $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}, \dots n = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ κ.λ.π..

Αν εφαρμόσουμε την αρχή της υπερπεπερασμένης επαγωγής στο ω παίρνουμε

$$\text{Av } D \subseteq \omega \text{ και } \forall n \in \omega (n \subseteq D \rightarrow n \in D), \text{ τότε } D = \omega$$

Θεώρημα 6.15 *H αρχή της υπερπερασμένης επαγωγής AYE στο ω είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη αρχή της επαγωγής*

$$\text{Av } P \subseteq \omega, 0 \in P \text{ και } \forall n(n \in P \rightarrow n' \in P), \text{ τότε } P = \omega$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε την αρχή της επαγωγής και έστω $D \subseteq \omega$ ώστε $n \subseteq D \rightarrow n \in D$ (Θέλουμε $\omega = D$). Έστω $P = \{n \mid n \in \omega \wedge n \subseteq D\}$. Τότε $0 \in P$ επειδή $0 = \emptyset \subseteq D$ και εάν $n \in P \Rightarrow n \subseteq D \Rightarrow n \subseteq D \& n \in D \Rightarrow n \cup \{n\} \subseteq D$, άρα $n' \in P$. Άρα από αρχή της επαγωγής $\omega = P$. Άρα $\forall n \in \omega, n \subseteq D$ άρα τελικά $D = \omega$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε την AYE και έστω $P \subseteq \omega$, ώστε $0 \in P \& (n \in P \rightarrow n' \in P)$ (Θέλουμε $P = \omega$). Τότε $n \subseteq P \Rightarrow \text{είτε } n = 0 \text{ οπότε } n = 0 \in P$ είτε $n \subseteq P \& n = m'$ (χάποιο m) [άρα $m \in n$] δηλαδή $m \in P$ και κατά συνέπεια $m' = n \in P$. Άρα από AYE $P = \omega$.

7 Υπερπεπερασμένη Αναδρομή

Στο ω ορίζουμε συναρτήσεις αναδρομικά (ή όπως πολλές φορές λέμε επαγωγικά) π.χ. αν a είναι σύνολο και $\Theta(x, y)$ είναι συνθήκη, τέτοια ώστε $\forall x \exists!y \Theta(x, y)$ μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση f με $\text{dom}(f) = \omega$ έτσι ώστε:

$$\begin{aligned} f(0) &= a \\ f(n') &= \text{το μοναδικό } z \text{ ώστε } \Theta(f(n), z) \end{aligned}$$

ή όπως αλλοιώς λέμε «υπάρχει μία μοναδική λύση f » των εξισώσεων

$$\begin{aligned} \text{dom}(f) &= \omega \\ f(0) &= a \\ \forall n \in \omega, \quad &\Theta(f(n), f(n')). \end{aligned}$$

Η f ορίζεται αναδρομικά σημαίνει ότι σε κάθε βήμα χρησιμοποιεί για τον ορισμό της τις τιμές της στα προηγούμενα βήματα.

Παράδειγμα: Μπορούμε να ορίσουμε την πρόσθεση $n + m$ στο ω ($+ : \omega^2 \rightarrow \omega$) με αναδρομή στο m .

$$\begin{aligned} n + 0 &= n \\ n + m' &= (n + m)' . \end{aligned}$$

Για όλες αυτές οι συναρτήσεις, που διαισθητικά φαίνεται ότι ορίζονται με αδιαιμφισβήτητο τρόπο, πρέπει, στα πλαίσια της αξιωματικής συνολοθεωρίας, να είμαστε σε θέση να αποδεικνύουμε την ύπαρξή τους δηλ. να μπορούμε να αποδεικνύουμε την ύπαρξη μιας μοναδικής f που να είναι λύση των ιδιοτήτων που πρέπει να ικανοποιεί. Το πρόβλημα αυτό λύνεται γενικά με το θεώρημα της αναδρομής.

'Εστω $\Psi(x, y)$ προτασιακή συνάρτηση. Γράφουμε $y = \Psi(x)$ και εννοούμε $\Psi(x, y)$. Ο συμβολισμός αυτός δικαιολογείται από το γεγονός ότι $\forall x \exists!y \Psi(x, y)$. Δηλαδή όταν γράφουμε $a = \Psi(x)$ εννοούμε ότι a είναι το μοναδικό σύνολο z για το οποίο ισχύει η $\Psi(x, z)$.

Ορισμός 7.1 Εάν Ψ είναι προτασιακή συνάρτηση και A σύνολο γράφουμε $\Psi \upharpoonright A = \{(x, y) \mid x \in A \wedge \Psi(x, y)\} = \{\langle x, \Psi(x) \rangle \mid x \in A\}$.
(το $\Psi \upharpoonright A$ είναι σύνολο, από το αξιώμα της αντικατάστασης).

Σημείωση: $\Psi \upharpoonright \alpha = \{\langle \beta, \Psi(\beta) \rangle \mid \beta < \alpha\}$

Θεώρημα 7.2 (Υπερπεπερασμένη Αναδρομή) Αν Ψ προτασιακή συνάρτηση, b σύνολο τότε υπάρχει προτασιακή συνάρτηση Γ^{12} ώστε οι τιμές της στους διατακτικούς είναι μονοσήμαντα ορισμένες και ισχύει

$$\begin{aligned} \Gamma(0) &= b \\ \Gamma(\alpha) &= \Psi(\Gamma \upharpoonright \alpha), \text{ για κάθε διατακτικό } \alpha. \end{aligned}$$

¹²Γράφουμε απλώς Γ και εννοούμε μια προτασιακή συνάρτηση $y = \Gamma(x)$.

Η σχέση αυτή ονομάζεται σχέση αναδρομής.

Παρατήρηση: Μονοσήμαντα ορισμένη στους διατακτικούς σημαίνει ότι για κάθε άλλη προτασιακή συνάρτηση Θ η οποία ικανοποιεί την παραπάνω σχέση της αναδρομής ισχύει ότι $\Gamma(\alpha) = \Theta(\alpha)$, για κάθε διατακτικό α .

Απόδειξη: (Σκιαγράφηση)

Ιδέα: Να αποδείξουμε πρώτα ότι για κάθε $\alpha > 0$ υπάρχει μοναδική συνάρτηση $f_\alpha : \alpha \rightarrow \dots$, ($\delta\eta\lambda$. $\text{dom}(f_\alpha) = \alpha$), έτσι ώστε:

- $f_\alpha(0) = b$
- $f_\alpha(\beta) = \Psi(f_\alpha \upharpoonright \beta) \quad \forall \beta, 0 < \beta < \alpha.$

Επιπλέον $\forall \alpha' < \alpha, f_{\alpha'} \subset f_\alpha$. (Εδώ $f_{\alpha'} \subset f_\alpha$ σημαίνει ότι η f_α είναι επέκταση της $f_{\alpha'}$ από το α' στο α).

Η απόδειξη του πιο πάνω γίνεται με υπερπεπερασμένη επαγωγή.

Έστω ότι για όλα τα $\alpha < \beta$ ισχύουν αυτά που διατυπώθηκαν πιο πάνω. (Πρέπει να αποδείξουμε ότι αυτά ισχύουν και για το β δηλαδή ότι υπάρχει τέτοιο f_β).

Τρείς περιπτώσεις

1. $\beta = 1$. Τότε $f_1 = \{\langle 0, b \rangle\}$.
2. β είναι επόμενος διατακτικός > 1 , έστω $\beta = \gamma' = \gamma + 1$. Τότε f_γ είναι (από υπόθεση) μοναδικά προσδιορισμένη, θέτουμε $f_\beta = f_\gamma \cup \{\langle \gamma, \Psi(f_\gamma) \rangle\}$.
3. β είναι οριακός διατακτικός, θέτουμε $f_\beta = \cup\{f_\gamma \mid \gamma < \beta\}$.

Σε κάθε μία από τις τρείς περιπτώσεις f_β έχει τις απαιτούμενες ιδιότητες, συμπεριλαμβανομένης της μοναδικότητας. Άρα από υπερπεπερασμένη επαγωγή οι ιδιότητες ισχύουν για κάθε $\alpha > 0$.

Τώρα ορίζουμε προτασιακή συνάρτηση Γ με

$\Gamma(\alpha) = y$, αν $\forall \beta > \alpha (f_\beta(\alpha) = y)$, $\alpha \geq 0$

$\Gamma(x) = \emptyset$, αν x δεν είναι διατακτικός.

Ο τυπικός ορισμός του Γ θα ήταν

$$\Gamma(x, y) \leftrightarrow \exists \alpha (x = \alpha \wedge \forall \beta > \alpha (f_\beta(\alpha) = y)) \vee (\neg \exists \alpha (x = \alpha) \wedge y = \emptyset)$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $\forall x \exists ! y \Gamma(x, y)$, επειδή $\forall \beta, \beta' > \alpha, f_\beta(\alpha) = f_{\beta'}(\alpha)$. Άρα Γ είναι προτασιακή συνάρτηση, «η Γ είναι η ‘ένωση’ όλων των f_β ». Εκ κατασκευής, Γ έχει τις απαιτούμενες ιδιότητες δηλαδή

$$\Gamma(\alpha) = f_{\alpha+1}(\alpha) = \Psi(f_{\alpha+1} \upharpoonright \alpha) = \Psi(\Gamma \upharpoonright \alpha)$$

Μένει να αποδείξουμε ότι Γ ορίζεται μοναδικά στους διατακτικούς. Ας υποθέσουμε ότι όχι. Έστω ότι υπάρχει κάποια άλλη προτασιακή συνάρτηση

Γ' ώστε $\Gamma'(\alpha) \neq \Gamma(\alpha)$ για κάποιο α . Παίρνουμε το ελάχιστο τέτοιο α έστω β . Τότε

$$\Gamma'(\beta) = \Psi(\Gamma' \upharpoonright \beta) = \Psi(\Gamma \upharpoonright \beta) = \Gamma(\beta), \text{ άτοπο}$$

Πόρισμα 7.3 (Αναδρομή μέχρι ένα δοθέντα διατακτικό) Αν Ψ προτασιακή συνάρτηση και b σύνολο τότε υπάρχει μία μοναδική συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα δοθέντα διατακτικό δ ώστε

$$f(0) = b$$

$$f(\alpha) = \Psi(f \upharpoonright \alpha) \text{ για κάθε } \alpha \text{ με } 0 < \alpha < \delta$$

Απόδειξη: Ο περιορισμός της Γ , του προηγούμενου θεωρήματος, στον δ είναι συνάρτηση, από αξίωμα αντικατάστασης.

Παρατήρηση: Αν $\delta = \omega$ τότε παίρνουμε ακριβώς την αναδρομή στους φυσικούς αριθμούς.

Παράδειγμα: Για δοθέντα α , ορίζουμε προτασιακή συνάρτηση $\boxed{\alpha +}$ ώστε να ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\boxed{\alpha +}(0) = \alpha$$

$$\boxed{\alpha +}(\beta') = (\boxed{\alpha +}(\beta))'$$

$$\boxed{\alpha +}(\delta) = \cup \{ \boxed{\alpha +}(\beta) \mid \beta < \delta \}$$

Εδώ η Ψ μέσω της οποίας ορίζεται η $\Gamma = \boxed{\alpha +}$ είναι η εξής:

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) \leftrightarrow & (x \text{ είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα επόμενο διατακτικό } \beta' \\ & \text{και } \exists z (\langle \beta, z \rangle \in x \wedge y = z')) \\ \vee & (x \text{ είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα οριακό διατακτικό } \delta \\ & \text{και } y = \cup \{z \mid \exists \gamma (\langle \gamma, z \rangle \in x)\}) \\ \vee & (x \text{ δεν είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού διατακτικό και } y = \emptyset) \end{aligned}$$

Τότε $\boxed{\alpha +}(\beta) = \Psi(\boxed{\alpha +} \upharpoonright \beta)$, $\forall \beta > 0$.

Αν αντί του $\boxed{\alpha +}(\beta)$ γράψουμε $\alpha + \beta$ ο αναδρομικός ορισμός έχει τη μορφή $\alpha + 0 = \alpha$

$$\alpha + \beta' = (\alpha + \beta)'$$

$$\alpha + \lambda = \sup \{ \alpha + \mu \mid \mu < \lambda \}$$

Το $\alpha + \beta$ ορίζει την πρόσθεση των διατακτικών.

Μπορούμε να γράψουμε τέτοιους αναδρομικούς ορισμούς και να είμαστε βέβαιοι ότι η προτασιακή συνάρτηση ή η συνάρτηση που εισάγεται μέσω αυτού του ορισμού υπάρχει. Την ύπαρξη μας την εξασφαλίζει το θεώρημα της υπερπεπερασμένης αναδρομής και το πόρισμά του.

Για παράδειγμα μπορούμε να ορίσουμε τον πολλαπλασιασμό $\alpha \cdot \beta$ των διατακτικών ως ακολούθως. Για διατακτικό α γράψουμε την αναδρομική σχέση

$$\begin{aligned}\alpha \cdot 0 &= \alpha \\ \alpha \cdot (\beta + 1) &= (\alpha \cdot \beta) + \alpha \\ \alpha \cdot \lambda &= \sup\{\alpha \cdot \mu \mid \mu < \lambda\}\end{aligned}$$

Από θεώρημα αναδρομής ζέρουμε ότι η προτασιακή συνάρτηση Γ που δίνει τον πολλαπλασιασμό (δηλ. η Γ ώστε για κάθε β , $\Gamma(\beta)$ είναι το $\alpha \cdot \beta$) υπάρχει και ορίζεται μονοσήμαντα.

Παραδείγματα

1. Για οποιουσδήποτε διατακτικούς α, β, γ ισχύει $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

Απόδειξη: Για να αποδείξουμε ιδιότητες που αναφέρονται σε αντικείμενα που έχουν οριστεί με αναδρομή χρησιμοποιούμε συνήθως (υπερπεπερασμένη) επαγωγή. Θα δουλέψουμε λοιπόν με επαγωγή στον διατακτικό γ . Για να αποδείξουμε ότι η ιδιότητα ισχύει για όλα τα γ αρκεί να αποδείξουμε το επαγωγικό βήμα δηλ. να αποδείξουμε ότι με βάση την υπόθεση ότι η ιδιότητα ισχύει για όλα τα μικρότερα του γ επάγεται ότι η ιδιότητα ισχύει και για το γ . Και επειδή το (κάθε) γ είναι είτε 0 είτε επόμενος είτε οριακός μπορούμε να δουλέψουμε με περιπτώσεις:

1. Αν $\gamma = 0$, $(\alpha + \beta) + 0 = \alpha + \beta = \alpha + (\beta + 0)$.
2. Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε τον επόμενο διατακτικό γ' και ότι η ιδιότητα ισχύει για όλα τα $\beta < \gamma'$. Τότε
$$(\alpha + \beta) + \gamma' = ((\alpha + \beta) + \gamma)' = (\alpha + (\beta + \gamma))' = \alpha + (\beta + \gamma)' = \alpha + (\beta + \gamma').$$
3. Τέλος, υποθέτουμε ότι η ιδιότητα είναι αληθής για όλα τα $\beta < \gamma$, όπου γ είναι οριακός διατακτικός. Τότε
$$(\alpha + \beta) + \gamma = \sup\{(\alpha + \beta) + \delta \mid \delta < \gamma\} = \sup\{\alpha + (\beta + \delta) \mid \delta < \gamma\} = \alpha + \sup\{\beta + \delta \mid \delta < \gamma\} = \alpha + (\beta + \gamma).$$

2. Για $\alpha, \beta \in \omega$, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Απόδειξη: Πρώτα αποδεικνύουμε με επαγωγή ότι για κάθε $\gamma \in \omega$

$$0 + \gamma = \gamma \text{ και } 1 + \gamma = \gamma'$$

Για το πρώτο: $0 + 0 = 0$ και αν $0 + \gamma = \gamma$ τότε $0 + \gamma' = (0 + \gamma)' = \gamma'$ άρα αληθές $\forall \gamma \in \omega$.

Για το δεύτερο: $1 + 0 = 1 = 0'$

Αν $1 + \gamma = \gamma'$ τότε $1 + \gamma' = (1 + \gamma)' = \gamma''$ άρα αληθές για όλα τα $\gamma \in \omega$.

Τώρα για να αποδείξουμε $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ για $\alpha, \beta \in \omega$ δουλεύουμε με επαγωγή στο β . έχουμε $\alpha + 0 = \alpha = 0 + \alpha$ όπως έχει αποδειχτεί. Αν $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ τότε

$\alpha + \beta' = (\alpha + \beta)' = (\beta + \alpha)' = \beta + \alpha' = \beta + (1 + \alpha) = (\beta + 1) + \alpha = \beta' + \alpha$ όπου η προπροτελευταία ισότητα βγαίνει από το πρώτο μέρος και η προτελευταία από τη μεταβατικότητα.

8 Αρχή της καλής διάταξης

Ορισμός 8.1 Το σύνολο A μπορεί να διαταχθεί καλώς εάν υπάρχει $R \subseteq A \times A$ έτσι ώστε $\langle A, R \rangle$ είναι καλά διατεταγμένος χώρος. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η R διατάσσει καλώς το A ή ότι είναι καλή διάταξη του A .

Θεώρημα 8.2 Το σύνολο A μπορεί να διαταχθεί καλώς εάν και μόνον εάν υπάρχει διατακτικός α ώστε $A \sim \alpha$. (δηλαδή $\overline{A} = \overline{\alpha}$)

Απόδειξη: Έστω $f : A \rightarrowtail \alpha$. Ορίζουμε $R = \{(x, y) \mid x, y \in A \& f(x) \leq f(y)\}$.

Αντίστροφα, έστω $\langle A, R \rangle$ καλή διάταξη. Τότε απ' το θεμελιώδες θεώρημα των διατακτικών υπάρχει διατακτικός α ώστε $\langle A, R \rangle \cong \langle \alpha, \leq \rangle$ και κατά μείζονα λόγο $A \sim \alpha$.

Θεώρημα 8.3 (Αρχή της καλής διάταξης, Zermelo) (AC)

Κάθε σύνολο μπορεί να διαταχθεί καλώς.

Απόδειξη: Έστω A σύνολο.

Η ιδέα της απόδειξης είναι να ορίσουμε προτασιακή συνάρτηση Ψ στους διατακτικούς που να επιλέγει διαδοχικά στοιχεία του A έως ότου το A εξαντληθεί.

Έστω b σύνολο που δεν ανήκει στο A ($b \notin A$). Από αξίωμα της επιλογής υπάρχει συνάρτηση επιλογής f στο A δηλ. $\exists f$ ώστε για $B \subseteq A$ και $B \neq \emptyset$, $f(B) \in B$. Επεκτείνουμε την f σε δόλο το $\mathcal{P}(A)$ θέτοντας $f^* = f \cup \{\langle \emptyset, b \rangle\}$, δηλ. $f^*(\emptyset) = b$.

Ορίζουμε προτασιακή συνάρτηση Ψ με

$$\Psi(0) = f^*(A)$$

$$\Psi(\alpha) = f^*(A \setminus \{\Psi(\beta) \mid \beta < \alpha\})$$

Απ' το θεώρημα της υπερπερασμένης αναδρομής υπάρχει προτασιακή συνάρτηση Ψ με αυτές τις ιδιότητες.

Παρατηρήσεις:

- Η Ψ δεν μπορεί να αντιστοιχήσει δύο διατακτικούς στο ίδιο στοιχείο του A . Διότι έστω $\Psi(\alpha) = \Psi(\alpha') = a \in A$ και $\alpha < \alpha'$. Έχουμε $\Psi(\alpha') = f^*(A \setminus \{\Psi(\beta) \mid \beta < \alpha'\})$ και επειδή $\Psi(\alpha') \neq b$ πρέπει να έχουμε $a (= \Psi(\alpha')) \in A \setminus \{\Psi(\beta) \mid \beta < \alpha'\}$ (αδύνατον). [Διότι μέσω της f^* σε κάθε «στάδιο» α επιλέγεται ένα $\Psi(\alpha)$ που δεν ανήκει στο σύνολο $\{\Psi(\beta) \mid \beta < \alpha\}$ δηλ. στο σύνολο των προηγγθεισών τιμών της Ψ .]
- Για κάποιο α πρέπει να έχουμε $\Psi(\alpha) = b$. Έστω όχι. Τότε από την πρώτη παρατήρηση Ψ θα αντιστοιχούσε όλους τους διατακτικούς με αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία επί κάποιου υποσυνόλου A' του A . Θεωρείστε τώρα την Ψ^{-1} (που ορίζεται από $\Psi^{-1}(x, y) \leftrightarrow \Psi(y, x)$). Τότε η Ψ^{-1} είναι προτασιακή συνάρτηση επί του A' με πεδίο τιμών όλους τους διατακτικούς. Αυτό θα είχε

ως αποτέλεσμα η κλάση των διατακτικών να είναι σύνολο (από αξίωμα της αντικατάστασης).

Έστω τώρα α ο ελάχιστος διατακτικός ώστε $\Psi(\alpha) = b$. Τότε $\Psi \upharpoonright \alpha$ είναι απεικόνιση από το α στο A . Από παρατήρηση 1. $\Psi \upharpoonright \alpha$ είναι 1-1. Αλλά $\Psi \upharpoonright \alpha$ είναι και επί. Διότι επειδή $\Psi(\alpha) = f^*(A \setminus \{\Psi(\beta) \mid \beta < \alpha\}) = b$ έχουμε ότι $A \setminus \{\Psi(\beta) \mid \beta < \alpha\} = \emptyset \Rightarrow A \subseteq \{\Psi(\beta) \mid \beta < \alpha\} \Rightarrow \{\Psi(\beta) \mid \beta < \alpha\} = A$.

Αρα τελικά $\Psi \upharpoonright \alpha : \alpha \rightarrowtail A$.

Ο Zermelo αποδεικνύοντας ότι κάθε σύνολο μπορεί να διαταχθεί καλώς, έλυσε και το πρόβλημα της συγκρισιμότητας των πληθαρίθμων.

Πόρισμα 8.4 (AC) *Κάθε σύνολα A και B έχουν συγκρίσιμη πληθυκότητα δηλ. $A \preceq B$ ή $B \preceq A$.*

Απόδειξη: Εστω A και B σύνολα. Τότε από την αρχή της καλής διάταξης υπάρχουν διατακτικοί α και β ώστε $A \sim \alpha$ και $B \sim \beta$. Αλλά $\alpha \leq \beta$ ή $\beta \leq \alpha$ άρα είτε $\exists f : A \rightarrow B$ ή $\exists g : B \rightarrow A$.

Πόρισμα 8.5 *Η αρχή της καλής διάταξης είναι ισοδύναμη με το αξίωμα της επιλογής.*

Απόδειξη: Εστω A οποιοδήποτε σύνολο και έστω $R \subseteq A \times A$ μία καλή διάταξη του A . Τότε μπορούμε να ορίσουμε μία συνάρτηση επιλογής f στο A με $f(X) = \langle \text{«το ελάχιστο στοιχείο του } X \text{ ως προς τη διάταξη } R \rangle$ $[f(X) \text{ ορίζεται για κάθε } X \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}]$.

Το αντίστροφο είναι το Θεώρημα 8.3 του Zermelo.

Εφαρμογές του αξιώματος της επιλογής

Ορισμός 8.6 *Εστω $\langle A, \leq \rangle$ μερικά διατεταγμένος χώρος. Ενα σύνολο $X \subseteq A$ είναι αλυσίδα αν τα μέλη του X είναι συγκρίσιμα ανά δύο δηλ. $\forall x, y \in X (x \leq y \vee y \leq x)$*

Ενα στοιχείο $a \in A$ είναι άνω φράγμα για το υποσύνολο X του A εάν $\forall x (x \in X \rightarrow x \leq a)$.

Λέμε ότι το X έχει άνω φράγμα αν υπάρχει a που να είναι άνω φράγμα για το X .

Ένα στοιχείο $a \in A$ λέγεται μεγιστικό αν δεν υπάρχει $x \in A$ ώστε $a < x$.

Παρατηρήσεις: 1. Ένα άνω φράγμα του υποσυνόλου X μπορεί να ανήκει ή μπορεί να μην ανήκει στο X .

2. Γενικά μπορεί να υπάρχουν περισσότερα του ενός μεγιστικά στοιχεία του A π.χ. $A = \{x, y, z, z'\}$ και $<= \{\langle x, z \rangle, \langle x, z' \rangle, \langle y, z \rangle, \langle y, z' \rangle\}$.

Θεώρημα 8.7 (λήμμα του Zorn) *(AC) Αν κάθε αλυσίδα, σε κάποιο διαταγμένο χώρο A , έχει άνω φράγμα τότε ο A έχει τουλάχιστον ένα μεγιστικό στοιχείο.*

Απόδειξη: Έστω $\langle A, \leq \rangle$ έχει τις ιδιότητες του λήμματος ($A \neq \emptyset$). Από AC έστω f συνάρτηση επιλογής στο A . Όπως στην περίπτωση του θεωρήματος του Zermelo $f^* = f \cup \{\langle \emptyset, b \rangle\}$. Ορίζουμε προτασιακή συνάρτηση Ψ στους διατακτικούς

$$\Psi(0) = f^*(A)$$

$$\begin{aligned} \Psi(\alpha) &= f^*\{x \mid x \in A \wedge \forall \beta (\beta < \alpha \rightarrow \Psi(\beta) < x)\} \\ &= f^*(\text{σύνολο των αυστηρών άνω φραγμάτων του συνόλου} \\ &\quad \text{των προηγουμένων επιλεχθέντων}) \end{aligned}$$

Από τον ορισμό του Ψ ,

1. αν $\Psi(\alpha) = \Psi(\alpha') \in A$ τότε $\alpha = \alpha'$
2. Για κάποιο $\alpha, \Psi(\alpha) = b$

Αποδείξεις

για 1. Αν $\alpha < \alpha'$ τότε $\Psi(\alpha') = \text{κάποιο } x \text{ ώστε } \alpha < \alpha' \rightarrow \Psi(\alpha) < x$.

για 2. Αν δεν υπάρχει τέτοιο α τότε $\eta \Psi^{-1}$ προτασιακή συνάρτηση θα έδινε από αξίωμα αντικατάστασης ότι η κλάση των διατακτικών είναι σύνολο.

Έστω α ο ελάχιστος διατακτικός με $\Psi(\alpha) = b$. Τότε από 1. $\Psi \upharpoonright \alpha$ είναι μονομορφισμός από το α στο A . Επίσης από τον ορισμό του Ψ για κάθε $\beta, \beta' < \alpha$ ισχύει η

3. $\beta' < \beta \rightarrow \Psi(\beta') < \Psi(\beta)$

Συνάγεται ότι α δεν είναι οριακός διατακτικός. Διότι $\{\Psi(\beta) \mid \beta < \alpha\}$ είναι ολικά διατεταγμένο από το \leq (από 3.). Άρα έχει άνω φράγμα $a \in A$. Εάν α ήταν οριακός διατακτικός τότε θα είχαμε $a \notin \{\Psi(\beta) \mid \beta < \alpha\}$ όθεν $a \in \{x \mid x \in A \wedge \forall \beta (\beta < \alpha \rightarrow \Psi(\beta) < x)\}$ και έτσι το σύνολο αυτό θα ήταν $\neq \emptyset$. Άρα $\Psi(\alpha) \neq b$ (ατοπο). Άρα α είναι επόμενος έστω $\alpha = \alpha' + 1$. Τότε το $\Psi(\alpha')$ είναι μεγιστικό στοιχείο. Διότι $\{x \mid x \in A \wedge \forall \beta (\beta < \alpha \rightarrow \Psi(\beta) < x)\} = \emptyset$ και άρα $\{x \mid x \in A \wedge \Psi(\alpha') < x\} = \emptyset$. Άρα $\Psi(\alpha')$ είναι μεγιστικό.

Θεώρημα 8.8 (AC) Κάθε διανυσματικός χώρος έχει βάση.

[Πιο συγκεκριμένα βάση Hamel δηλ. ένα σύνολο X το οποίο είναι γραμμικά ανεξάρτητο και για το οποίο κάθε στοιχείο του χώρου γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του X .]

Απόδειξη: Έστω V είναι διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα F . Ενα υποσύνολο X του V λέγεται γραμμικά ανεξάρτητο αν για οποιαδήποτε $x_1, \dots, x_n \in X$ και $q_1, \dots, q_n \in F$ το $q_1 \cdot x_1 + \dots + q_n \cdot x_n = 0$ συνεπάγεται $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$.

Έστω Σ το σύνολο όλων των γραμμικά ανεξάρτητων υποσυνόλων του V . Η διάταξη $\langle \Sigma, \subseteq \rangle$ είναι μερική διάταξη. Έστω τώρα $S \subseteq \Sigma$ είναι μία αλυσίδα δηλ. ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του Σ . Θεωρούμε το $\cup S$. Το $\cup S$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διότι αν $x_1, \dots, x_n \in \cup S$ τότε $x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n$ για κάποια $X_1, \dots, X_n \in S$. Επειδή $\{X_1, \dots, X_n\}$ ολικά

διατεταγμένο με το \subseteq για κάποιο i έχουμε ότι $x_1, \dots, x_n \in X_i$ $1 \leq i \leq n$. Άρα $\{x_1, \dots, x_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο επειδή τέτοιο είναι και το X_i . Άρα το US είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Άρα $US \in \Sigma$ και έτσι είναι άνω φράγμα για το Σ . Άρα από λήμμα του Zorn υπάρχει μεγιστικό στοιχείο του Σ έστω $B \subseteq V$. Τότε επειδή B είναι μεγιστικό το B είναι βάση. (Ασκηση: δείξτε ότι το B είναι βάση).

Το πρόβλημα του Cauchy

Ονομάζουμε μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αθροιστική αν $f(x + y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Ερώτηση: Υπάρχει αθροιστική f ώστε f δεν είναι της μορφής $f(x) = \lambda x$;

Παρατήρηση του Cauchy: Εάν υπάρχει τέτοια f τότε είναι ασυνεχής.

Απόδειξη: Προφανώς $f(0) = 0$ [επειδή $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$].

Θέτουμε $f(1) = \lambda$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = f(1 + \dots + 1) = f(1) + f(1) + \dots + f(1) = n\lambda$

Ομοίως πάρνουμε ότι $f(\frac{n}{m}) = \lambda \frac{n}{m}$ επειδή $f(\frac{mn}{m}) = f(\frac{n}{m} + \dots + \frac{n}{m}) = f(\frac{n}{m}) + \dots + f(\frac{n}{m}) = mf(\frac{n}{m}) = f(n) = n\lambda$ άρα $f(\frac{n}{m}) = (\frac{n}{m})\lambda$.

Άρα για $x \in \mathbb{Q}^+ \rightarrow f(x) = \lambda x$

για $x \in \mathbb{Q}^+$ $f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$ άρα $f(-x) = -\lambda x = \lambda(-x)$

άρα $\forall x \in \mathbb{Q}$ $f(x) = \lambda x$

'Εστω τώρα f είναι συνεχής και $x \in \mathbb{R}$. Εάν q_1, q_2, \dots ακολουθία ρητών ώστε $\lim_{i \rightarrow \infty} q_i = x$ τότε $f(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(q_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda q_i = \lambda \lim_{i \rightarrow \infty} q_i = \lambda x$ δηλ. $f(x) = \lambda x$.

Θεώρημα 8.9 (AC, Hamel) *Υπάρχει αθροιστική $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία δεν είναι της μορφής $f(x) = \lambda x$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε το \mathbb{R} ως ένα διανυσματικό χώρο επί του \mathbb{Q} . Από θεώρημα 8.8 υπάρχει βάση Hamel B του \mathbb{R} επί του \mathbb{Q} . Κάθε στοιχείο $x \in \mathbb{R}$ έχει μοναδική αναπαράσταση

(*) $x = q_1 b_1 + \dots + q_n b_n$ με $b_1, \dots, b_n \in B$ και $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

'Εστω b κάποιο επιλεγμένο στοιχείο του B . Ορίζουμε f με

$f(x) =$ παράγων του b στην αναπαράσταση (*) όπου ο παράγων ισούται με 0 αν b δεν εμφανίζεται στην αναπαράσταση.

Προφανώς f είναι αθροιστική. Και f δεν είναι της μορφής λx επειδή η f παίρνει μόνον ρητές τιμές. (δεν μπορεί μία συνάρτηση να είναι της μορφής $f(x) = \lambda x$ και να παίρνει μόνον ρητές τιμές.)

Από θεώρημα 8.9 μπορούμε να συμπεράνουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι πολλαπλασιαστική και που δεν είναι της μορφής $g(x) = |x|^\lambda$.

Παίρνουμε $g(x) = e^{f(\log|x|)}$.

Δεν υπάρχει $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που να είναι και αθροιστική και πολλαπλασιαστική (πλην της ταυτοτικής). Αλλά ισχύει (Segre, 1947): Υπάρχει $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε f είναι και αθροιστική και πολλαπλασιαστική.

Λήμμα 8.10 (Hartogs) Για κάθε σύνολο A υπάρχει διατακτικός β έτσι ώστε δεν υπάρχει μονομορφισμός από το β στο A , ($\neg \exists f : \beta \rightarrow A$).

Απόδειξη: (αν υποθέσουμε το AC είναι τετριμένο. Από αρχή της καλής διάταξης $\exists \beta \sim \mathcal{P}(A)$).

Θα το αποδείξουμε χωρίς τη χρήση του αξιώματος της επιλογής. Έστω $\Sigma = \{R \mid R \text{ είναι καλή διάταξη ενός υποσυνόλου του } A\}$. Το Σ είναι υποσύνολο του $\mathcal{P}(A \times A)$ άρα είναι σύνολο. Ορίζουμε προτασιακή συνάρτηση Ψ στο Σ ως ακολούθως:

$$\Psi(R) = \text{o μοναδικός διατακτικός } \alpha \text{ ώστε } \langle \text{dom}(R), R \rangle \cong \langle \alpha, \leq \rangle$$

Είναι καλά ορισμένη επειδή σε κάθε καλή διάταξη αντιστοιχεί ένας μοναδικός διατακτικός ισομορφικός με αυτήν. Από το αξιώμα της αντικατάστασης η συλλογή των εικόνων του Ψ στο domain Σ είναι σύνολο. Άρα το πεδίο τιμών δεν μπορεί να περιλαμβάνει όλους τους διατακτικούς (γιατί;). Έστω β ο ελάχιστος διατακτικός που δεν βρίσκεται στο πεδίο τιμών της Ψ . Τότε δεν υπάρχει μονομορφισμός $\beta \rightarrow B$. Διότι αν υπήρχε αντιστοιχία $f : \beta \rightarrow B$ για κάποιο $B \subseteq A$. Άλλα ένα τέτοιο f εισάγει μια καλή διάταξη R του B ώστε $\Psi(R) = \beta$, άτοπο λόγω επιλογής του β .

Θεώρημα 8.11 $AC \Leftrightarrow$ Οποιαδήποτε δύο σύνολα έχουν συγχρίσιμη πληθικότητα.

Απόδειξη: \Rightarrow : Έχει ήδη αποδειχθεί.

\Leftarrow : Έστω A σύνολο. Από θεώρημα 8.10 $\exists \beta$ ώστε $\neg \exists$ μονομορφισμός από β στο A . Από υπόθεση $A \preceq \beta \wedge \beta \preceq A$. Επειδή αποκλείεται το δεύτερο, έχουμε $A \preceq \beta$ δηλ. $\exists f : A \rightarrow \beta$.

Ορίζουμε για $\emptyset \neq X \subseteq A$, $f(X) = f^{-1}(\text{του ελάχιστου } \alpha \text{ ώστε } f(x) = \alpha \text{ για κάποιο } x \in X)$.

Το αξιώμα της επιλογής μέσα στα πλαίσια της συνολοθεωρίας ZF είναι ισοδύναμο με κάθε μία από τις ακόλουθες προτάσεις. Αυτό σημαίνει ότι αντί να χρησιμοποιήσουμε το αξιώμα της επιλογής στην πορεία μιας απόδειξης μπορούμε ισοδύναμα να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε από αυτές τις προτάσεις.

Ισοδυναμίες

1. Αξιώματα επιλογής
2. Συγχρισμότητα πληθαρίθμων
3. Αρχή καλής διάταξης
4. Λήμμα του Zorn

'Όλα έχουν αποδειχθεί ισοδύναμα εκτός από το λήμμα του Zorn. Αρκεί να αποδείξουμε ότι από το λήμμα του Zorn συνεπάγεται οποιοδήποτε από τα υπόλοιπα τρία.

Θεώρημα 8.12 Λήμμα του Zorn \Rightarrow Συγχρισιμότητα πληθαρίθμων.

Απόδειξη: Εστω ότι το λήμμα του Zorn ισχύει και έστω A και B σύνολα. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $A \preceq B$ ή $B \preceq A$ δηλ. $\exists f : A \rightarrow B$ ή $\exists f : B \rightarrow A$.

Έστω $D = \{f \mid f \text{ είναι } 1\text{-}1 \text{ συνάρτηση με } \text{dom}(f) \subseteq A \text{ και } \text{Range}(f) \subseteq B\}$.

Κάθε $f \in D$ είναι σύνολο ζευγών. Το D είναι μερικά διατεταγμένο από \subseteq . Έστω τώρα K είναι μία αλυσίδα στο D . Αρκεί να αποδείξουμε ότι το D έχει άνω φραγμα για να ικανοποιούνται οι προυποθέσεις του λήμματος του Zorn. Παίρνουμε το $\cup K$, το οποίο είναι ένα σύνολο ζευγών. Πρέπει να αποδείξουμε ότι $\cup K \in D$. έστω $\langle x, y \rangle, \langle z, t \rangle \in \cup K$. Τότε $\exists f_1, f_2 \in K$ ώστε $\langle x, y \rangle \in f_1, \langle z, t \rangle \in f_2$.

Επειδή K γραμμικά διατεταγμένο από το \subseteq θα έχουμε $f_1 \subseteq f_2$ ή $f_2 \subseteq f_1$, έστω $f_1 \subseteq f_2$ δηλ. $\langle x, y \rangle, \langle z, t \rangle \in f_2$. Τότε

1. $x \in A \& y \in B$
2. Av $x = z$ τότε $y = t$, επειδή f_2 είναι συνάρτηση
3. Av $y = t$ τότε $x = z$ επειδή f_2 είναι 1-1

Άρα από 2. $\cup K$ είναι συνάρτηση, από 1. $\text{dom}(\cup K) \subseteq A$ και $\text{Range}(\cup K) \subseteq B$, από 3. $\cup K$ είναι 1-1. Άρα $\cup K \in D$. Άρα από Zorn έστω f είναι το μεγιστικό στοιχείο του D ως προς την \subseteq .

Υπάρχουν τρείς περιπτώσεις:

Περ1. $\text{dom}(f) \subset A, \text{Range}(f) \subset B$. Εστω $a \in A \setminus \text{dom}(f)$ και $b \in B \setminus \text{Range}(f)$. Τότε $f \subset f \cup \{\langle a, b \rangle\}$, άτοπο επειδή f μεγιστικό.

Περ2. $\text{dom}(f) = A$. Τότε $f : A \rightarrow B$

Περ3. $\text{Range}(f) = B$, τότε $f^{-1} : B \rightarrow A$.

Σημείωση: Είναι το αξίωμα της επιλογής, και κατά συνέπεια κάθε ισοδύναμη μ' αυτό πρόταση, αληθές; Μήπως μπορούμε να το αποδείξουμε, όπως στην αρχή των σημειώσεων αποδείξαμε την αρχή του διαχωρισμού, χρησιμοποιώντας τα αξιώματα ZF; Η απάντηση είναι ότι δεν μπορούμε να το αποδείξουμε και να αποφασίσουμε έτσι και το πρόβλημα της αλήθειας. Διότι έχει αποδειχθεί ότι:

- αν η θεωρία ZF είναι συνεπής τότε η θεωρία ZF+AC είναι συνεπής, και
- αν η θεωρία ZF είναι συνεπής τότε η θεωρία ZF+¬AC είναι συνεπής.

Δηλαδή δεν μπορούμε να αποδείξουμε ούτε το AC ούτε την αρνησή του. Κατά συνέπεια το AC είναι ένα γνήσιο αξίωμα, το οποίο οι μαθηματικοί το δέχονται ως αληθές λόγω των καλών συνεπειών (μερικές έχουμε ήδη δεί) που έχει στα μαθηματικά.

9 Πληθάριθμοι=Αρχικοί διατακτικοί

Ορισμός 9.1 Αρχικός διατακτικός ή πληθάριθμος είναι κάθε διατακτικός α τέτοιος ώστε

$$\forall \beta < \alpha, \bar{\beta} < \bar{\alpha} \quad (\delta\eta\lambda. \beta < \alpha \rightarrow \beta \prec \alpha)$$

π.χ. ω είναι πληθάριθμος.

Ισχύει (από το θεώρημα του Hartogs): $\forall \alpha \exists \beta \alpha \prec \beta$.

(Διότι αν α διατακτικός, από Hartogs υπάρχει β ώστε $\neg(\beta \preccurlyeq \alpha)$. Άρα $\alpha < \beta$ δηλ. $\alpha \preccurlyeq \beta$ και επειδή $\neg(\beta \preccurlyeq \alpha)$ έχουμε τελικά $\alpha \prec \beta$.

Από τα παραπάνω $\exists \alpha$ ώστε $\omega \prec \alpha$. Έστω ω_1 ο ελάχιστος διατακτικός α ώστε $\omega \prec \alpha$. Στη συνέχεια ω_2 ο ελάχιστος α ώστε $\omega_1 \prec \alpha$ κ.ο.κ.

Πρόταση 9.2 $\alpha < \omega_1 \rightarrow \alpha \prec \omega_1$ (ομοίως $\alpha < \omega_2 \rightarrow \alpha \prec \omega_2$ κ.λ.π.)

Απόδειξη: Έστω $\alpha < \omega_1$. Από ορισμό του ω_1 έχουμε $\neg(\omega \prec \alpha)$. Άρα $\alpha \preccurlyeq \omega$ άρα αν $\omega_1 \preccurlyeq \alpha \Rightarrow \omega_1 \preccurlyeq \omega \Rightarrow \neg(\omega \prec \omega_1)$ άτοπο. άρα $\neg(\omega_1 \preccurlyeq \alpha)$ άρα $\alpha \prec \omega_1$.

Παραδείγματα

1. Από παραπάνω πρόταση ω_1 (και βέβαια $\omega_2, \omega_3, \dots$) είναι πληθάριθμοι.

Γενικώτερα αν ω_α είναι πληθάριθμος τότε $\omega_{\alpha+1} =$ ο ελάχιστος β ώστε $\omega_\alpha \prec \beta$, είναι πληθάριθμος [ο επόμενος πληθάριθμος].

2. $n \in \omega \Rightarrow n$ είναι πληθάριθμος.

3. ω είναι πληθάριθμος.

Πρόταση 9.3 Οι άπειροι πληθάριθμοι είναι οριακοί διατακτικοί

Απόδειξη: Έστω β άπειρος και $\beta = \alpha'$. Θα δείξουμε ότι β δεν είναι πληθικός.

Επειδή $\omega \leq \beta$ & ω οριακός, $\omega < \beta$ άρα $\omega \leq \alpha$.

Ορίζουμε $g : \alpha' \rightarrow \alpha$ με

$$g(\alpha) = 0$$

$$g(\gamma) = \gamma' \text{ αν } \gamma < \omega$$

$$g(\gamma) = \gamma \text{ αν } \omega \leq \gamma < \alpha$$

γ είναι 1-1, άρα $\beta = \alpha' \preccurlyeq \alpha$, άρα $\neg(\alpha \prec \beta)$ και β δεν είναι πληθάριθμος.

Μπορούμε να ορίσουμε μία προτασιακή συνάρτηση που «καταγράφει» όλους τους πληθαρίθμους δηλ. από θεώρημα υπερπερασμένης αναδρομής υπάρχει ω_α ώστε

$$\omega_0 = \omega$$

$$\omega_{\alpha+1} = \text{ο επόμενος πληθάριθμος του } \omega_\alpha$$

$$\omega_\alpha = \sup\{\omega_\beta \mid \beta < \alpha\} \text{ αν } \alpha \text{ οριακός}$$

Κάθε πληθάριθμος α ισούται με κάποιο ω_β . Δηλαδή ο τελεστής ω_α καταγράφει όλους τους πληθαρίθμους.

Σημείωση: Το ω_α χρησιμοποιούνταν παλαιότερα, πριν ταυτιστούν οι «πληθικοί αριθμοί» με τους αρχικούς διατακτικούς. Τώρα αντί του ω_α χρησιμοποιούμε το \aleph_α δηλ.

$$\aleph_0 = \omega$$

$$\aleph_{\alpha+1} = \text{ο επόμενος πληθικός του } \aleph_\alpha$$

$$\aleph_\alpha = \sup\{\aleph_\beta \mid \beta < \alpha\}, \text{ αν } \alpha \text{ είναι οριακός}$$

Εχουμε λοιπόν τη σειρά

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots, \aleph_\omega, \aleph_{\omega+1}, \dots, \aleph_{\aleph_1}, \dots, \aleph_{\aleph_2}, \dots, \aleph_{\aleph_{\aleph_1}}, \dots$$

Από AC κάθε πληθικός αριθμός συνόλου A ταυτίζεται με κάποιο \aleph_α . Τι γίνεται με το \mathbb{R} ; Ξέρουμε ότι $\aleph_0 < \overline{\mathbb{R}}$. Πόσο είναι το $\overline{\mathbb{R}} = 2^{\aleph_0}$; Πρέπει για κάποιο α να έχουμε $2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$.

CH (Υπόθεση του συνεχούς - Continuum Hypothesis): $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ (Cantor).

$$\text{Ισοδύναμα: } \neg \exists \text{ σύνολο } A \subseteq \mathbb{R} \text{ ώστε } \aleph_0 = \overline{\mathbb{N}} < \overline{\mathbb{A}} < \overline{\mathbb{R}} = 2^{\aleph_0}$$

Είναι η υπόθεση του συνεχούς αληθής; Ο Cantor υπέθεσε πως ναι αλλά δεν μπόρεσε να την αποδείξει. Έκτοτε είχαμε τα εξής αποτελέσματα:

Gödel (1940): ZF συνεπής \Rightarrow ZF+AC+CH συνεπής. ('Οπου ZF είναι η αξιωματική θεωρία των Zermelo-Fraenkel και ZF+AC+CH αν σ' αυτήν προσθέσουμε το αξιώμα της επιλογής AC και τη υπόθεση του συνεχούς CH).

'Αρα είναι αδύνατο να μπορούμε να αποδείξουμε την άρνησή της. Ευελπιστούμε λοιπόν ότι μπορούμε να την αποδείξουμε. Αλλά

Cohen (1963): ZF συνεπής \Rightarrow ZF+AC+ \neg CH συνεπής. (όπου \neg CH είναι η άρνηση της υποθέσεως του συνεχούς CH).

'Αρα δεν μπορούμε να αποδείξουμε την CH.

Μένει λοιπόν ανοιχτό, με ποιο από τα \aleph_α ταυτίζεται το 2^{\aleph_0} .

Μπορούμε να αποκλείσουμε κάποια;

Θεώρημα του König $\Rightarrow 2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$.

Θεώρημα 9.4 (König) (AC) Έστω $\langle A_i \rangle_{i \in I}$ και $\langle B_i \rangle_{i \in I}$ οικογένειες, $I \neq \emptyset$, έτσι ώστε $\forall i \in I, \overline{A_i} < \overline{B_i}$. Τότε $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} < \overline{\prod_{i \in I} B_i}$.

Απόδειξη: Έστω όχι. Από τριχοτομία $\overline{\prod_{i \in I} B_i} \leq \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$. 'Αρα από προηγούμενο λήμμα (βλ. σημειώσεις) $\exists f : \bigcup_{i \in I} A_i \rightarrow \prod_{i \in I} B_i$.

Για κάθε i ορίζουμε $f_i : A_i \rightarrow B_i$ με $f_i(a) = (f(a))_{(i)}$ [δηλαδή το $f(a) : I \rightarrow \bigcup B_i$ και $(f(a))_{(i)}$ είναι η τιμή του $f(a)$ στο i .]

Κανένα f_i δεν μπορεί να είναι επιμορφισμός (επειδή $\overline{A_i} < \overline{B_i}$).

'Αρα $c_i = \{x \mid x \in B_i \wedge x \neq (f(a))_{(i)} \text{ για καννα } a \in A_i\} = B_i \setminus f_i[A_i] \neq \emptyset$.
 'Αρα $\prod_{i \in I} c_i \neq \emptyset$ από AC.

Αλλά αν $h \in \prod_{i \in I} c_i$ φανερά έχουμε $h \in \prod_{i \in I} B_i$. Αλλά h δεν μπορεί να είναι στο range της f επειδή $a \in \cup_{i \in I} A_i \Rightarrow a \in A_i$ για κποιο i $\Rightarrow (f(a))_{(i)} \notin c_i$ για κποιο i $\Rightarrow f(a) \neq h$. Άτοπο, επειδή f επιμορφισμός.

Πόρισμα 9.5 \mathbb{R} δεν είναι της μορφής $\cup_{i \in \omega} A_i$, όταν $\overline{\overline{A_i}} < 2^{\aleph_0}$ για $\forall i \in \omega$.

Απόδειξη: Θέτουμε $B_i = \mathbb{R}$ στο θεώρημα του König. Έχουμε τότε αν $\overline{\overline{A_i}} < 2^{\aleph_0} (= \overline{\mathbb{R}})$ από λήμμα του König.
 $\overline{\overline{\cup_{i \in \omega} A_i}} < \overline{\overline{\prod_{i \in \omega} B_i}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. Άρα $\overline{\overline{\cup_{i \in \omega} A_i}} \neq \overline{\mathbb{R}}$.

Πόρισμα 9.6 $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$.

Απόδειξη: Από ορισμό $\aleph_\omega = \cup_{i \in \omega} S_i$.

αν $\aleph_\omega = 2^{\aleph_0} = \cup_{i \in \omega} S_i$ τότε επειδή $S_i < \cup_{i \in \omega} S_i = \aleph_\omega$ έχουμε $S_i < \aleph_\omega = 2^{\aleph_0}$ άρα από πόρισμα $\cup S_i \neq 2^{\aleph_0}$, άτοπο.