

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 1

**Πρόβλημα 1.** Αν  $f : X \rightarrow Y$  και  $A, B \subseteq X$  τότε  $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$ .

**Πρόβλημα 2.** Για όλα τα σύνολα  $A, B, C$ ,

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \setminus (A \cap B) &= A \setminus B. \end{aligned}$$

**Πρόβλημα 3.** (Οι νόδοι του De Morgan.) Για όλα τα σύνολα  $A, B, C$ ,

$$\begin{aligned} C \setminus (A \cup B) &= (C \setminus A) \cap (C \setminus B), \\ C \setminus (A \cap B) &= (C \setminus A) \cup (C \setminus B). \end{aligned}$$

Επίσης, πιο γενικά, αν με  $\overline{A}$  συμβολίζουμε το συμπλήρωμα του  $A$  τότε

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \quad \text{και} \quad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$$

**Πρόβλημα 4.** Για κάθε μονομορφισμό  $f : X \rightarrow Y$  και για όλα τα  $A, B \subseteq X$ ,

$$\begin{aligned} f[A \cap B] &= f[A] \cap f[B], \\ f[A \setminus B] &= f[A] \setminus f[B]. \end{aligned}$$

Δείξτε επίσης ότι αυτές οι ισότητες δεν ισχύουν πάντα αν η  $f$  δεν είναι μονομορφισμός.

**Πρόβλημα 5.** Για κάθε  $f : X \rightarrow Y$  και όλα τα  $A, B \subseteq Y$ ,

$$\begin{aligned} f^{-1}[A \cup B] &= f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B], \\ f^{-1}[A \cap B] &= f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]. \end{aligned}$$

**Πρόβλημα 6.** Για κάθε  $f : X \rightarrow Y$  και για κάθε οικογένεια  $B_i \subseteq Y$  (αντίστοιχα  $A_i \subseteq X$ ),

$$\begin{aligned} f^{-1}\left[\bigcup_{i \in I} B_i\right] &= \bigcup_{i \in I} f^{-1}[B_i], \\ f^{-1}\left[\bigcap_{i \in I} B_i\right] &= \bigcap_{i \in I} f^{-1}[B_i], \\ f\left[\bigcup_{i \in I} A_i\right] &= \bigcup_{i \in I} f[A_i]. \end{aligned}$$

**Πρόβλημα 7.** Για κάθε μονομορφισμό  $f : X \rightarrow Y$  και κάθε οικογένεια συνόλων ώστε  $A_i \subseteq X$ ,

$$f\left[\bigcap_{i \in I} A_i\right] = \bigcap_{i \in I} f[A_i].$$

**Πρόβλημα 8.** Η σύνθεση μονομορφισμών είναι μονομορφισμός, η σύνθεση επιμορφισμών είναι επιμορφισμός και επομένως η σύνθεση αμφιμονοσήμαντων αντιστοιχιών είναι αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία.

### Προβλήματα 1 – Λύσεις

$$\begin{aligned} 1. \quad x \in f[A \cup B] &\Leftrightarrow \exists y \in A \cup B (x = f(y)) \\ &\Leftrightarrow \exists y \in A (x = f(y)) \vee \exists y \in B (x = f(y)) \\ &\Leftrightarrow x \in f[A] \vee x \in f[B] \\ &\Leftrightarrow x \in f[A] \cup f[B]. \end{aligned}$$

2. (a) Θα δείξουμε ότι  $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ . Διακρίνουμε περιπτώσεις:

$x \in A$  : Αμφότερα τα σκέλη τής ισοδυναμίας αληθεύουν.

$x \notin A$  : Για κάθε σύνολο  $S$  ισχύει  $x \in A \cup S \Leftrightarrow x \in S$ , οπότε

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in B \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in B \wedge x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \in A \cup C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

(b) Διουλεύουμε ομοίως.

(c)  $x \in A \setminus (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$  [διότι αφού το  $x \in A$ , εάν ανήκε στο  $B$  θα ανήκε και στο  $A \cap B$ ]  $\Leftrightarrow x \in A \setminus B$ .

$$\begin{aligned} 3. \quad x \in C \setminus (A \cup B) &\Leftrightarrow x \in C \wedge x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \in C \wedge (x \notin A \wedge x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \in C \wedge x \notin A) \wedge (x \in C \wedge x \notin B) \\ &\Leftrightarrow x \in C \setminus A \wedge x \in C \setminus B \\ &\Leftrightarrow x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B). \end{aligned}$$

Επίσης, εάν  $\overline{A}$  το συμπλήρωμα τού  $A$  ως προς ένα υπερσύνολο, τότε

$$\begin{aligned} x \in \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} &\Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I (x \notin A_i) \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I (x \in \overline{A_i}) \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}. \end{aligned}$$

Οι υπόλοιπες δύο σχέσεις τής πρότασης αποδεικνύονται ομοίως.

$$\begin{aligned} 4. \quad (a) \quad x \in f[A \cap B] &\Rightarrow \exists y \in A \cap B (x = f(y)) \\ &\Rightarrow \exists y \in A (x = f(y)) \wedge \exists y \in B (x = f(y)) \\ &\Rightarrow x \in f[A] \wedge x \in f[B] \\ &\Rightarrow x \in f[A] \cap f[B]. \end{aligned}$$

Αντιστρόφως,  $x \in f[A] \cap f[B] \Rightarrow x \in f[A] \wedge x \in f[B] \Rightarrow \exists y \in A (x = f(y)) \wedge \exists z \in B (x = f(z))$ . Επειδή η  $f$  είναι 1-1, τα  $y$  και  $z$  δε μπορεί να είναι διαφορετικά, άρα  $y \in A \cap B$ , άρα  $\exists y \in A \cap B (x = f(y)) \Rightarrow x \in f[A \cap B]$ .

$$\begin{aligned}
 (b) \quad x \in f[A] \setminus f[B] &\Rightarrow x \in f[A] \ \& \ x \notin f[B] \\
 &\Rightarrow \exists y \in A (x = f(y)) \ \& \ \forall y \in B (x \neq f(y)) \\
 &\Rightarrow \exists y \in A \setminus B (x = f(y))
 \end{aligned}$$

Η τελευταία γραμμή ισχύει επειδή το  $y$  που ανήκει στο  $A$ , για το οποίο  $x = f(y)$ , δεν μπορεί να ανήκει στο  $B$ . διότι για τα  $y \in B$  έχουμε  $x \neq f(y)$ .

Αντιστρόφως,  $x \in f[A \setminus B] \Rightarrow \exists y \in A \setminus B (x = f(y)) \Rightarrow$  επειδή  $f$  1-1 δε μπορεί να υπάρχει  $y \in B$  ώστε  $x = f(y) \Rightarrow \exists y \in A (x = f(y)) \ \& \ \forall y \in B (x \neq f(y)) \Rightarrow x \in f[A] \ \& \ x \notin f[B] \Rightarrow x \in f[A] \setminus f[B]$ .

Αντιπαράδειγμα:  $A = \{\alpha\}$ ,  $B = \{\beta\}$ ,  $f(\alpha) = f(\beta) = \gamma$  οπότε  $f[A \cap B] = f[\emptyset] = \emptyset$ ,  $f[A] \cap f[B] = \{\gamma\} \cap \{\gamma\} = \{\gamma\}$ ,  $f[A \setminus B] = f[\{\alpha\}] = \{\gamma\}$ ,  $f[A] \setminus f[B] = \{\gamma\} \setminus \{\gamma\} = \emptyset$ .

$$\begin{aligned}
 5. \quad x \in f^{-1}[A \cup B] &\Leftrightarrow f(x) \in A \cup B \\
 &\Leftrightarrow f(x) \in A \ \& \ f(x) \in B \\
 &\Leftrightarrow x \in f^{-1}[A] \ \& \ x \in f^{-1}[B] \\
 &\Leftrightarrow x \in f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B].
 \end{aligned}$$

Η άλλη σχέση ομοίως.

$$\begin{aligned}
 6. \quad x \in f^{-1}\left[\bigcup_{i \in I} B_i\right] &\Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i \in I} B_i \\
 &\Leftrightarrow \exists i \in I (f(x) \in B_i) \\
 &\Leftrightarrow \exists i \in I (x \in f^{-1}[B_i]) \\
 &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} f^{-1}[B_i].
 \end{aligned}$$

Η δεύτερη σχέση ομοίως και η τρίτη παρόμοια με το 1.

7. Παρόμοια με το 4.

8. Εάν  $f : A \rightarrow B$  και  $g : B \rightarrow C$  μονομορφισμοί,

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) &\Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \\
 &\Rightarrow f(x) = f(y) \quad [g \text{ 1-1}] \\
 &\Rightarrow x = y \quad [f \text{ 1-1}].
 \end{aligned}$$

Εάν  $f : A \twoheadrightarrow B$  και  $g : B \twoheadrightarrow C$  επιμορφισμοί,

$$\begin{aligned}
 z \in C &\Rightarrow \exists y \in B (g(y) = z) \quad [g \text{ επιμορφισμός}] \\
 &\Rightarrow \exists x \in A (g(f(x)) = z) \quad [f \text{ επιμορφισμός}] \\
 &\Rightarrow \exists x \in A ((g \circ f)(x) = z).
 \end{aligned}$$

## Προβλήματα 2

1. Για κάθε  $\alpha < \beta$  με  $\alpha, \beta$  πραγματικούς αριθμούς,  $\infty$  ή  $-\infty$ , κατασκεύασε ισομορφισμούς που πιστοποιούν τις ισοπληθικότητες

$$(\alpha, \beta) \sim (0, 1) \sim \mathbb{R}.$$

2. Για κάθε  $\alpha < \beta$ , κατασκεύασε ισομορφισμούς που πιστοποιούν τις ισοπληθικότητες

$$[\alpha, \beta] \sim [\alpha, \beta] \sim \mathbb{R}.$$

3.  $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R} \sim \mathbb{R}^n$ , για κάθε  $n \geq 2$ .

**Ορισμός 1** Για όλα τα σύνολα  $A, B$ ,

$$\begin{aligned} A \rightarrow B &\stackrel{\text{ορ}}{=} \{f \mid f : A \rightarrow B\} \\ &= \text{το σύνολο όλων των συναρτήσεων από } A \text{ στο } B \\ &= {}^A B. \end{aligned}$$

4. Για όλα τα σύνολα  $A, B, C$ ,

$$((A \times B) \rightarrow C) \sim (A \rightarrow (B \rightarrow C)).$$

5. Με τον ορισμό  $T_0 = \mathbb{N}$ ,  $T_{n+1} = \mathcal{P}(T_n)$  και  $T_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$ , για κάθε  $m$ ,

$$T_m \prec T_\infty.$$

Για τα τελευταία δύο προβλήματα χρειάζεται κάποια οικειότητα με τις συνεχείς συναρτήσεις.

6. Το σύνολο  $C[0, 1]$  όλων των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο κλειστό διάστημα  $[0, 1]$  είναι ισοπληθικό με το  $\mathbb{R}$ . [Υπόδειξη: Μία συνεχής συνάρτηση προσδιορίζεται μοναδικά από τις τιμές της στα ρητά σημεία.]
7. Το σύνολο των μονοτονικών πραγματικών συναρτήσεων στο κλειστό διάστημα  $[0, 1]$  είναι ισοπληθικό με το  $\mathbb{R}$ . [Υπόδειξη: Μία μονοτονική συνάρτηση έχει το πολύ αριθμήσιμο πλήθος σημείων ασυνέχειας.]

## Προβλήματα 2 – Λύσεις

- Η λύση στις διαλέξεις. Εναλλακτικά, η συνάρτηση  $f : (a, b) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  με  $f(x) = \frac{\pi}{b-a}x - \frac{\pi}{2}\frac{b+a}{b-a}$  είναι 1-1 και επί, με αντίστροφη  $f^{-1}(y) = \frac{b-a}{\pi}y + \frac{b+a}{2}$ . Το ίδιο ισχύει για τη συνάρτηση  $g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = \tan(x)$ . Άλλη λύση προκύπτει ως  $f : (a, b) \rightarrow (0, 1)$  με  $f(x) = \frac{x-a}{b-a}$  και  $g : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = \frac{2x-1}{x(1-x)}$ .
- Μία λύση μπορεί να βασιστεί στο λήμμα που προηγείται της απόδειξης του πορίσματος  $\overline{\text{Tr}} = 2^{\aleph_0}$  των διαλέξεων. Π.χ. για να αποδείξουμε ότι  $[a, b] = (a, b)$  παίρνουμε ένα αριθμήσιμο υποσύνολο του  $(a, b)$ , π.χ.  $k_n = a + \frac{b-a}{n+2}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Έστω τώρα  $f$  μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ του  $[a, b] \setminus \{a, k_0, k_1, \dots\}$ , δηλ. του  $(a, b) \setminus \{k_0, k_1, \dots, k_n, \dots\}$ , και του  $(a, b) \setminus \{k_0, k_1, \dots, k_n, \dots\}$ . Εν προκειμένω, η  $f$  μπορεί να είναι η ταυτοική, δηλ.  $f(x) = x$ . Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g : [a, b] \rightarrow (a, b)$  με

$$\begin{aligned} g(a) &= k_0 \\ g(k_n) &= k_{n+1} \\ g(x) &= f(x) \quad \text{αν } x \neq a, k_0, k_1, \dots, k_n, \dots \end{aligned}$$

Η  $g$  είναι 1-1 και επί.

Παρόμοια μπορούμε να δουλέψουμε στην περίπτωση των π.χ.  $[a, b]$  και  $\mathbb{R}$ .

- $\overline{\mathbb{R}^n} = \overline{\underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_n} = 2^{\aleph_0} \dots 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \dots + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \overline{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$ .

- (Βλ. νόμο (viii) πληθικής αριθμητικής.) Θα ορίσουμε μία 1-1, επί αντιστοιχία  $F : ((A \times B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$ . Εάν  $f \in ((A \times B) \rightarrow C)$ , ορίζουμε το  $F(f) : A \rightarrow (B \rightarrow C)$  ύστοντας  $F(f)(a) : B \rightarrow C$  να είναι η συνάρτηση που στέλνει το  $b \in B$  στο  $F(f)(a)(b) = f(\langle a, b \rangle)$ .

Η  $F$  είναι 1-1. Διότι έστω  $f \neq g$  και  $f, g : A \times B \rightarrow C$ . Επειδή  $f \neq g$  υπάρχουν  $a, b$  ώστε  $f(\langle a, b \rangle) \neq g(\langle a, b \rangle)$ . Συμπεραίνουμε ότι  $F(f) \neq F(g)$ . Πρός τούτοις αρκεί να υπάρχουν  $a \in A$  και  $b \in B$  ώστε  $F(f)(a)(b) \neq F(g)(a)(b)$ . Αλλά αυτό ισχύει διότι οι αντιστοιχεις τιμές τους  $f(\langle a, b \rangle)$  και  $g(\langle a, b \rangle)$  είναι άνισες.

Η  $F$  είναι επί. Διότι έστω  $g \in A \rightarrow (B \rightarrow C)$ . Τότε ορίζουμε  $f : A \times B \rightarrow C$  με  $f(\langle a, b \rangle) = g(a)(b)$ . Έχουμε ότι  $F(f)(a)(b) = f(\langle a, b \rangle) = g(a)(b)$ , άρα  $F(f) = g$ .

- Επειδή  $T_{n+1} = \mathcal{P}(T_n)$  έχουμε  $\overline{\overline{T_0}} < \overline{\overline{T_1}} < \overline{\overline{T_2}} < \dots < \overline{\overline{T_n}} < \dots$ . Πιο γενικά μπορούμε να αποδείξουμε ότι εάν  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  σύνολα ώστε  $\overline{\overline{A_1}} < \overline{\overline{A_2}} < \dots < \overline{\overline{A_n}} < \dots$  τότε εάν  $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  έχουμε για κάθε  $n$ ,  $\overline{\overline{A_n}} < \overline{\overline{S}}$ . Αυτό συμβαίνει επειδή  $A_n \subseteq S$  και για να αποδείξουμε ότι  $\overline{\overline{A_n}} < \overline{\overline{S}}$  αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο  $S$  δεν είναι ισοπληθικό με κανένα υποσύνολο του  $A_n$ . Εάν το  $S$  ήταν ισοδύναμο με υποσύνολο του  $A_n$  τότε το  $A_{n+1}$  ως υποσύνολο του  $S$  θα ήταν επίσης ισοπληθικό με κάποιο υποσύνολο του  $A_n$ , πράγμα που αντιφέρονται με την υπόθεση  $\overline{\overline{A_n}} < \overline{\overline{A_{n+1}}}$ .

6. Κάθε συνεχής συνάρτηση  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  προσδιορίζεται μοναδικά από τον περιορισμό της  $f$  στο υποσύνολο  $\mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq [0, 1]$ . Κι' αυτό διότι κάθε  $x \in [0, 1]$  είναι όριο μιας ακολουθίας  $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$  ρητών που ανήκουν στο  $[0, 1]$ , δηλ.  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = x$  άρα λόγω συνέχειας  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(q_n) = f(x)$ . Επειδή  $\mathbb{Q} \cap [0, 1] \preccurlyeq \mathbb{Q}$  και  $[0, 1] \preccurlyeq \mathbb{R}$ , το σύνολο  $\Sigma'$  όλων των συναρτήσεων  $f : \mathbb{Q} \cap [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  είναι  $\Sigma' \preccurlyeq \mathbb{Q}\mathbb{R} \preccurlyeq \mathbb{N}\mathbb{R}$ . Άρα το σύνολο  $\Sigma$  όλων των συνεχών συναρτήσεων στο  $[0, 1]$  με τιμές στο  $\mathbb{R}$  είναι

$$\Sigma \preccurlyeq \Sigma' \preccurlyeq \mathbb{N}\mathbb{R} \sim \mathbb{N}(\mathbb{N}_2) \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}_2 \sim \mathbb{N}_2 \sim \mathbb{R}$$

Και επειδή υπάρχουν τουλάχιστον  $\mathbb{R}$  το πλήθος συνεχείς τέτοιες συναρτήσεις (οι σταθερές στο  $[0, 1] \sim \mathbb{R}$ ) έχουμε ότι  $\mathbb{R} \preccurlyeq \Sigma \preccurlyeq \mathbb{R}$ , άρα και  $\Sigma \sim \mathbb{R}$ .

7. Ερώτηση: Σε κάθε απαριθμητό υποσύνολο  $A \subseteq \mathbb{R}$  πόσες συναρτήσεις  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  αντιστοιχούν ώστε τα σημεία ασυνέχειας της  $f$  να είναι τα σημεία του συνόλου  $A$ . Επειδή στα σημεία  $\mathbb{R} \setminus A$  η συνάρτηση είναι συνεχής, με σκεπτικό ανάλογο της προηγούμενης άσκησης μπορούμε να δούμε ότι αυτές οι συναρτήσεις  $f$  προσδιορίζονται επακριβώς από τις τιμές τους στο  $A$  και στα ρητά σημεία του  $[0, 1]$ . Οι τιμές που μπορούν να πάρουν στο  $A \preccurlyeq \mathbb{N}$  είναι το πολύ  $\mathbb{N}\mathbb{R}$  δηλαδή  $\mathbb{R}$  και για κάθε τέτοια περίπτωση, όπως στην προηγούμενη άσκηση,  $\mathbb{R}$  το πολύ περιπτώσεις συναρτήσεων. Άρα αν  $\Sigma$  είναι το σύνολο όλων των δυνατών περιπτώσεων τέτοιων συναρτήσεων με υποσύνολο σημείων ασυνεχείας  $A \preccurlyeq \mathbb{N}$ , έχουμε  $\Sigma \preccurlyeq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$  δηλ.  $\Sigma \preccurlyeq \mathbb{R}$ . Πόσα τέτοια υποσύνολα  $A$  μπορούν να υπάρξουν. Το πολύ  $\mathbb{N}\mathbb{R} \sim \mathbb{R}$ . Άρα, τελικά, το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων με ένα απαριθμητό σύνολο σημείων ασυνέχειας είναι το πολύ  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  δηλ. τελικά ισοπληθικό με το  $\mathbb{R}$ .

### ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 3

**Πρόβλημα 1.** Μπορούμε να ορίσουμε ως καλώς ορισμένες ή οριστικές τις συνθήκες  $\Theta(x, y, \dots, z)$  που μπορούν να οριστούν με βάση σχέσεις της μορφής  $x \in y$  ή  $x = y$  και τη χρήση των λογικών συνδέσμων  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$  και των ποσοδεικτών  $\forall$  και  $\exists$ .

π.χ. η συνθήκη  $x \subseteq y$  είναι καλώς ορισμένη επειδή είναι ισοδύναμη με το  $\forall t (t \in x \rightarrow t \in y)$  [χρησιμοποιήθηκαν τα  $t \in x, t \in y, \rightarrow$  και  $\forall t$ ].

Αποδείξτε βρίσκοντας κατάλληλα ισοδύναμα ότι οι συνθήκες

$$x = \{y\}, x = \mathcal{P}(y), x = \langle y, z \rangle, x = \cup y, \langle y, z \rangle \in x$$

είναι καλώς ορισμένες.

**Πρόβλημα 2.** Ενα σύνολο  $B$  ονομάζεται αθεμελίωτο αν υπάρχει ακολουθία συνόλων  $B_0, B_1, B_2, B_3, \dots$  έτσι ώστε  $B = B_0, B_1 \in B_0, B_2 \in B_1, B_3 \in B_2, \dots$  κ.ο.κ. Δείξτε ότι δεν υπάρχει σύνολο  $A$  τέτοιο ώστε για σύνολο  $X$

$$X \in A \leftrightarrow X \text{ δεν είναι αθεμελίωτο.}$$

**Πρόβλημα 3.** Εστω  $A$  σύνολο. Αποδείξτε ότι υπάρχει σύνολο  $b$  ώστε

$$x \in b \leftrightarrow \exists a, a \in A \ \& \ x = \{a\}$$

(δηλ.  $\{\{a\} | a \in A\}$  είναι σύνολο).

Δείξτε επίδης ότι  $\{\{a, b\} | a, b \in A\}$  είναι σύνολο.

**Πρόβλημα 4.** Δείξτε ότι  $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ ,  $\mathcal{PP}(\emptyset) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$  και  $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ . Κατόπιν δείξτε ότι το αξιώμα του ζεύγους μπορεί να αποδειχθεί από τα υπόλοιπα αξιώματα.

**Πρόβλημα 5.** Εστω  $A$  σύνολο. Ορίστε ένα σύνολο  $B$  ώστε  $B \notin A$ .

**Πρόβλημα 6.** Εστω  $A$  σύνολο. Δείξτε ότι τα  $\{\langle x, y \rangle | x, y \in A \ \& \ x \in y\}$  και  $\{\langle x, y \rangle | \langle y, x \rangle \in A\}$  είναι σύνολο.

Υποθέστε ότι για κάθε σύνολο  $a$  υπάρχουν το πολύ δύο σύνολα  $b$  έτσι ώστε  $\Theta(a, b)$  ισχύει. Δείξτε ότι το

$$\{b | \exists x (x \in A \wedge \Theta(x, b))\}$$

είναι σύνολο.

**Πρόβλημα 7.** Δείξτε ότι δεν υπάρχει σύνολο  $A$  ώστε

$$x \in A \leftrightarrow \exists y, x = \{y\}$$

[Αυτό το «σύνολο» αντιστοιχεί στον αριθμό 1 του Frege, δηλ. την κλάση όλων των συνόλων με ένα στοιχείο.]

**Πρόβλημα 8.** Εστω  $a, b$  δύο διαφορετικά σύνολα. Θέτουμε

$$\Gamma x, y \vdash = \{\{x, a\}, \{y, b\}\}$$

Δείξτε ότι αν  $x \neq x'$  τότε  $\{x, a\} \neq \{x', a\}$  και είτε  $\{y, b\} \neq \{x', a\}$  ή  $\{x, a\} \neq \{y', b\}$ .

Κατόπιν δείξτε ότι

$$\ulcorner x, y \urcorner = \ulcorner x', y' \urcorner \leftrightarrow x = x' \& y = y'$$

[Δηλαδή το  $\ulcorner \cdot \urcorner$  λειτουργεί ως τελεστής διατεταγμένου ζεύγους.]

### ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 3 — ΛΥΣΕΙΣ

#### Λύση 1.

$x = \{y\}$  είναι ισοδύναμο με το  $\forall z (z \in x \leftrightarrow z = y)$ .

$x = \mathcal{P}(y)$  είναι ισοδύναμο με το  $\forall z (z \in x \leftrightarrow z \subseteq y)$  και ζέρουμε ότι  $z \subseteq y$  είναι οριστική.

$x = \{y, z\}$  είναι ισοδύναμο με το  $\forall t (t \in x \leftrightarrow t = y \vee t = z)$ .

$\langle y, z \rangle = x$  είναι ισοδύναμο με το  $\forall u (u \in x \leftrightarrow u = \{y\} \vee u = \{y, z\})$ .

$x \in \cup y$  είναι ισοδύναμο με το  $\exists t (t \in y \wedge x \in t)$ .

$\langle y, z \rangle \in x$  είναι ισοδύναμο με το  $\exists t (\langle y, z \rangle = t \wedge t \in x)$  (εναλλακτικά με το  $\forall t (\langle y, z \rangle = t \rightarrow t \in x)$ ).

#### Λύση 2.

Εστω ότι υπάρχει το  $A$ . Τότε αν  $A \in A$ , η ακολουθία  $B_n = A$  δείχνει ότι το  $A$  είναι αθεμελίωτο άρα  $A \notin A$ . Εάν  $A \notin A$  τότε  $A$  είναι αθεμελίωτο. Εστω  $A = A_0, A_1 \in A_0, A_2 \in A_1, \dots$ . Τότε  $A_1 \in A$  και η ακολουθία  $A_1, A_2, A_3, \dots$  δείχνει ότι  $A_1$  είναι αθεμελίωτο άρα  $A_1 \notin A$  (άτοπο). Άρα  $\neg(A \notin A)$ .

#### Λύση 3.

Θέτουμε  $\Phi(x, y) \leftrightarrow \forall z (z \in y \leftrightarrow z = x)$  (δηλ.  $\Phi(x, y) \leftrightarrow y = \{x\}$ ). Ελέγξτε ότι  $\forall x, y, z, \Phi(x, y) \wedge \Phi(x, z) \rightarrow y = z$  δηλ. ότι  $\Phi(x, y)$  είναι προτασιακή συνάρτηση. Χρησιμοποιώντας το αξίωμα της αντικατάστασης υπάρχει σύνολο  $b$  ώστε  $u \in b \leftrightarrow \exists t (t \in A \wedge \Phi(t, u))$  ( $\leftrightarrow u = \{t\}$  για κάποιο  $t \in A$ ).

Για το δεύτερο μέρος (η μέθοδος αυτή λειτουργεί επίσης και για το πρώτο μέρος) χρησιμοποιούμε το αξίωμα του διαχωρισμού και

$$\{\{a, b\} | a, b \in A\} = \{u | u \in \mathcal{P}(A) \wedge \exists x \exists y \forall z (z \in u \leftrightarrow (z = x \vee z = y))\}$$

#### Λύση 4.

Για το πρώτο μέρος χρησιμοποιούμε το αξίωμα της έκτασης, π.χ.

$$x \in \mathcal{P}(\emptyset) \leftrightarrow x \subseteq \emptyset \leftrightarrow \forall z (z \in x \rightarrow z \in \emptyset) \leftrightarrow \forall z (z \notin x) \leftrightarrow x = \emptyset \leftrightarrow x \in \{\emptyset\}$$

Ομοίως και για την άλλη ισότητα. Επειδή  $\emptyset \in \{\emptyset\}$  ενώ  $\emptyset \notin \emptyset$  έχουμε  $\emptyset \neq \{\emptyset\}$ .

Για το δεύτερο μέρος θεωρούμε το σύνολο  $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \mathcal{PP}(\emptyset)$  το οποίο υπάρχει από το αξίωμα του κενού συνόλου και το αξίωμα του δυναμοσυνόλου (δηλ. το  $\emptyset$  υπάρχει από το αξίωμα του κενού συνόλου, το  $\mathcal{P}(\emptyset)$  από το αξίωμα του δυναμοσυνόλου και το  $\mathcal{PP}(\emptyset)$  υπάρχει με ακόμη μία εφαρμογή του αξιώματος του δυναμοσυνόλου). Εστω τώρα σύνολα  $a$  και  $b$ . Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο  $\{a, b\}$  υπάρχει. Ορίζουμε συνθήκη  $\Psi(x, y) \leftrightarrow (x = \emptyset \wedge y = a) \vee (x \neq \emptyset \wedge y = b)$ . Είναι προφανές ότι  $\forall x \exists! y \Psi(x, y)$

δηλ. η  $\Psi(x, y)$  είναι προτασιακή συνάρτηση. Αλλά τότε από αξίωμα αντικατάστασης έχουμε ότι η κλάση  $\{y \mid \exists x (x \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \wedge \Psi(x, y))\} = \{a, b\}$  είναι σύνολο.

**Λύση 5.** Εστω  $A$  σύνολο. Ορίστε ένα σύνολο  $B$  ώστε  $B \notin A$ .

Θέστε  $B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin x\}$ . Το  $B$  είναι σύνολο από την αρχή του διαχωρισμού. Αλλά τότε αν  $B \in A$  έχουμε  $B \in B \leftrightarrow B \notin B$  όπως στο παράδοξο του Russell.

**Λύση 6.**

$\{\langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \in y\} = \{t \mid t \in A \times A \wedge \exists x \exists y (t = \langle x, y \rangle \wedge x \in y)\}$  είναι σύνολο από το αξίωμα του διαχωρισμού. Σημειώστε ότι  $\langle x, y \rangle \in A \rightarrow x, y \in \cup \cup A$  άρα  $\{\langle x, y \rangle \mid \langle x, y \rangle \in A\} = \{t \mid t \in \cup \cup A \times \cup \cup A \wedge \exists x \exists y (t = \langle x, y \rangle \wedge \langle y, x \rangle \in A)\}$ , άρα σύνολο, πάλι από την αρχή του διαχωρισμού.

Για το δεύτερο μέρος θεωρείστε την οριστική συνθήκη

$$\Psi(a, t) \equiv \exists x \exists y (t = \{x, y\} \wedge \Theta(a, x) \wedge \Theta(a, y)) \vee \neg \exists x (\Theta(a, x) \wedge t = \emptyset)$$

δηλ.

- $t = \{x, y\}$  στην περίπτωση που υπάρχουν δύο  $b$ , δηλαδή τα  $x$  και  $y$ , ώστε να ισχύει  $\Theta(a, b)$
- $t = \{x\}$  στην περίπτωση που υπάρχει ένα  $b$  ( $b = x$ )
- και  $t = \emptyset$  στην περίπτωση που δεν υπάρχει κανένα.

Σχηματίστε το σύνολο  $D = \{c \mid \exists a (a \in A \wedge \Psi(a, c))\}$  και κατόπιν πάρτε το  $\cup D$  το οποίο είναι το ζητούμενο σύνολο.

**Λύση 7.** Δείξτε ότι δεν υπάρχει σύνολο  $A$  ώστε

$$x \in A \leftrightarrow \exists y, x = \{y\}$$

[Αυτό το «σύνολο» αντιστοιχεί στον αριθμό 1 του Frege, δηλ. την κλάση όλων των συνόλων με ένα στοιχείο.]

Εάν το  $A$  ήταν σύνολο τότε κάθε σύνολο θα ήταν μέλος του  $\cup A$  δηλ.  $\forall x (x \in \cup A)$ . Αλλά τότε από πρόβλημα 5 θα υπήρχε σύνολο  $B$  ώστε  $B \notin \cup A$  (άτοπο).

**Λύση 8.**

Εστω  $x \neq x'$ . Εάν  $x \neq a$  τότε  $x \notin \{x', a\}$  και  $x \in \{x, a\}$  άρα  $\{x', a\} \neq \{x, a\}$ . Εάν  $x = a$  τότε  $x' \neq a$  (επειδή  $x' \neq x$ ) άρα ομοίως  $\{x', a\} \neq \{x, a\}$ . Άρα τελικά  $\{x', a\} \neq \{x, a\}$ . Εάν  $\{y, b\} = \{x', a\}$  τότε  $b \in \{x', a\}$  άρα  $b = x'$  επειδή  $b \neq a$ , άρα  $b \notin \{x, a\}$  άρα  $\{x, a\} \neq \{b, y'\}$ .

Το τελευταίο μέρος βγαίνει χρησιμοποιώντας την προφανή συμμετρία μεταξύ  $a$  και  $b$ .

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 4

**Πρόβλημα 1.** Έστω  $<$  μία μερική διάταξη στο σύνολο  $A$ . Δώστε αντιπαραδείγματα για κάθε ένα από τα ακόλουθα:

1. αν  $x, y \in A$  και  $x < y$  τότε  $\forall z \in A (x < z \vee z < y)$ .
2.  $\exists z \in A$  έτσι ώστε· εάν  $x \in A$  τότε  $\neg(x < z)$ .
3. εάν  $x, y \in A$  και  $\forall z \in A (z < x \leftrightarrow z < y)$  τότε  $x = y$ .

(Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ , κ.λ.π.). Πια από τα ανωτέρω είναι αληθή όταν  $<$  είναι οποιαδήποτε γραμμική διάταξη;

**Πρόβλημα 2.** Δείξτε ότι  $\sup\{\alpha, \beta\} = \alpha \cup \beta$ .

**Πρόβλημα 3.** Έστω  $X$  ένα μη κενό σύνολο διατακτικών. Δείξτε ότι  $\bigcap X$  είναι το ελάχιστο στοιχείο του  $X$ .

**Πρόβλημα 4.** Έστω  $<\subseteq B^2 = B \times B$  έτσι ώστε  $\forall X \subseteq B$  με  $X \neq \emptyset$  υπάρχει  $e \in X$  ώστε για όλα τα  $b \in X$ ,  $e < b$  ή  $e = b$  και έτσι ώστε για  $a, c \in B$  ( $a < c \rightarrow \neg(c < a)$ ). Δείξτε ότι  $<$  διατάσσει καλώς το  $B$ .

**Πρόβλημα 5.** Έστω  $<_A, <_B$  καλές διατάξεις στα  $A, B$  αντίστοιχα. Έστω  $<\subseteq (A \times B)^2$  έτσι ώστε  $\langle a, b \rangle < \langle a', b' \rangle \leftrightarrow (a <_A a') \vee (a = a' \wedge b <_B b')$ . Δείξτε ότι  $<$  διατάσσει καλώς το  $A \times B$ .

**Πρόβλημα 6.** Έστω  $<$  καλή διάταξη στο  $A$  και  $F : A \rightarrow A$  σέβεται τη διάταξη (δηλ.  $a < b \rightarrow F(a) < F(b)$ ). Δείξτε ότι για  $a \in A$ ,  $a \leq F(a)$ .

## ΛΥΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 4

### Λύση 1

1. Έστω  $A = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}\}$  με  $a, b, c$  διαφορετικά και  $<$  τη σχέση του γνησίου υποσυνόλου.
2. Εάν  $A$  είναι το  $\mathbb{Z}$  με τη συνήθη διάταξη.
3. Έστω  $A = \{\{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}\}$  με  $a, b, c$  διαφορετικά και  $<$  τη σχέση του γνησίου υποσυνόλου.
  1. Είναι αληθής για τη γραμμική διάταξη  $\neg(z < y) \Rightarrow$  είτε  $z = y$  (οπότε  $x < z$ ) ή  $y < z$  (οπότε  $x < z$  από μεταβατικότητα).
  2. Ψευδής για τη γραμμική διάταξη.
  3. Αληθής για τη γραμμική διάταξη. Επειδή υποθέτοντας  $\forall z \in A, z < x \leftrightarrow z < y, \exists z \in A, y < z < x$ , έχουμε  $y < x \rightarrow y < x$ , άτοπο και  $x < y \rightarrow x < x$  άτοπο, άρα πρέπει  $x = y$ .

### Λύση 2

$$\Delta\text{ιότι } \sup\{\alpha, \beta\} = \cup\{\alpha, \beta\} = \alpha \cup \beta.$$

### Λύση 3

Έστω  $\delta$  το ελάχιστο στοιχείο του  $X$ . Τότε  $\forall \alpha \in X, \delta \subseteq \alpha$  άρα

$$\begin{aligned} \beta \in \delta &\Leftrightarrow \beta \in \alpha, \forall \alpha \in X \quad (\text{το } \leftarrow \text{ διότι } \delta \in X) \\ &\Leftrightarrow \beta \in \cap X \end{aligned}$$

### Λύση 4

Πρέπει να δείξουμε ότι  $<$  διατάσσει γραμμικά το  $B$ . Έστω  $b_1, b_2 \in B$ . Τότε  $\emptyset \neq \{b_1, b_2\} \subseteq B$  και ας υποθέσουμε ότι  $b_1$  είναι το ελάχιστο στοιχείο του  $\{b_1, b_2\}$  δηλ.  $\forall b \in \{b_1, b_2\}, b_1 < b \vee b_1 = b$ . Τότε  $b_1 < b_2$  ή  $b_1 = b_2$ . Άρα ακριβώς ένα από τα  $b_1 < b_2, b_1 = b_2, b_2 < b_1$  ισχύει επειδή αν ίσχυαν δύο θα είχαμε  $b_1 < b_2$  και  $b_2 < b_1$ . Τελικά, για να δείξουμε τη μεταβατικότητα, δοθέντων  $a < b, b < c$  δείξτε ότι το  $a$  πρέπει να είναι το ελάχιστο στοιχείο του  $\{a, b, c\}$ .

### Λύση 5

Έστω  $X \subseteq A \times B, X \neq \emptyset$ . Έστω  $a_0$  το ελάχιστο στοιχείο του  $Y = \{a \mid a \in A \wedge \exists b (b \in B \wedge \langle a, b \rangle \in X)\}$  ως προς  $<_A$  και  $b_0$  το ελάχιστο στοιχείο του  $Z = \{b \mid b \in B \wedge \langle a_0, b \rangle \in X\}$  ως προς  $<_B$ . Τότε για  $\langle a, b \rangle \in X$  θα είναι  $a \in Y$  άρα είτε  $a_0 < a$  στην οποία περίπτωση  $\langle a_0, b_0 \rangle < \langle a, b \rangle$  ή  $a = a_0$  στην οποία περίπτωση  $b \in Z$ . Άρα  $b_0 \leq_B b$  και  $\langle a_0, b_0 \rangle < \langle a, b \rangle$  ή  $\langle a_0, b_0 \rangle = \langle a, b \rangle$ . Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι  $\langle a, b \rangle < \langle a', b' \rangle \rightarrow \neg(\langle a', b' \rangle < \langle a, b \rangle)$ . Το ζητούμενο έπεται από το πρόβλημα 4.

### Λύση 6

Ας υποθέσουμε αντίθετα ότι  $F(a) < a$  για κάποιο  $a \in A$ . Έστω  $a_0$  το ελάχιστο τέτοιο  $a$ . Τότε, επειδή  $F$  σέβεται τη διάταξη, από  $F(a_0) < a_0$  παίρνουμε  $F(F(a_0)) < F(a_0)$  και επειδή  $F(a_0) < a_0$  παραβιάζεται η ελαχιστότητα του  $a_0$ , άρα άτοπο!

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 5

**Πρόβλημα 1.** Ποιά από τα παρακάτω είναι αληθή. Τα  $A_1, A_2$  είναι σύνολα διατακτικών αριθμών.

1.  $x \in \alpha, \alpha \in \beta \rightarrow x \in \beta$
2.  $\alpha \in x, x \in \beta \rightarrow \alpha \in \beta$
3.  $\alpha \in \beta, \beta \in x \rightarrow \alpha \in x$
4.  $\alpha \leq \beta \leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$
5.  $\alpha \leq \beta \leftrightarrow \alpha \cap \beta = \alpha$
6.  $\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha \cap \beta \neq \beta$
7.  $A_1 \cap A_2 = \emptyset \rightarrow \sup(A_1) \neq \sup(A_2)$
8.  $\sup(A_1) < \text{seq}(A_1)$
9. Άν  $a \subseteq b$  και  $<$  διατάσσει καλώς το  $b$  τότε  $< \cap a^2$  διατάσσει καλώς το  $a$

**Πρόβλημα 2.** Έστω  $f : A \rightarrow \alpha$  μονομορφισμός και  $R = \{\langle a, b \rangle \mid a, b \in A \wedge f(a) < f(b)\}$ . Δείξτε ότι  $R$  διατάσσει καλώς το  $A$ .

**Πρόβλημα 3.** Έστω  $A$  σύνολο διατακτικών. Δείξτε ότι  $\cup A$  είναι διατακτικός και ότι  $\cup A = \sup(A)$ .

Έστω  $f : \omega \rightarrow \text{Ord}$  δηλ.  $f$  είναι συνάρτηση με  $\text{domain}(f) = \omega$  και  $\forall n \in \omega, f(n) \in \text{Ord}$ , έτσι ώστε  $n < m \rightarrow f(n) < f(m)$ . Δείξτε ότι  $\cup\{f(n) \mid n \in \omega\}$  είναι οριακός διατακτικός. Όθεν δείξτε ότι  $\omega$  δεν είναι ο μοναδικός οριακός διατακτικός αριθμός (χρησιμοποιείστε ορισμό με υπερπεπερασμένη αναδρομή).

**Πρόβλημα 4.** Έστω  $A$  και  $B$  σύνολα με καλές διατάξεις  $<_A$  και  $<_B$  αντίστοιχα. Μπορείτε να ορίσετε μία καλή διάταξη  $<$  στο  $A \cup B$ ;

## ΛΥΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 5

### Λύση 1

1. Αληθής, επειδή  $\beta$  μεταβατικό σύνολο.
2. Για τον ίδιο λόγο.
3. Ψευδής, πάρτε  $x = \{\beta\}$ .
4. Αληθής.
5. Αληθής.  $\alpha \leq \beta \leftrightarrow \alpha \subseteq \beta \leftrightarrow \alpha \cap \beta = \alpha$ .
6. Αληθής.  $\alpha < \beta \leftrightarrow \neg(\beta \leq \alpha) \leftrightarrow \neg(\alpha \cap \beta = \beta) \leftrightarrow \alpha \cap \beta \neq \beta$ .
7. Ψευδής, πάρτε  $A_1 = \omega$  και  $A_2 = \{\omega\}$ .
8. Ψευδής, πάρτε  $A_1 = \omega$ .
9. Αληθής

### Λύση 2

Για  $a, b \in A$  έχουμε  $aRb \leftrightarrow f(a) < f(b)$  και  $a = b \leftrightarrow f(a) = f(b)$ , επειδή  $f$  είναι 1-1. Ακριβώς ένα από τα  $aRb, bRa, a = b$  ισχύει (Επειδή ακριβώς ένα από τα  $f(a) < f(b), f(b) < f(a), f(a) = f(b)$  ισχύει). Εάν  $aRb, bRc$  τότε  $f(a) < f(b), f(b) < f(c)$  άρα  $f(a) < f(c)$  άρα  $aRc$ . Τελικά αν  $\emptyset \neq X \subseteq A$  τότε  $\emptyset \neq f[X] = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq \alpha$ . Έστω  $\beta$  το ελάχιστο στοιχείο του  $f[A]$ . Τότε αν  $a \in X$  έχουμε  $\neg(f(a) < \beta)$  άρα  $\neg(aRf^{-1}(\beta))$  άρα  $f^{-1}(\beta)$  είναι το  $R$ -ελάχιστο στοιχείο του  $X$ .

### Λύση 3

Το  $\cup A$  είναι διατακτικός αριθμός. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι  $\cup A = sup(A)$ . Έχουμε

$$\begin{aligned} \nu \in \cup A &\leftrightarrow \nu \in \alpha \text{ για κάποιο } \alpha \in A \\ &\leftrightarrow \nu < \alpha \text{ για κάποιο } \alpha \in A \\ &\rightarrow \nu < sup(A) \\ &\rightarrow \neg(\alpha \leq \nu, \forall \alpha \in A) \\ &\rightarrow \nu < \alpha \text{ για κάποιο } \alpha \in A \end{aligned}$$

Άρα  $\nu \in \cup A \leftrightarrow \nu \in sup(A)$ . Απ' το οποίο  $\cup A = sup(A)$ .

Από το παραπάνω  $\cup\{f(n) \mid n \in \omega\}$  είναι διατακτικός και  $\cup\{f(n) \mid n \in \omega\} = sup\{f(n) \mid n \in \omega\}$ . Επειδή  $0 \leq f(0) < f(1) \leq \cup\{f(n) \mid n \in \omega\}$  έχουμε  $\cup\{f(n) \mid n \in \omega\} \neq 0$ . Εάν  $\cup\{f(n) \mid n \in \omega\}$  ήταν επόμενος διατακτικός έστω  $\cup\{f(n) \mid n \in \omega\} = \delta'$  τότε  $\delta < \cup\{f(n) \mid n \in \omega\}$  άρα  $\delta < f(n)$  για κάποιο  $n \in \omega$  άρα  $\delta' \leq f(n) \rightarrow \delta' < f(n+1)$ . Αλλά  $\cup\{f(n) \mid n \in \omega\} = \delta'$  και  $f(n+1) \leq \cup\{f(n) \mid n \in \omega\}$ . Άτοπο.

Χρησιμοποιώντας αναδρομή έστω  $f$  η συνάρτηση με  $\text{dom}(f) = \omega$  και  $f(n) = \text{seq}(\omega \cup \{f(k) \mid k < n\})$  για  $n \in \omega$ .

Προφανώς  $f(o) = \omega$  και  $n < m \rightarrow f(n) < f(m)$ . [Ακριβέστερα είναι εύκολο να δούμε ότι  $f(n) = (\cdots(((\omega + 1) + 1) + 1) + \cdots + 1)$  ].

Άρα  $\cup\{f(n) \mid n \in \omega\}$  είναι οριακός διαταχικός και  $\omega < f(1) < \cup\{f(n) \mid n \in \omega\}$  άρα  $\cup\{f(n) \mid n \in \omega\}$  είναι διαφορετικός από τον  $\omega$ .

#### Λύση 4

Αν  $A, B$  ξένα μεταξύ τους τότε  $<= <_A \cup <_B \cup (A \times B)$  είναι μια τέτοια καλή διάταξη δηλ. για  $x, y \in A \cup B$

$$x < y \leftrightarrow (x, y \in A \wedge x <_A y) \vee (x, y \in B \wedge x <_B y) \vee (x \in A \wedge y \in B)$$

Αν  $A$  και  $B$  δεν είναι ξένα μεταξύ τους τότε

$$<= <_A \cup (<_B \cap (B - A)^2) \cup (A \times (B - A))$$

είναι μια τέτοια διάταξη.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 6

### Πρόβλημα 1

Έστω  $X$  σύνολο και έστω  $f$  μία συνάρτηση που ικανοποιεί τις

- $\text{dom}(f) = \omega$
- $f(0) = X$
- $f(n') = f(n) \cup \bigcup f(n), \quad \forall n \in \omega$

[η συνάρτηση αυτή ορίζεται με αναδρομή]

Αποδείξτε ότι εάν  $\text{Rg}(f) = \text{Range}(f)$

1.  $\cup \text{Rg}(f) \supseteq X$
2.  $a \in b, b \in \cup \text{Rg}(f) \rightarrow a \in \cup \text{Rg}(f)$ .

και εάν  $y \supseteq X$  και  $a \in b, b \in y \rightarrow a \in y$  τότε  $y \supseteq \cup \text{Rg}(f)$ .

[Η  $\cup \text{Rg}(f)$  ονομάζεται η μεταβατική κλειστότητα του  $X$  και είναι το μικρότερο μεταβατικό σύνολο που περιέχει το  $X$ .]

### Πρόβλημα 2

Έστω  $a$  σύνολο. Αποδείξτε ότι υπάρχει σύνολο  $A$  έτσι ώστε

1.  $a \subseteq A$
2.  $x, y \in A \rightarrow \langle x, y \rangle \in A$
3. εάν  $A'$  επίσης ικανοποιεί τις 1. και 2. τότε  $A \subseteq A'$ .

### Πρόβλημα 3

Όπως στις διαλέξεις μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση  $+ : \omega^2 \rightarrow \omega$  που ικανοποιεί τα

1.  $n + 0 = n$
2.  $n + m' = (n + m)'$

δηλ. την πρόσθεση στους φυσικούς.

Χρησιμοποιώντας την καλή διάταξη  $<$  στο  $\omega^2$  που ορίζεται από

$$\langle s, t \rangle < \langle n, m \rangle \leftrightarrow s < n \vee (s = n \wedge t < m)$$

δείξτε ότι η πράξη  $+$  είναι αντιμεταθετική δηλ.  $\forall n, m \quad n + m = m + n$ .

**Πρόβλημα 4**

'Εστω  $\alpha \uplus \beta = (\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})$  δηλ. η ξένη ένωση των  $\alpha$  και  $\beta$ . Έστω  $R \subseteq (\alpha \uplus \beta)^2$  έτσι ώστε

$$\langle \gamma, i \rangle R \langle \delta, j \rangle \leftrightarrow i < j \vee (i = j \wedge \gamma < \delta)$$

[Δηλαδή το  $\alpha \uplus \beta$  διατεταγμένο από την  $R$  φαίνεται ακριβώς σαν μία κόπια του  $\alpha$  ακολουθούμενη από μία κόπια του  $\beta$ ]

Δείτε ότι η  $R$  διατάσσει καλώς το  $\alpha \uplus \beta$ .

'Έστω  $\alpha \dot{+} \beta$  είναι ο μοναδικός διατακτικός γ έτσι ώστε  $\langle \alpha \uplus \beta, R \rangle \cong \langle \gamma, \in \rangle$ .

Αποδείξτε ότι

1.  $\alpha \dot{+} 0 = \alpha$
2.  $\alpha \dot{+} \beta' = (\alpha \dot{+} \beta)'$
3.  $1 \dot{+} \omega \neq \omega \dot{+} 1$

## ΛΥΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 6

### Λύση 1

1.  $X = f(0) \subseteq \cup \text{Rg}(f) = \cup \{f(n) | n \in \omega\}$   
(διότι, γενικά, αν  $a \in A$  τότε  $a \subseteq \cup A$ )
2. Εστω  $a \in b$  και  $b \in \cup \text{Rg}(f)$ . Τότε, επειδή  $b \in f(n)$  για κάποιο  $n \in \omega$ , θα έχουμε  $a \in \cup f(n) \subseteq f(n+1) \subseteq \cup \text{Rg}(f)$ . Άρα  $a \in \cup \text{Rg}(f)$ .

Τελικά για το επόμενο, θα δείξουμε ότι για όλα τα  $n \in \omega$ ,  $f(n) \subseteq y$  άρα θα έχουμε τελικά ότι  $\cup \text{Rg}(f) \subseteq y$ .

Υποθέτουμε, για απαγωγή σε άτοπο, ότι  $f(n) \not\subseteq y$  για κάποιο  $n \in \omega$  και έστω  $n_0$  το ελάχιστο τέτοιο  $n$ .

Αν  $n_0 = 0$  τότε  $X \not\subseteq y$  (άτοπο) άρα  $n_0 = s'$  για κάποιο  $s \in \omega$  και  $f(s) \subseteq y$ . Τότε

$$\begin{aligned} a \in \cup f(s) &\rightarrow a \in b \text{ για κάποιο } b \in f(s) \\ &\rightarrow a \in b, b \in y \\ &\rightarrow a \in y \end{aligned}$$

Άρα  $\cup f(s) \subseteq y$ , άρα  $f(n_0) = f(s) \cup \bigcup f(s) \subseteq y$  (άτοπο).

### Λύση 2

Χρησιμοποιείστε τις ιδέες του Προβλήματος 1 για να κατασκευάσετε  $f$  με domain  $\omega$  τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f(0) &= a \\ f(n') &= f(n) \cup (f(n) \times f(n)) \quad \text{για } n \in \omega \end{aligned}$$

και θέστε  $A = \cup \text{Rg}(f)$ . Απλή επαγωγή στο  $m$  δείχνει ότι  $n \leq m \rightarrow f(n) \subseteq f(m)$ . Τώρα είναι εύκολο να επιβεβαιώσετε τα 1. και 2. Το 3. έπεται αφού δείξετε ότι  $f(n) \subseteq A' \forall n \in \omega$ .

### Λύση 3

Εστω  $+$  δεν είναι αντιμεταθετική και έστω  $\langle n, m \rangle$  είναι το  $<$ -ελάχιστο στοιχείο του  $\omega^2$  έτσι ώστε  $n + m \neq m + n$ . Παίρνουμε αντίφαση δουλεύοντας με περιπτώσεις:

1.  $n = m = 0$ . Τότε  $n + m = 0 = m + n$ .
2.  $m = 0$ ,  $n \neq 0$  έστω  $n = s'$ . Τότε

$$\begin{aligned} m + n = 0 + s' &= (0 + s)' = (s + 0)' \quad (\text{επειδή } \langle s, 0 \rangle < \langle s', 0 \rangle = \langle n, m \rangle) \\ &= s' = n = n + m \end{aligned}$$

3.  $n, m \neq 0$ , έστω  $n = s', m = t'$ . Τότε

$$\begin{aligned}
 n + m &= s' + t' = (s' + t)' \\
 &= (t + s')' && \text{επειδή } \langle s', t \rangle < \langle n, m \rangle \\
 &= (t + s)'' \\
 &= (s + t)'' && \text{επειδή } \langle s, t \rangle < \langle n, m \rangle \\
 &= (s + t')' \\
 &= (t' + s)' && \text{επειδή } \langle s, t' \rangle < \langle n, m \rangle \\
 &= t' + s' = m + n
 \end{aligned}$$

#### Λύση 4

1.  $\alpha \uplus 0 = \alpha \times \{0\}$  και σ' αυτή την περίπτωση για  $\gamma, \delta \in \alpha$

$$\langle \gamma, 0 \rangle R \langle \delta, 0 \rangle \leftrightarrow \gamma \in \delta$$

Αρα η συνάρτηση  $f : \alpha \rightarrow \alpha \uplus 0$  που ορίζεται με  $f(\gamma) = \langle \gamma, 0 \rangle$  είναι 1-1 και επί και

$$f : \langle \alpha, \in \rangle \cong \langle \alpha \uplus 0, R \rangle$$

$\Delta$ ηλαδή  $\alpha \uplus 0 = \alpha$ .

2. Εστω  $g : \langle \alpha \dot{+} \beta, \in \rangle \cong \langle \alpha \uplus \beta, R \rangle$  όπου  $R$  είναι η καλή διάταξη του  $\alpha \uplus \beta$  και έστω  $R'$  είναι η αντίστοιχη διάταξη του  $\alpha \uplus \beta'$ .

Τότε  $R' = R \cup \{\langle \sigma, \langle \beta, 1 \rangle \rangle | \sigma \in \alpha \uplus \beta\}$  και  $h : \langle (\alpha \dot{+} \beta)', \in \rangle \cong \langle \alpha \uplus \beta', R' \rangle$  όπου  $h \upharpoonright \alpha \dot{+} \beta = g$  και  $h(\alpha \dot{+} \beta) = \langle \beta, 1 \rangle$ .

Αρα  $\alpha \dot{+} \beta' = (\alpha \dot{+} \beta)'$ .

3.  $1 \uplus \omega = \{\langle 1, 0 \rangle\} \cup \{\langle n, 1 \rangle | n \in \omega\}$

Είναι εύκολο να δούμε ότι  $h : \langle \omega, \in \rangle \cong \langle 1 \uplus \omega, R \rangle$  όπου

$$\begin{aligned}
 h(0) &= \langle 1, 0 \rangle \\
 h(n') &= \langle n, 1 \rangle, \quad n \in \omega
 \end{aligned}$$

Αρα  $1 \dot{+} \omega = \omega$ . Από τα προηγούμενα  $\omega \dot{+} 1 = \omega \dot{+} 0' = (\omega \dot{+} 0)' = \omega' \neq \omega$ .

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 7

**Πρόβλημα 1** Ποια από τα παρακάτω είναι αληθή;

1.  $A \preccurlyeq B \leftrightarrow \exists D \subseteq B, A \sim D$
2.  $A \prec B \leftrightarrow \exists D \subset B, A \sim D$
3.  $A \sim \emptyset \leftrightarrow A = \emptyset$
4.  $A \sim B \rightarrow \cup A \sim \cup B$

**Πρόβλημα 2** Δείξτε  $A \sim B \rightarrow {}^A D \sim {}^B D$ , για οποιοδήποτε σύνολο  $D$  και  $A \preccurlyeq B \rightarrow {}^A D \preccurlyeq {}^B D$  για οποιοδήποτε σύνολο  $D \neq \emptyset$ .

**Πρόβλημα 3** Υποθέστε ότι  $\emptyset \neq X \subseteq n$ . Αποδείξτε με αριθμητική επαγωγή ότι το  $X$  έχει μέγιστο στοιχείο.

**Πρόβλημα 4** Αληθές ή ψευδές;

1.  $\alpha = \alpha' \setminus \{\alpha\}$
2.  $\alpha \preccurlyeq \beta \leftrightarrow \alpha \leq \beta$

**Πρόβλημα 5** Δείξτε ότι αν  $A \sim A \times 2$  τότε  $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ .

**Πρόβλημα 6** (από ανάλυση) Ξέρουμε ότι  $[-1, 1] \sim [-1, 1]^2$ . Παρόλα αυτά μπορούμε να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση  $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]^2$  ( $f$  1-1 και επί). Διότι ας υποθέσουμε ότι υπάρχει. Τότε δείξτε ότι

1.  $f^{-1} : [-1, 1]^2 \rightarrow [-1, 1]$  είναι συνεχής.

Κατόπιν ορίζουμε  $g : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$  με

$$g(t) = f^{-1}(\cos(t), \sin(t)) - f^{-1}(\cos(t + \pi), \sin(t + \pi))$$

άρα  $g$  είναι συνεχής. Δείξτε ότι

2.  $g(0) = -g(\pi)$
3.  $g(t) = 0$  για κάποιο  $t \in [0, \pi]$
4.  $f^{-1}$  δεν είναι 1-1!

## ΛΥΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 7

### Λύση 1

1. Αληθές, επειδή  $f : A \rightarrowtail B \Leftrightarrow f : A \twoheadrightarrow \text{Rg}(f) \wedge \text{Rg}(f) \subseteq B$ .
2. Ψευδές. Πάρτε  $A = D = \omega$ ,  $B = \omega'$ .
3. Αληθές επειδή  $f : A \twoheadrightarrow \emptyset \Rightarrow \text{Rg}(f) = \emptyset \Rightarrow f = \emptyset \Rightarrow \emptyset = \text{dom}(f) = A$ .
4. Ψευδές. Πάρτε  $A = \{\emptyset\}$ ,  $B = \{\omega\}$ .

### Λύση 2

Έστω  $f : A \twoheadrightarrow B$ . Ορίζουμε  $G : {}^A D \rightarrow {}^B D$  με  $G(h) = h \circ f^{-1}$ . Εύκολα ελέγχουμε ότι  $G$  είναι 1-1, επί του  ${}^B D$ .

Για το δεύτερο μέρος έστω  $f : A \rightarrowtail B$ . Εάν  $A = \emptyset$  τότε  ${}^A D = \{\emptyset\}$ . Επειδή  $D \neq \emptyset$  διαλέγουμε  $d \in D$ . Τότε  $B \times \{d\} \in {}^B D$ , έτσι η απεικόνιση  $\{\emptyset, B \times \{d\}\}$  επαληθεύει την  ${}^A D \preceq {}^B D$ . Εάν  $A \neq \emptyset$  διαλέγουμε  $a \in A$  και ορίζουμε  $g : B \twoheadrightarrow A$  με

$$g(b) = \begin{cases} f^{-1}(b) & \text{αν } b \in \text{Rg}(f) \\ a & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Τώρα ορίζουμε  $G : {}^A D \rightarrow {}^B D$  με  $G(h) = h \circ g$ . Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι  $G$  είναι 1-1.

### Λύση 3

Έστω  $D = \{n \mid n \in \omega \wedge \forall X, \emptyset \neq X \subseteq n \rightarrow X \text{ έχει ένα μέγιστο στοιχείο}\}$ . Αποδεικνύουμε ότι  $D = \omega$  με την αρχή της επαγωγής. Προφανώς  $0 \in D$ . Υποθέτουμε  $n \in D$  και  $\emptyset \neq X \subseteq n'$ . Εάν  $n \in X$  τότε το  $n$  πρέπει να είναι το μέγιστο στοιχείο του  $X$ . Διαφορετικά, επειδή  $n' = n \cup \{n\}, X \subseteq n$  έτσι αφού  $n \in D$ ,  $X$  έχει ένα μέγιστο στοιχείο, άρα  $n' \in D$ .

### Λύση 4

1. Αληθές
2. Ψευδές. Πάρτε  $\alpha = \omega', \beta = \omega$  και θυμηθείτε ότι  $\omega \sim \omega'$ .

### Λύση 5

Από προηγούμενα παραδείγματα ζέρουμε ότι αφού  $A \sim A \times 2$ , θα έχουμε ότι  $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(A \times 2)$  άρα είναι αρκετό να δείξουμε ότι  $\mathcal{P}(A \times 2) \sim \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$ . Αλλά  $f : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \rightarrowtail \mathcal{P}(A \times 2)$  όπου  $f(B, C) = (B \times \{0\}) \cup (C \times \{1\})$ .

### Λύση 6

Η εκφώνηση έχει επαρκείς υποδείξεις!

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 8

**Πρόβλημα 1** Αληθές ή ψευδές;

1.  $A \prec B \Rightarrow \cup A \preccurlyeq \cup B$
2.  $A \times B \sim A \times C \Rightarrow B \sim C$
3.  $A \preccurlyeq A \times A$
4.  $A \prec B \Leftrightarrow A \preccurlyeq B \ \& \ \neg(A \sim B)$
5.  $\alpha < \omega_1 \Leftrightarrow \alpha \preccurlyeq \omega$
6.  $\omega \leq \alpha \Leftrightarrow \alpha \sim \alpha'$

**Πρόβλημα 2** Υποθέτουμε ότι τα σύνολα  $A$  και  $B$  μπορούν να διαταχθούν χαλώς. Δείξτε ότι:

1.  $A \prec B \Leftrightarrow \neg(B \preccurlyeq A)$
2. ένα από τα  $A \preccurlyeq B$ ,  $B \preccurlyeq A$  ισχύει.
3.  $\omega \preccurlyeq A \Rightarrow A \sim A \times A$  (στηριχτείτε στο γεγονός ότι αν  $\omega \leq \alpha$  τότε  $\alpha \times \alpha \sim \alpha$ ).

**Πρόβλημα 3** Δείξτε ότι αν  $\emptyset \neq A \preccurlyeq B$  τότε  $\exists f, f : B \rightarrow A$  (χωρίς AC). Δείξτε ότι αν  $B$  είναι διατακτικός (ή αν ισχύει το AC) τότε και το αντίθετο είναι σωστό.

**Πρόβλημα 4** Εστω  $\lambda$  ένας διατακτικός αριθμός που είναι όριο από πληθυκούς (δηλ.  $\alpha < \lambda \Rightarrow \exists$  πληθικός  $\beta$  ώστε  $\alpha < \beta < \lambda$ ). Δείξτε ότι  $\lambda$  είναι πληθικός.

**Πρόβλημα 5** Δείξτε ότι αν  $\alpha$  είναι άπειρος και  $\beta \neq 0$  τότε  $\alpha \times \beta \sim \max(\alpha, \beta)$ .

## ΛΥΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 8

### Λύση 1

1. Ψευδές. Πάρτε  $A = \{\{0, 1, 2\}\}, B = \{\{0\}, \{1\}\}$ .
2. Ψευδές. Πάρτε  $A = \omega, B = 1, C = \omega$ .
3. Αληθές. Εάν  $A = \emptyset$  και οι δύο πλευρές είναι  $\emptyset$ . Διαφορετικά διαλέξτε  $a \in A$ . Τότε  $g : A \rightarrow A \times A$  όπου  $g(x) = \langle a, x \rangle$ .
4. Αληθές. Από θεώρημα Schröder-Bernstein  $A \sim B \leftrightarrow A \preccurlyeq B \wedge B \preccurlyeq A$ .  
Άρα  

$$A \preccurlyeq B \wedge \neg(A \sim B) \leftrightarrow A \preccurlyeq B \wedge (\neg(A \preccurlyeq B) \vee \neg(B \preccurlyeq A)) \leftrightarrow A \preccurlyeq B \wedge \neg(B \preccurlyeq A) \leftrightarrow A \prec B.$$
5. Αληθές. Η πλευρά  $\Rightarrow$  από ορισμό του  $\omega_1$ .  
Η πλευρά  $\Rightarrow$ : Υποθέτουμε  $\alpha \preccurlyeq \omega$ . Εάν  $\omega_1 \leq \alpha$  τότε  $\omega_1 \preccurlyeq \alpha \preccurlyeq \omega$  (άτοπο), άρα  $\alpha < \omega_1$ .

### Λύση 2

Έστω  $<_A, <_B$  διατάσσουν καλώς τα  $A, B$  αντίστοιχα. Διαλέγουμε  $\alpha, \beta$  έτσι ώστε  $\langle \alpha, \in \rangle \cong \langle A, <_A \rangle, \langle \beta, \in \rangle \cong \langle B, <_B \rangle$ . Τότε  $\alpha \sim A, \beta \sim B$ . Έτσι

1.  $A \prec B \leftrightarrow \alpha \prec \beta \leftrightarrow \neg(\beta \preccurlyeq \alpha) \leftrightarrow \neg(B \preccurlyeq A)$
2. Ένα από τα  $\alpha \preccurlyeq \beta, \beta \preccurlyeq \alpha$  ισχύει άρα ένα από τα  $A \preccurlyeq B, B \preccurlyeq A$  ισχύει.
3.  $\omega \preccurlyeq A \rightarrow \omega \preccurlyeq \alpha \rightarrow \omega \leq \alpha \rightarrow \alpha \sim \alpha \times \alpha \rightarrow A \sim A \times A$ .

### Λύση 3

Έστω  $g : A \rightarrow B$ . Διαλέγουμε  $a \in A$  και ορίζουμε  $f : B \rightarrow A$  με

$$f(b) = \begin{cases} g^{-1}(b) & \text{εάν } b \in \text{Rg}(g) \\ a & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Αντίστροφα, εάν  $f : B \rightarrow A$  και  $B$  ένας διατακτικός ορίζουμε  $g : A \rightarrow B$  με  $g(a) = \langle \text{o ελάχιστος } \alpha \in B \text{ έτσι ώστε } f(\alpha) = a \rangle$ .

**Λύση 4**

Έστω ότι  $\lambda$  δεν είναι πληθυκός. Τότε για κάποιο  $\alpha < \lambda$ ,  $\neg(\alpha \prec \lambda)$  δηλαδή  $\lambda \not\prec \alpha$ . Διαλέγουμε  $\alpha < \beta < \lambda$ ,  $\beta$  πληθυκός. Τότε  $\beta \not\prec \lambda \not\prec \alpha$  έτσι  $\beta \not\prec \alpha \& \neg(\alpha \prec \beta)$ , άτοπο.

**Λύση 5**

Έστω  $\gamma = \max(\alpha, \beta)$ ,  $\delta = \min(\alpha, \beta)$ . Τότε  $\omega \leq \gamma$ ,  $0 < \delta$ , έτσι  $\gamma \preccurlyeq \gamma \times \delta \preccurlyeq \gamma \times \gamma \sim \gamma$  αρα  $\gamma \sim \gamma \times \delta = \alpha \times \beta$ .

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 9

**Πρόβλημα 1** Εστω  $A$  και  $B$  σύνολα ώστε  $B$  είναι καλά διατάξιμο και  $a \cap B \neq \emptyset$  για όλα τα  $a \in A$ . Δείξτε ότι  $A$  έχει μία συνάρτηση επιλογής, με την έννοια ότι υπάρχει μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  ώστε για κάθε  $a \in A$   $f(a) \in a$ .

**Πρόβλημα 2** Εστω  $A$  σύνολο μη κενών κλειστών υποσυνόλων του  $\mathbb{R}$ . Δείξτε ότι  $A$  έχει συνάρτηση επιλογής.

**Πρόβλημα 3** Εστω  $S$  απεικόνιση με domain  $A$  έτσι ώστε  $S(a) \neq \emptyset$ ,  $\forall a \in A$ . Δείξτε

1.  $S[A]$  έχει συνάρτηση επιλογής  $\Rightarrow \prod_{a \in A} S(a) \neq \emptyset$
2.  $\cap S[A] \neq \emptyset \Rightarrow \prod_{a \in A} S(a) \neq \emptyset$
3.  $S$  είναι 1-1 και  $\prod_{a \in A} S(a) \neq \emptyset \Rightarrow S[A]$  έχει συνάρτηση επιλογής.

**Πρόβλημα 4** Αν η  $S$  δεν είναι 1-1 τότε (αν δεν ισχύει το AC) το 3. του Προβλήματος 3 μπορεί να μην ισχύει. Για να το δούμε έστω  $C$  ένα σύνολο που δεν έχει συνάρτηση επιλογής  $\emptyset \notin C$  και δείξτε

1. Είναι σύνολο  $B$  ώστε  $\emptyset \notin B$ ,  $B$  δεν έχει συναρτήσεις επιλογής και  $x, y \in B$  και  $x \neq y \Rightarrow x \cap y = \emptyset$ .
  2. Για  $B$  όπως παραπάνω ορίζουμε  $K : \cup B \rightarrow B$  με  $K(a) = \langle\text{το μοναδικό } b \in B \text{ ώστε } a \in b\rangle$ .
- Δείξτε ότι  $\prod_{a \in \cup B} K(a) \neq \emptyset$  αλλά  $K[\cup B] = B$  δεν έχει συνάρτηση επιλογής.

**Πρόβλημα 5** Εστω  $R$  γραμμική διάταξη στο σύνολο  $A$ . Αποδείξτε ότι  $R$  διατάσσει καλώς το  $A$  αν και μόνον αν δεν υπάρχει συνάρτηση  $g : \omega \rightarrow A$  ώστε  $\forall n \in \omega$ ,  $g(n+1) R g(n)$ .

**Πρόβλημα 6** Ας υποθέσουμε ότι τα υποσύνολα του  $\omega$  χωρίζονται σε δύο σύνολα  $M$  και  $E$  ( $M$  είναι τα «μείζονα» υποσύνολα του  $\omega$   $E$  είναι τα «ελάσσονα» υποσύνολα του  $\omega$ ) έτσι ώστε για  $X \subseteq \omega$

$$X \in M \Leftrightarrow (\omega \setminus X) \in E$$

και αν  $X_1, \dots, X_n \in M$  ( $n \in \omega$ ) τότε  $X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n$  είναι άπειρο. Δείξτε ότι τα  $M$  και  $E$  δρουν όπως υποβάλλει το όνομά τους με το να αποδείξετε τα ακόλουθα:

1.  $\emptyset \in E, \omega \in M$
2.  $X \subseteq \omega$  και  $X$  πεπερασμένο  $\Rightarrow X \in E$
3.  $X, Y \in M \Rightarrow X \cap Y \in M$
4.  $X, Y \in E \Rightarrow X \cup Y \in E$
5.  $X \subseteq Y \subseteq \omega, X \in M \Rightarrow Y \in M$
6.  $X \subseteq Y \subseteq \omega, Y \in E \Rightarrow X \in E$
7.  $\omega \setminus X$  πεπερασμένο  $\Rightarrow X \in M$

Εστω  $B = \{A \subseteq \mathcal{P}(\omega) | X_1, \dots, X_n \in A \text{ } (n \in \omega) \Rightarrow X_1 \cap \dots \cap X_n \text{ άπειρο}\}$ . Δείξτε ότι  $B \neq \emptyset$  και  $B$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του λήμματος του Zorn. Οθεν υποθέτοντας το λήμμα του Zorn δείξτε ότι είναι δυνατό να δημιουργήσουμε ένα χωρισμό των συνόλων του  $\omega$  σε μείζονα και ελάσσονα υποσύνολα.

## ΛΥΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 9

### Λύση 1

Έστω  $\leq$  μία καλή διάταξη του  $B$  και για  $a \in A$  ορίζουμε

$$f(a) = \text{το } \leq\text{-ελάχιστο στοιχείο του } a \cap B$$

Η  $f$  είναι μία συνάρτηση επιλογής του  $A$ .

### Λύση 2

Ορίζουμε  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$g(a) = \begin{cases} \inf(a \cap [0, \infty)) & \text{αν } a \cap [0, \infty) \neq \emptyset \\ \sup(a \cap (-\infty, 0]) & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Προφανώς επειδή το  $a$  είναι κλειστό  $g(a) \in a$  για όλα τα  $a \in A$ .

### Λύση 3

1. Έστω  $f$  μία συνάρτηση επιλογής για το  $S[A]$ . Τότε για  $a \in A$ ,  $f(S(a)) \in S(a)$  άρα  $f \circ S \in \prod_{a \in A} S(a)$ .
2. Έστω  $b \in \cap S[A]$ . Τότε  $b \in S(a)$ ,  $\forall a \in A$ , έτσι  $\{\langle S(a), b \rangle \mid a \in A\}$  είναι συνάρτηση επιλογής για το  $S[A]$  και μπορούμε να εφαρμόσουμε την 1.
3. Εάν  $t \in \prod_{a \in A} S(a)$  τότε  $\{\langle S(a), t(a) \rangle \mid a \in A\}$  είναι μία συνάρτηση επιλογής για το  $S[A]$ . (Σημειώστε ότι αν η  $S$  δεν είναι 1-1 τότε μπορεί να μην είναι ούτε καν συνάρτηση).

### Λύση 4

1. Για  $c \in C$  έστω

$$f(c) = \{\langle c, x \rangle \mid x \in c\}$$

Προφανώς επειδή  $c \in C \Rightarrow c \neq \emptyset$ ,  $f(c) \neq \emptyset$  και εάν  $c_1, c_2 \in C \& c_1 \neq c_2$  τότε  $a \in f(c_1) \cap f(c_2) \Rightarrow a = \langle c_1, x \rangle = \langle c_2, z \rangle$  για κάποιο  $x, z \Rightarrow c_1 = c_2$ , άτοπο.

Άρα  $f(c_1) \cap f(c_2) = \emptyset$ .

Ισχυριζόμαστε ότι  $f[C]$  δεν έχει συνάρτηση επιλογής επειδή εάν είχε, έστω  $h$  ας ήταν μία τέτοια συνάρτηση, τότε η συνάρτηση  $g$  με  $\text{domain}(g) = C$  και έτσι ώστε  $g(c) =$  το μοναδικό  $x$  ώστε  $h(f(c)) = \langle c, x \rangle$  θα ήταν μία συνάρτηση επιλογής για το  $C$ .

2. Έστω  $i$  η ταυτοτική συνάρτηση του  $\cup B$ . Τότε  $i \in \prod_{a \in \cup B} K(a)$ .

### Λύση 5

Εάν  $R$  διατάσσει καλώς το  $A$  τότε δεν μπορεί να υπάρχει απεικόνιση  $g : \omega \rightarrow A$  έτσι ώστε  $\forall n, g(n+1) R g(n)$  διαφορετικά το  $\emptyset \neq g[\omega] \subseteq A$  δεν θα είχε ελάχιστο στοιχείο.

Εάν η  $R$  δεν διατάσσει καλώς το  $A$  τότε  $\exists b \subseteq A$  έτσι ώστε  $b \neq \emptyset$  και  $b$  δεν έχει  $R$ -ελάχιστο στοιχείο. Έτσι για κάθε  $c \in b$ ,  $\{a \mid a \in b \wedge a R c\} \neq \emptyset$ . Χρησιμοποιώντας το AC, έστω  $f$  είναι μία συνάρτηση επιλογής για το  $P(A) - \{\emptyset\}$  και έστω  $g$  (χρησιμοποιώντας τον ορισμό με υπερπεπερασμένη αναδρομή) μία συνάρτηση έτσι ώστε  $\text{domain}(g) = \omega$

$$g(n) = \begin{cases} f(b) & \text{εάν } n = 0 \\ f(\{a \mid a \in b \wedge a R g(m)\}) & \text{εάν } m + 1 = n \text{ & } f(\dots) \text{ ορίζεται} \\ f(b) & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Λαμβάνοντας υπ'όψιν μας τις υποθέσεις είναι εύκολο να δούμε ότι  $g(0) \in b$  και  $\forall n \in \omega, g(n+1) = f(\{a \mid a \in b \wedge a R g(n)\})$ . Άρα  $g(n+1) R g(n)$ , άρα  $g$  είναι η αιτούμενη συνάρτηση.

### Λύση 6

3. Υποθέτουμε  $X, Y \in M$  και  $X \cap Y \notin M$ . Τότε  $(\omega - X \cap Y) \in M$ , άρα  $\emptyset = X \cap Y \cap (\omega - X \cap Y) \in M$ , άτοπο.

4.  $X, Y \in E \rightarrow \omega - X, \omega - Y \in M \rightarrow (\omega - X) \cap (\omega - Y) = (\omega - X \cup Y) \in M \rightarrow X \cup Y \in E$ .

5.  $X \in M \& X \subseteq Y \subseteq \omega \& Y \notin M \rightarrow \omega - Y \in M \rightarrow \emptyset = X \cap (\omega - Y) \in M$ , άτοπο.

6.  $X \subseteq Y, Y \in E \rightarrow \omega - Y \subseteq \omega - X \& \omega - Y \in M \rightarrow \omega - X \in M \rightarrow X \in E$ .

$B \neq \emptyset$  επειδή  $\{\omega\} \in B$ . Έστω  $K \subseteq B$  είναι γραμμικά διατεταγμένο από την  $\subset$ . Θέλουμε να αποδείξουμε ότι  $\cup K \in B$ . Έστω  $X_1, \dots, X_n \in \cup K$  και έστω  $X_i \in b_i \in K \quad i = 1, \dots, n$ . Επειδή  $K$  είναι γραμμικά διατεταγμένο από την  $\subset$  μπορούμε να επιλέξουμε  $b_i \in K$  ώστε  $b_j \subseteq b_i$  για όλα τα  $j = 1, \dots, n$ . Άρα  $X_1, \dots, X_n \in b_i$  δηλαδή  $X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n$  είναι άπειρο, όπως απαιτείται.

Έστω  $F$  ένα μεγιστικό στοιχείο του  $B$  (χρησιμοποιούμε το λήμμα του Zorn). Προφανώς  $X_1, \dots, X_n \in F \rightarrow X_1 \cap \dots \cap X_n$  εναι πειρο, έτσι το  $F$  θα είναι το απαιτούμενο μείζων σύνολο εάν μπορούμε να δείξουμε ότι για  $X \subseteq \omega, X \in F \leftrightarrow (\omega - X) \notin F$ .

Προφανώς δεν είναι δυνατόν να έχουμε  $X \in F \& (\omega - X) \in F$  έτσι είναι αρκετό να δείξουμε ότι  $X \in F \vee (\omega - X) \in F$ .

Ας υποθέσουμε ότι δεν είναι. Τότε  $F \subset F \cup \{X\}, F \cup \{\omega - X\}$  άρα ούτε το  $F \cup \{X\}$  ούτε το  $F \cup \{\omega - X\}$  μπορεί να είναι στο  $B$ . Τότε υπάρχουν  $Z_1, \dots, Z_n \in F, Y_1, \dots, Y_m \in F$  έτσι ώστε  $Z_1 \cap Z_2 \cap \dots \cap Z_n \cap X$  είναι πεπερασμένο,  $Y_1 \cap Y_2 \cap \dots \cap Y_m \cap (\omega - X)$  είναι πεπερασμένο.

Αλλά  $Z_1 \cap Z_2 \cap \dots \cap Z_n \cap Y_1 \cap Y_2 \cap \dots \cap Y_m \subseteq (Z_1 \cap \dots \cap Z_n \cap X) \cup (Y_1 \cap \dots \cap Y_m \cap (\omega - X))$ , άρα  $Z_1 \cap \dots \cap Z_n \cap Y_1 \cap \dots \cap Y_m$  είναι πεπερασμένο και  $Z_1 \dots Z_n, Y_1 \dots Y_m \in F$ , άτοπο.