

ΣΕΜΦΕ, ΕΞΕΤΑΣΗ στη Θεωρία Συνόλων, 17/05/2007

**ΖΗΤΗΜΑ 1.** Ορίστε την έννοια του διατεταγμένου ζεύγους  $(x, y)$ . Αποδείξτε ότι ο ορισμός σας ικανοποιεί την χαρακτηριστική ιδιότητα του ζεύγους

$$\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y'.$$

Στη συνέχεια ορίστε πότε το  $f$  είναι συνάρτηση από το  $A$  στο  $B$  (δηλ.  $f : A \rightarrow B$ ). Δώστε επίσης το συνολοθεωρητικό ορισμό της οικογένειας  $F$  συνόλων με δείκτες στο σύνολο  $I$  (δηλ.  $F = \langle A_i \rangle_{i \in I}$ ) καθώς και του γινομένου  $\prod_{i \in I} A_i$ .

Χρησιμοποιήστε τα κατάλληλα αξιώματα για να αποδείξτε ότι αν  $A$  και  $B$  είναι σύνολα και  $F = \langle A_i \rangle_{i \in I}$  οικογένεια συνόλων τότε το ζεύγος  $(A, B)$ , το  ${}^B A = \{f | f : A \rightarrow B\}$  και το  $\prod_{i \in I} A_i$  είναι σύνολα.

**ΖΗΤΗΜΑ 2.** Τι εννοούμε όταν λέμε ο πληθύριθμος ενός συνόλου; Εάν  $\kappa$  και  $\lambda$  είναι πληθύριθμοι, ορίστε τους  $\kappa + \lambda$  και  $\kappa \cdot \lambda$  και εξηγήστε τι εννοούμε με το  $\kappa \leq \lambda$ . Διατυπώστε (χωρίς απόδειξη) το θεώρημα Schröder-Bernstein και χρησιμοποιήστε το για να αποδείξτε ότι  $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ .

**ΖΗΤΗΜΑ 3.** Ορίστε πότε ένα σύνολο είναι μια καλή διάταξη ενός συνόλου  $A$ . Χρησιμοποιώντας το αξιώμα του διαχωρισμού αποδείξτε ότι για κάθε σύνολο  $A$  υπάρχει το σύνολο  $B$  όλων των καλών διατάξεων του  $A$ .

Στη συνέχεια, θέτοντας  $A = \alpha$  και εφαρμόζοντας το αξιώμα της αντικατάστασης στο  $B$ , χωρίς τη χρήση του αξιώματος της επιλογής, αποδείξτε ότι για κάθε διατακτικό  $\alpha$  υπάρχει διατακτικός  $\beta$  ώστε  $\bar{\alpha} < \bar{\beta}$  (δηλαδή  $\alpha \prec \beta$ ). [Μπορείτε να χρησιμοποιείστε τις γνωστές προτάσεις για τους διατακτικούς, όπως π.χ. ότι κάθε καλή διάταξη είναι ισομορφική με ένα και μοναδικό διατακτικό και ότι δεν υπάρχει σύνολο που να περιλαμβάνει όλους τους διατακτικούς].

**ΖΗΤΗΜΑ 4. 1.** Διατυπώστε το λήμμα του Zorn.

2. Έστω  $A$  δοθέν σύνολο και έστω  $B$  το σύνολο των συναρτήσεων  $f$  ώστε  $\text{dom}(f) \subseteq \mathcal{P}(A)$ ,  $\text{range}(f) \subseteq A$  και  $f(X) \in B$ , για όλα τα  $X$  στο  $\text{dom}(f)$ . Αποδείξτε ότι το λήμμα του Zorn μπορεί να εφαρμοστεί στη μερική διάταξη  $(B, \subseteq)$ . Αποδείξτε ότι κάθε μεγιστικό στοιχείο είναι συνάρτηση με διάταξη  $(B, \subseteq)$ . Αποδείξτε ότι κάθε μεγιστικό στοιχείο είναι συμπεράνατε ότι το λήμμα του Zorn συνεπάγεται το αξιώμα της επιλογής.

Τα θέματα είναι ισοδύναμα. Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες. Καλή Επιτυχία!