

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
Συναρτησιακή Ανάλυση  
18-9-2007

**Θέμα 1.** Έστω  $X$  διανυσματικός χώρος.

- (α) (i) Έστω  $F \subset X, F \neq \emptyset$ . Πρότε το  $F$  καλείται γραμμικά ανεξάρτητο;
- (ii) Έστω  $(x_n)_n, (y_n)_n$  ακολουθίες στον  $X$  ώστε  $\eta = (y_n)_n$  γραμμικά ανεξάρτητη και  $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle \cap \langle y_n : n \in \mathbb{N} \rangle = \{0\}$ . Δείξτε ότι  $\eta = (x_n + y_n)_n$  είναι γραμμικά ανεξάρτητη.
- (β)
  - (i) Έστω  $f : X \rightarrow \mathbb{R}, f \neq 0$  γραμμική. Δείξτε ότι  $f(X) = \mathbb{R}$  και ότι  $\text{Ker } f$  είναι υπόχωρος του  $X$  συνδιάστασης 1.
  - (ii) Έστω  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  γραμμικές,  $f \neq 0$  και  $\text{Ker } f = \text{Ker } g$ . Δείξτε ότι υπάρχει  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε  $g = \lambda f$ .

**Θέμα 2.** Έστω  $X$  διανυσματικός χώρος.

- (α) Δώστε τον ορισμό του θετικού υπογραμμικού συναρτησοειδούς.
- (β) Άν  $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$  είναι θετικό υπογραμμικό συναρτησοειδές δείξτε ότι:
  - (i) Για κάθε  $x, y \in X$  ισχύει  $|\rho(x) - \rho(y)| \leq \max\{\rho(x-y), \rho(y-x)\}$
  - (ii) Για κάθε  $t \in \mathbb{R}$  το σύνολο  $\rho^{-1}\{(-\infty, t]\}$  είναι κυρτό υποσύνολο του  $X$ .
- (γ) Έστω  $X$  χώρος με νόρμα,  $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}$  θετικό υπογραμμικό συναρτησοειδές και  $\epsilon > 0$  ώστε το  $\rho(B_X(0_X, \epsilon))$  να είναι φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ . Δείξτε ότι:
  - (i) Το  $\rho$  είναι συνεχές στο  $0_X$ .
  - (ii) Το  $\rho$  είναι συνεχές παντού.

**Θέμα 3.** (α) Δίνονται οι ακόλουθοι τελεστές:

$$V : (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty) \text{ με } V(f)(x) = \int_0^x f(t)dt \text{ και}$$

$$S : (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } S(f) = \int_0^1 f(t)dt.$$

Δείξτε ότι οι  $V, S$  είναι γραμμικοί και φραγμένοι και υπολογίστε τις νόρμες τους.

- (β) Δίνεται  $T : \ell_2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell_2(\mathbb{N})$  με  $T((a_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (a_{2n})_{n \in \mathbb{N}} = (a_2, a_4, \dots)$ 
  - (i) Δείξτε ότι ο  $T$  είναι γραμμικός, φραγμένος και υπολογίστε τη νόρμα του.
  - (ii) Βρείτε τους  $\text{Ker } T$  και  $\text{Im } T$

**Θέμα 4.** Έστω  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  χώρος Hilbert.

- (α) Έστω  $A \subset H, A \neq \emptyset$ .
  - (i) Δώστε τον ορισμό του  $A^\perp$ . Άν  $x \in A^\perp$  τότε  $\|f_x\| = 0$
  - (ii) Δείξτε ότι  $A^\perp$  είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του  $H$ .
  - (iii) Δείξτε ότι  $(A^\perp)^\perp = \overline{\langle A \rangle}$  και ότι  $(A^\perp)^\perp \cap A^\perp = \{0\}$

(β) Έστω  $x \in H$ . Θέτουμε  $f_x : H \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f_x(y) = \langle x, y \rangle, y \in H$ . Δείξτε ότι  $f_x$  είναι γραμμική, φραγμένη και  $\|f_x\| = \|x\|$ .

**Θέμα 5.** (α) Έστω  $X$  χώρος με νόρμα,  $K$  κυρτό υποσύνολο του  $X$  με  $0 \in K^\circ$ . Δώστε τον ορισμό του συναρτησοειδούς Minkowski  $\rho_K$  και δείξτε ότι είναι θετικό υπογραμμικό.

(β) Διατυπώστε και αποδείξτε το θεμελιώδες διαχωριστικό θεώρημα.