Εξετάσεις Κυρτής Ανάλυσης
4/6/2007

Θέμα 1 (α) Δώστε τον ορισμό της κυρτής συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και δείξτε με επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}$ ότι $f\big(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\big) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $x_1, ..., x_n$ στο $\mathbb{R}$ και $\lambda_1, ..., \lambda_n > 0$ με $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

(β) (i) Διατυπώστε ένα κριτήριο κυρτότητας για παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και με βάση αυτό δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι κυρτή.

(ii) Δείξτε ότι $\prod_{i=1}^n y_i^{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $y_1, ..., y_n$ στο $(0, +\infty)$ και $\lambda_1, ..., \lambda_n > 0$ με $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

(γ) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτή και $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο x_0. Δείξτε ότι το x_0 είναι θέση ολικού ελαχίστου.

Θέμα 2 (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Δώστε τον ορισμό της κυρτής θήκης $conv(A)$ του A. Πως περιγράφεται η $conv(A)$ απο τα στοιχεία του A ;

(β) Έστω $x_1, x_2, ..., x_k$ σημεία του $\mathbb{R}^n$ με $k \geq n+2$.

(i) Δείξτε ότι υπάρχουν $\mu_1, ..., \mu_k$ στο $\mathbb{R}$ όχι όλοι μηδέν, ώστε $\sum_{i=1}^k \mu_i = 0$ και $\sum_{i=1}^k \mu_i x_i = 0$. (Υπόδειξη: Τα σημεία $x_2 - x_1, x_3 - x_1, ..., x_k - x_1$ είναι πλήθους $k - 1 \geq n + 1$.)

(ii) Έστω $I = \{i \in \{1, ...k\} : \mu_i \geq 0\}$ και $J = \{i \in \{1, ..., k\} : \mu_i < 0\}$. Δείξτε ότι τα I, J είναι μη κενά, ξένα και

$$conv(\{x_i : \ i \in I\}) \cap conv(\{x_i : \ i \in J\}) \neq \emptyset.$$

Θέμα 3 (α) (i) Δώστε τον ορισμό του ακραίου σημείου και του ακραίου υποσυνόλου ενός κυρτού $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Απεικονίστε σχηματικά το σύνολο $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} = 1\}$ και βρείτε τα ακραία σημεία και τα ακραία υποσύνολα του.

(β) (i) Διατυπώστε το θεώρημα Krein-Milman-Minkowski για συμπαγή κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.

(ii) Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ γραμμική συνάρτηση, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές κυρτό και έστω $M = \max\{f(x) : x \in K\}$. (1) Δείξτε ότι το σύνολο $F = \{x \in K : f(x) = M\}$ είναι συμπαγες κυρτό και ακραίο υποσύνολο του K. (2) Δείξτε ότι υπάρχει x_0 ακραίο σημείο του K με $x_0 \in F$.

Θέμα 4 (α) Έστω F, G υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ γραμμική, ώστε $f(x) < a < b < f(y)$ για κάθε $x \in F$ και $y \in G$. Δείξτε ότι $f(x) < a < b < f(y)$ για κάθε $x \in conv(F)$ και $y \in conv(G)$ και ότι $conv(F) \cap conv(G) = \emptyset$.

(β) Έστω A, B υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Αν για κάθε $F \subseteq A$ και κάθε $G \subseteq B$ με πλήθος σημείων το πολύ $n+1$ ισχύει ότι $conv(F) \cap conv(G) = \emptyset$ δείξτε ότι $conv(A) \cap conv(B) = \emptyset$.

(γ) Έστω A, B συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

1. Τα A, B διαχωρίζονται αυστηρά.

2. Για κάθε $F \subseteq A$ και κάθε $G \subseteq B$ με πλήθος σημείων το πολύ $n+1$, τα F, G διαχωρίζονται αυστηρά.

(Υπενθυμίζουμε ότι δύο σύνολα A, B του $\mathbb{R}^n$ διαχωρίζονται αυστηρά αν υπάρχουν $a < b$ στο $\mathbb{R}$ και γραμμική $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x) < a < b < f(y)$ για κάθε $x \in A$ και $y \in B$. Θυμηθείτε επίσης ότι αν $A \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές τότε και $conv(A)$ συμπαγές.).