

Γραπτή Εξέταση 29/02/2008

Γενικές Οδηγίες. Να επιλέξετε ένα (1) θέμα από τα δύο (2) βαθμολογικώς ισοδύναμα θέματα της Ομάδας A (20% κάθε θέμα) και δύο (2) θέματα από τα τρία (3) βαθμολογικώς ισοδύναμα θέματα της Ομάδας B (40% κάθε θέμα). *Καλή επιτυχία!*

Ομάδα A

1. Τι ακριβώς είναι ένας μη κατηγορηματικός ορισμός; Δώστε ένα μαθηματικό παράδειγμα μη κατηγορηματικού ορισμού. Συζητήστε κριτικά τη μεθοδολογική αποδοχή και τη μεθοδολογική απόρριψη των μη κατηγορηματικών ορισμών στα μαθηματικά από διαφορετικές φιλοσοφικές απόψεις για το οντολογικό καθεστώς των μαθηματικών αντικειμένων.

2. Διατυπώστε και συζητήστε κριτικά τις βασικές θέσεις (αντικείμενο των μαθηματικών, σημασιολογία των μαθηματικών προτάσεων, περιεχόμενο της μαθηματικής γνώσης) των φορμαλισμού όρων.

Ομάδα B

1. Ο Kant ισχυρίστηκε ότι οι (μη τετριψμένες) προτάσεις των μαθηματικών είναι συνθετικές αριστοτελείς.¹ Διατυπώστε τους κατά Kant ορισμούς των όρων «συνθετική πρόταση» και «*a priori* πρόταση». Για καθεμία από τις προτάσεις « $7+5=12$ » και «Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών κάθε τριγώνου ισούται με δύο ορθές»,² αναπτύξτε ένα καντιανό επιχείρημα προς το συμπέρασμα ότι είναι συνθετική αριστοτελείς. Με ποιο ακριβώς τρόπο συμβιβάζει η καντιανή φιλοσοφία την αναγκαιότητα και την *a priori* φύση των μαθηματικών με την επιτυχία εφαρμογής των μαθηματικών στη μελέτη του κόσμου της εμπειρίας; Και για ποιους λόγους με την επιτυχία εφαρμογής των μαθηματικών μετά τις εξελίξεις στα μαθηματικά και τη κρίθηκε ανεπαρκής η καντιανή φιλοσοφία των μαθηματικών μετά τις εξελίξεις στα μαθηματικά και τη φυσική κατά τον 19ο και τον 20ο αιώνα;

2. (a) Δικαιολογήστε τον ισχυρισμό «Δεν υπάρχει σύνολο όλων των συνόλων» με χρήση του θεωρήματος του Cantor («παράδοξο του Cantor»).
(b) Θεωρήστε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με ισότητα L της οποίας τα μοναδικά μη λογικά σύμβολα είναι το διθέσιο (διμελές) κατηγορηματικό σύμβολο ' R ' και το σταθερό σύμβολο ' c '. Στο πλαίσιο της L , θεωρήστε την πρωτοβάθμια θεωρία T που παράγεται από τα ακόλουθα μη λογικά αξιώματα:

$$\begin{aligned} & (\forall x) \neg Rxx, \\ & (\forall x)(\forall y)(\forall z)((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz), \\ & (\forall x)(\forall y)(Rxy \rightarrow \neg Ryx), \\ & (\forall x)(x \neq c \rightarrow Rcx). \end{aligned}$$

(Υποθέτουμε ότι η T είναι εφοδιασμένη με ένα ορθό και πλήρες σύστημα λογικών αξιωμάτων και αποδεικτικών κανόνων.) Χρησιμοποιήστε το θεώρημα πληρότητας για πρωτοβάθμιες θεωρίες για να δείξετε (χωρίς «λεπτομέρειες») ότι (i) η T είναι συνεπής και (ii) αν φ είναι η πρόταση ' $(\forall x)(\forall y)(Rxy \vee x = y \vee Ryx)$ ' της L , τότε $T \not\models \varphi$ και $T \not\models \neg \varphi$. Τι συνάγετε για την πληρότητα της θεωρίας T ;

3. Διατυπώστε τις βασικές θέσεις του λογικισμού στη φιλοσοφία των μαθηματικών του 20ου αιώνα. Παρουσιάστε με συντομία και συζητήστε κριτικά τον τρόπο με τον οποίο o Frege προσέγγισε την έννοια του φυσικού αριθμού. (Υπόδειξη. Μια πλήρης απάντηση περιέχει τους κατά Frege ορισμούς των «όρων»: 'έννοια', 'ανήκει στην έννοια', 'όμοιες έννοιες', 'αριθμός μιας έννοιας', '0', '1', '2', κ.λπ.)

¹ Ωστόσο, προτάσεις όπως « $1=1$ » ή «Ολα τα τρίγωνα έχουν τρεις γωνίες» είναι αναλυτικές.

² Στην αριθμητική Peano και στην ευκλείδεια γεωμετρία αντίστοιχα.