Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών

Μάθημα: Διαφορική Γεωμετρία καμπύλων και επιφανειών – Σεπτέμβριος 2007 (Κανονική εξέταση)

Ονοματεπώνυμο:

ΘΕΜΑ 1°.

Α. Να δοθεί ο ορισμός της εξειλιγμένης καμπύλης μιας ομαλής καμπύλης $\mathbf{r}(t)$ του επιπέδου. **(0,7)**

Β. Να αποδειχθεί ότι η περιβάλουσα των καθέτων ευθειών μιας καμπύλης $\mathbf{r}(t)$ ταυτίζεται με την εξειλιγμένη της. **(1)**

Γ. Δίνεται η καμπύλη: $\mathbf{r}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$. Να δειχθεί ότι αποτελείται από ομαλά σημεία που ανήκουν σε έναν κώνο του χώρου και να βρεθούν η ταχύτητα και η επιτάχυνση της καμπύλης την στιγμή που αυτή διέρχεται δια της κορυφής του κώνου. **(0,8)**

ΘΕΜΑ 2°. Ορισμός. Αν $F(x, y, z) = 0$ είναι μία επιφάνεια και $\mathbf{r}(t)$ και μία ομαλή καμπύλη του χώρου, η επιφάνεια και η καμπύλη λέμε ότι έχουν επαφή τάξης τουλάχιστον ν, αν για την σύνθεση $f(s) = F(\mathbf{r}(s))$ ισχύουν οι σχέσεις: $f(s) = 0, f'(s) = 0, f''(s) = 0, \cdots, f^{(\nu)}(s) = 0$.

Α. Να προσδιορισθεί η σφαίρα (κέντο και ακτίνα) η οποία έχει τάξη επαφής τουλάχιστον 3 με την ομαλή καμπύλη $\mathbf{r}(s)$. **(1)**

Β. Να δειχθεί ότι ο κύκλος καμπυλότητας είναι η τομή της εγγύτατης σφαίρας με το εγγύτατο επίπεδο της καμπύλης. **(0,8)**

Γ. Να γίνει σχήμα που να δείχνει την καμπύλη και σε ένα σημείο της την εγγύτατη σφαίρα, το κέντρο της, το κέντρο και τον κύκλο καμπυλότητας. **(0,7)**

ΘΕΜΑ 3°. Δίνεται η επιφάνεια $M = \mathbf{x}(D)$ ~~(με περί τον άξονα z'z που αυτή παράγει με)~~

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(u + vu^2, u + vu, v\right), \quad (u,v) \in D = (-3,3)\times(-3,3).$$

1. Να δειχθεί ότι το σημείο $p = (3,3,2)$ ανήκει στην επιφάνεια. και να βρεθεί μια βάση στον εφαπτόμενο χώρο T_pM.
2. Να δειχθεί ότι το διάνυσμα $\boldsymbol{v} = (3,1,-2)$ ανήκει στον T_pM και να βρεθούν οι συνιστώσες του ως προς μια βάση T_pM. Να δειχθεί ότι το διάνυσμα $\boldsymbol{w} = (4,-4,3)$ δεν ανήκει στον T_pM.
3. Να υπολογισθούν τα θεμελιώδη ποσά $1^{\text{ης}}$ και $2^{\text{ης}}$ τάξης της επιφάνειας στο σημείο $p = (3,3,2)$.
4. Να χαρακτηρισθεί το σημείο $p = (3,3,2)$ και η μορφή της επιφάνειας σε μια περιοχή του, με τη βοήθεια της καμπυλότητας Gauss.
5. Να εξετασθεί αν υπάρχει διάνυσμα μοναδιαίο $\boldsymbol{v}$ με κάθετη καμπυλότητα $k(\boldsymbol{v}) = 0$.

ΘΕΜΑ 4°. Α. Να δοθεί ο ορισμός της γεωδαισιακής καμπύλης $\alpha : I \to M$ μιας επιφάνειας M. και αν η $a(t), t \in I$ είναι γεωδαισιακή,

1. Να βρεθεί συνθήκη για την αλλαγή παραμέτρου $t = \varphi(\tau)$ ώστε η $b(\tau) = a(\varphi(\tau))$ να είναι γεωδαισιακή. **(0.7)**
2. Να δειχθεί ότι έχει σταθερό μέτρο ταχύτητας. **(0.8)**

Β. Δίνεται η κυλινδρική επιφάνεια M: $\boldsymbol{x}(u,v) = \boldsymbol{b}(u) + v\boldsymbol{d}$, όπου $\boldsymbol{b}(u)$ φυσική παραμετρική καμπύλη και $\boldsymbol{d}$ σταθερό διάνυσμα. Αν μια καμπύλη της M, $\alpha : I \to M$ έχει σταθερό μέτρο ταχύτητας και σχηματίζει σταθερή γωνία με τις γενέτειρες τότε είναι γεωδαισιακή. **(1)**

<u>Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες</u>