

**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ & ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ**

Λιδάσκων: Γ. Παπαγεωργίου

Οκτώβριος 2007

**Θέμα 1:  $(1, 2) = 3$  μονάδες**

α) Δίνεται η διαφορική εξίσωση 3ης τάξης της μορφής:

$$y''' = -2y'' - 2y' - 4y$$

Να μετασχηματισθεί σε ισοδύναμο σύστημα διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης. Εν συνεχεία το σύστημα που θα προκύψει, να μελετηθεί ως προς την **ευστάθεια**.

β) Δίνεται η εξίσωση  $y' = -y^3/2$ ,  $y(0) = 1$ , και ζητάμε στο σημείο,  $x_1 = 0.2$ , την προσέγγιση  $y_1$  εφαρμόζοντας την **έμμεση** μέθοδο **τραπεζίου**, ( $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \{f_n + f_{n+1}\}$ ), με  $h = 0.2$ . Να υπολογιστεί η μη γραμμική αλγεβρική εξίσωση που αντιστοιχεί για την προσέγγιση  $y_1$ , και εν συνεχεία ο επαναληπτικός τύπος της μεθόδου **Newton** ( $x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$ ), για την επίλυση της αλγεβρικής αυτής εξίσωσης. Υπολογίστε μία αρχική προσέγγιση  $y_1^{(0)}$ , χρησιμοποιώντας ένα βήμα της άμεσης μεθόδου **Euler**, ( $h = 0.2$ ) και εν συνεχεία υπολογίστε μία βελτιωμένη αριθμητική τιμή για την  $y_1$ , εφαρμόζοντας δύο φορές την μέθοδο **Newton**.

**Θέμα 2:  $(0.5, 1, 1.5) = 3$  μονάδες**

α) Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών της μορφής:

$$y' = f(x, y), \quad x \in [a, b], \quad y(a) = y_0 \quad (1)$$

και την μέθοδο  $k$ -βημάτων της μορφής:

$$\sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j} \quad (2)$$

- Να ορίσετε το **1<sup>ο</sup>** και **2<sup>ο</sup>** **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** που αντιστοιχεί στην (2).
- Αναφέρατε τα κριτήρια που πρέπει να ισχύουν ώστε η (2) να είναι **μηδενικά-ευσταθής** και **συνεπής** αντίστοιχα.

β) Δίνεται η μέθοδος:

$$y_{n+3} - \frac{1}{6} y_{n+2} + y_{n+1} - \frac{1}{6} y_n = \frac{h}{3} f_{n+3},$$

όπου  $h$  είναι το βήμα της διαμέρισης, και  $y_n = y(x_n)$ , ο οποίος προτείνεται για την επίλυση του (1). Να εξετάσετε αν η μέθοδος είναι **μηδενικά ευσταθής** και **συνεπής**.

γ) Το σφάλμα αποκοπής της γραμμικής μεθόδου  $k$ -βημάτων (2) μπορεί να εκφραστεί με την σχέση:

$$T_n = \frac{1}{h \sigma(1)} \left\{ C_0 y(x_n) + C_1 h y'(x_n) + \dots + C_p h^p y^{(p)}(x_n) + \dots \right\}$$

$$\text{όπου, } \quad C_0 = \sum_{j=0}^k a_j, \quad C_1 = \sum_{j=1}^k j a_j - \sum_{j=0}^k \beta_j, \dots, C_p = \sum_{j=1}^k \frac{j^p}{p!} a_j - \sum_{j=1}^k \frac{j^{p-1}}{(p-1)!} \beta_j.$$

Να διατυπωθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η μέθοδος να είναι τάξης  $p$ , και να δειχθεί ότι η παραμετρική μέθοδος:

$y_{n+2} + (b-1)y_{n+1} - b y_n = h/4 \{(b+3)f_{n+2} + (3b+1)f_n\}$   
 είναι τάξης 2 αν  $b \neq -1$ .

### Θέμα 3: ( μονάδες 1)

Θεωρούμε το πρόβλημα δύο συνοριακών τιμών της μορφής:

$$u'' = xu' + 3x, \quad 0 < x < 2, \quad u(0) = 0, \quad u(2) = 2,$$

και τα σημεία της διαμέρισης  $x_1 = 0, x_2 = 0.5, x_3 = 1.2, x_4 = 1.6, x_5 = 2$ . Να υπολογιστεί το γραμμικό σύστημα που προκύπτει αν εφαρμόσουμε την μέθοδο της **Taξινόμησης** για την προσέγγιση της λύσης χρησιμοποιώντας σαν συναρτήσεις βάσης τα μονάδινα  $1, x, x^2, x^3, x^4$ .

### Θέμα 4: ( μονάδες 1)

Δίνεται το πρόβλημα δύο συνοριακών τιμών της μορφής:

$$u'' - 3x^2u' = 5x, \quad x \in (0, 4), \quad h=1,$$

$$u_0 = u(0) = 1, \quad u_5 = u(4) = 0$$

Να υπολογιστεί (χωρίς να λυθεί) το γραμμικό σύστημα για την προσέγγιση της λύσης στα σημεία που ορίζονται από την διαμέριση  $x_i = i h$ , αν εφαρμοστεί η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών. Αναφέρατε μερικές από τις μεθόδους επίλυσης του γραμμικού συστήματος.

(Χρήσιμοι τύποι:  $u''(x_i) \approx (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1})/h^2$ ,  $u'(x_i) \approx (u_{i+1} - u_i)/h$ ).

### Θέμα 5: ( μονάδες 2)

Δίνεται το πρόβλημα δύο συνοριακών τιμών:

$$-u'' + (1+x^2)u = x^3, \quad x \in (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Θεωρούμε ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε την λύση του προβλήματος εφαρμόζοντας την μέθοδο **Galerkin**. Να υπολογιστεί η ασθενής μορφή του προβλήματος, και το αντίστοιχο προσεγγιστικό πρόβλημα συμβολικά, χρησιμοποιώντας δύο προσεγγιστικές συναρτήσεις βάσης  $\varphi_1(x)$  και  $\varphi_2(x)$ .

## ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

$\oplus$  ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2.45 ΩΡΕΣ  $\oplus$