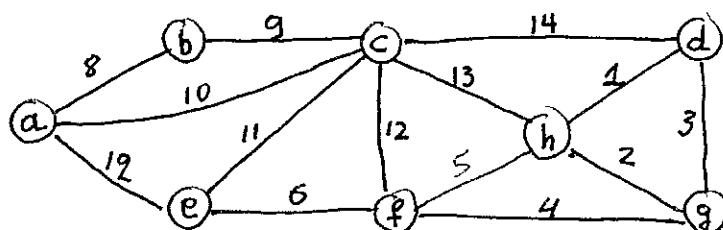


Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

4 Μαρτίου 2007

- Να απαντηθούν ΟΛΑ (5) τα θέματα.
- Καλή επιτυχία.

Θέμα 1^οΔίνεται το παρακάτω γράφημα με βάρη $G=(V,E)$:Να υπολογιστεί ένα ελάχιστο διασυνδετικό δένδρο του G χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Kruskal.

Να παρουσιάσετε την δουλειά σας λεπτομερειακά.

Θέμα 2^οΈστω ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G=(V,E)$. Να αναπτυχθεί αλγόριθμος που τοποθετεί σε κάθε κόμβο ν το γραφήματος G μια ετικέτα $cc[v]$ μεταξύ 1 και k , όπου k είναι το πλήθος των συνδεδεμένων συστατικών του G , έτσι ώστε: $cc[u]=cc[v]$ εάν και μόνο εάν οι u και v ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα.

Να αιτιολογήσετε την ορθότητα του αλγορίθμου σας. Να αναλύσετε την πολυπλοκότητά του.

Θέμα 3^οΜε δεδομένο ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα $G=(V,E)$, το πρόβλημα του «χρωματισμού κόμβων» επισυνάπτει σε κάθε κόμβο του γραφήματος ένα χρώμα έτσι ώστε:

1. γειτονικοί κόμβοι έχουν διαφορετικό χρώμα, και
2. χρησιμοποιείται ο ελάχιστος δυνατός αριθμός χρωμάτων.

Υποθέστε ότι γνωρίζουμε έναν αλγόριθμο που λύνει το πρόβλημα του χρωματισμού ενός γραφήματος. Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο αυτό, να λύθει το παρακάτω πρόβλημα.

Ένα πανεπιστήμιο προσφέρει ένα σύνολο $C=\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ από μαθήματα στους φοιτητές του. Κάθε μάθημα διδάσκεται καθημερινά και έστω ότι το μάθημα c_i διδάσκεται κατά το χρονικό διάστημα T_i (πχ. $T_i=(3μμ-5μμ)$). Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός αιθουσών που απαιτούνται για την διδασκαλία όλων των μαθημάτων έτσι ώστε να μην υπάρχουν ποτέ 2 μαθήματα που χρησιμοποιούν την ίδια αίθουσα ταυτόχρονα.

Να αιτιολογήσετε την ορθότητα του αλγορίθμου σας.

Θέμα 4^ο

Έστω ένα κατευθυνόμενο, με βάρη, γράφημα $G=(V,E)$ και μια συνάρτηση βάρους $w:E \rightarrow [0,1]$. Στην περίπτωση που το G μοντελοποιεί ένα δίκτυο επικοινωνίας, το βάρος κάθε ακμής $(u,v) \in E$ αντιστοιχεί στην πιθανότητα μιας επιτυχούς μεταφοράς δεδομένων από τον κόμβο u στον κόμβο v . Δοθέντος δύο κόμβων s, t του G , να δοθεί ένας αποδοτικός αλγόριθμος ο οποίος αποφασίζει το πιο «αξιόπιστο» μονοπάτι επικοινωνίας μεταξύ των s και t .

Να αιτιολογήσετε την ορθότητα του αλγορίθμου σας. Να αναλύσετε την πολυπλοκότητά του.

Θέμα 5^ο

Δίνονται τα παρακάτω προβλήματα:

INDEPENDENT SET (Σύνολο ανεξάρτητων κόμβων)

Δεδομένα: Ένα γράφημα $G=(V,E)$ και ένας θετικός ακέραιος $i \leq |V|$.

Ερώτηση: Περιέχει το γράφημα G σύνολο ανεξάρτητων κόμβων μεγέθους i ; Δηλαδή, υπάρχει $V' \subseteq V$ τέτοιο ώστε $|V'|=i$ και $\forall u, v \in V'$ ισχύει ότι $(u,v) \notin E$;

CLIQUE

Δεδομένα: Ένα γράφημα $G=(V,E)$ και ένας θετικός ακέραιος $c \leq |V|$.

Ερώτηση: Περιέχει το γράφημα G κλίκα μεγέθους c ; Δηλαδή, υπάρχει $V' \subseteq V$ τέτοιο ώστε $|V'|=c$ και $\forall u, v \in V'$ ισχύει ότι $(u,v) \in E$;

Με δεδομένο ότι το πρόβλημα INDEPENDENT SET είναι NP-complete, να δειχθεί ότι το πρόβλημα CLIQUE είναι επίσης NP-complete.