

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΘΕΜΑ 1:

A) Έστω Y τ.μ. με κατανομή που ανήκει στην EOK με τύπο

$$f(y; \theta) = \exp\{a(y)b(\theta) + c(\theta) + d(y)\}.$$

Σε συνθήκες κανονικής εκτίμησης να αποδείξετε ότι $E[a(Y)] = -\frac{c'(\theta)}{b'(\theta)}$.

(Υπόδειξη: Θεωρείστε την $\frac{d}{d\theta} \int f(y; \theta) dy$).

B) Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$. Να υπολογισθεί η $E\left[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2\right]$ και εν συνεχεία να βρεθεί αμερόληπτη εκτιμήτρια για το σ^2 .

ΘΕΜΑ 2:

Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα από την διωνυμική κατανομή $B(N, p)$, με N γνωστό.

- Να βρεθεί η EMPI του p .
- Να βρεθεί η μέση τιμή και διασπορά της EMPI.
- Να υπολογιστεί το Cramer-Rao κατώτατο φράγμα του p και να συγκριθεί με την διασπορά της EMPI που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Τι παρατηρείτε;

ΘΕΜΑ 3:

A) Έστω το X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα, μεγέθους $n \geq 30$, από κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 . Τότε:

- Αν το μ είναι άγνωστο και το σ^2 γνωστό, να κατασκευάσετε ένα προσεγγιστικό Δ.Ε. του μ , με σ.ε. $\gamma = 1-\alpha$.
- Αν τα μ και σ^2 είναι άγνωστα, να κατασκευάσετε ένα προσεγγιστικό Δ.Ε. του μ , με σ.ε. $\gamma = 1-\alpha$.

B) Έστω X_1, \dots, X_n τυχαίο δείγμα, από κατανομή με σ.π.π. $f(x; \theta) = \frac{\theta^2}{1+\theta}(1+x)e^{-\theta x}$, $x > 0$ και $\theta > 0$ άγνωστη παράμετρος. Να βρεθεί η εκτιμήτρια με την μέθοδο των ροπών του θ .

ΘΕΜΑ 4:

A) Σε τυχαίο δείγμα 200 ψηφοφόρων μιας συγκεκριμένης εκλογικής περιφέρειας, οι 80 είπαν ότι θα ψηφίσουν το κόμμα A.

- Να κατασκευάσετε και να υπολογίσετε ένα 99% προσεγγιστικό Δ.Ε. για το ποσοστό των ψηφοφόρων του κόμματος A στην εκλογική περιφέρεια.
- Τι μέγεθος δείγματος θα έπρεπε να πάρετε, αν θέλατε να εξασφαλίσετε εκ των προτέρων ότι το προσεγγιστικό 99% Δ.Ε. για το ποσοστό των ψηφοφόρων του κόμματος A στην εκλογική περιφέρεια θα έχει εύρος το πολύ 4%;

B) Για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης $H_0: \theta \in \Theta_0$ εναντίον της εναλλακτικής $H_1: \theta \in \Theta_1$, με κρίσιμη περιοχή K, να δώσετε τον ορισμό του επιπέδου σημαντικότητας, της χαρακτηριστικής συνάρτησης και της συνάρτησης ισχύος.