

Εξετάσεις Πραγματικής Ανάλυσης
16 Φεβρουαρίου 2002

Απαντήστε σε δύο Θέματα από την ομάδα Α και σε δύο θέματα από την ομάδα Β

ΟΜΑΔΑ Α

Θέμα Α.1

(α) Έστω X διανυσματικός χώρος.

(i) Διατυπώστε τον ορισμό της νόρμας στο X .

(ii) Ορίστε τη μετρική ρ που επάγει η νόρμα και δείξτε ότι ικανοποιεί τις ιδιότητες της μετρικής.

(β) Στο διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^n θεωρούμε τις $\|\cdot\|_\infty$ και $\|\cdot\|_1$ όπου

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$$

$$\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

για κάθε $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

(i) Δείξτε ότι οι $\|\cdot\|_\infty$ και $\|\cdot\|_1$ είναι νόρμες στον \mathbb{R}^n .

(ii) Δείξτε ότι για δοθέν n ισχύει

$$\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_1 \leq n\|\vec{x}\|_\infty$$

για κάθε $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Θέμα Α.2

(α) Δώστε τον ορισμό του συμπαγούς υποσύνολου ενός μετρικού χώρου. Δείξτε ότι κάθε κλειστό υποσύνολο ενός συμπαγούς μετρικού χώρου είναι συμπαγές.

(β) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό δείξτε ότι αν $K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_0\}$ όπου $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στο μετρικό χώρο (X, ρ) και $x_0 \in X$ ώστε $\lim x_n = x_0$ τότε το K είναι συμπαγές υποσύνολο του X .

(γ) Δώστε τον ορισμό της ομοιόμορφα συνεχούς συνάρτησης μεταξύ μετρικών χώρων. Διατυπώστε το Λήμμα του Lebesgue και με βάση αυτό αποδείξτε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, d)$ όπου (X, ρ) συμπαγής, (Y, d) μετρικός χώρος, είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Θέμα Α.3

Έστω X μη κενό σύνολο.

(α) Έστω $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Δώστε τον ορισμό της κατά σημείο σύγκλισης της ακολουθίας συναρτήσεων $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στην f .

(β) Δώστε τον ορισμό της κατά σημείο Cauchy ακολουθίας συναρτήσεων $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ και δείξτε ότι για κάθε κατά σημείο Cauchy ακολουθία $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ υπάρχει $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε η $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο στην f .

(γ) Αν το X είναι άπειρο αριθμήσιμο σύνολο και $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$ ακολουθία συναρτήσεων και υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n(x)| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $x \in X$ δείξτε ότι

υπάρχει υπακολουθία $(f_{n_k})_k$ της $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ και συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε η $(f_{n_k})_k$ να συγκλίνει κατά σημείο στην f .

ΟΜΑΔΑ Β

Θέμα Β.1

Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Για x, y στον X θέτουμε $d(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$.

(α) Δείξτε ότι η d είναι μετρική στο X .

(β) Δείξτε ότι για $0 < \varepsilon \leq 1$ και $x \in X$, $S_d(x, \varepsilon) = S_\rho(x, \varepsilon)$. Χρησιμοποιώντας αυτό δείξτε ότι αν $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στο X και $x_0 \in X$ τότε $x_n \xrightarrow{d} x_0$ αν και μόνο αν $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$.

Θέμα Β.2

(α) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subset X$ ώστε για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο A και $x_0 \in X$ με $x_n \rightarrow x_0$ ισχύει $x_0 \in A$. Δείξτε ότι το A είναι κλειστό υποσύνολο του X .

(β) Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε το γράφημα της f ,

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$$

είναι κλειστό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 .

(γ) Έστω A υποσύνολο ενός μετρικού χώρου (X, ρ) . Θέτουμε

$$\partial A = \{x \in X : x \text{ οριακό σημείο του } A \text{ και του } A^c\}.$$

Δείξτε ότι το ∂A είναι κλειστό. Βρείτε το $\partial \mathbb{Q}$, όπου $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ το σύνολο των ρητών.

Θέμα Β.3

Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος ώστε για κάθε $x \in X$ το μονοσύνολο $\{x\}$ δεν είναι ανοικτό υποσύνολο του X .

(α) Για κάθε $x \in X$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ η ανοικτή σφαίρα $S(x, \varepsilon)$ περιέχει άπειρα σημεία του X .

(β) Αν $D \subset X$ πυκνό και $\{x_1, \dots, x_n\} \subset D$ τότε το $D' = D \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ είναι επίσης πυκνό στο X .

(γ) Αν $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία από ανοικτά και πυκνά στο \mathbb{R} τότε η τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ είναι υπεραριθμήσιμη.