ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2004

Ζήτημα 1. (α) Δείξτε ότι αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε το γράφημα της f, $Grf = \{(x, y) : y = f(x)\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$.
(β) Βρείτε τις κλειστότητες των παρακάτω συνόλων (δικαιολογήστε την απάντησή σας).

(1) $A_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
(2) $A_2 = \{(x, \frac{1}{x}) : x > 0\}$.
(3) $A_3 = \{(x, y) : x > 0, y \geq 0\}$.
(4) $A_4 = \{(\frac{1}{n}, x) : x \in \mathbb{R}, n \geq 1, n \in \mathbb{N}\}$.

Ζήτημα 2. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος.
(α) Έστω $A \subseteq X$ μη κενό. Δείξτε ότι η συνάρτηση $\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y) : y \in A\}$ είναι συνεχής.
(β) Αν $A \subseteq X$ κλειστό μη κενό δείξτε ότι $\rho(x, A) = 0$ αν και μόνο αν $x \in \overline{A}$.
(γ) Έστω $(x_n)_n$ ακολουθία στον X και $x \in X$. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

(1) $x_n \to x$.
(2) $\rho(x_n, A) \to \rho(x, A)$ για κάθε μη κενό υποσύνολο A του X.

Ζήτημα 3. (α) Έστω $(\mathbf{x}_n)_n$ ακολουθία διανυσμάτων του $\mathbb{R}^d$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(1) Η ακολουθία $(\mathbf{x}_n)_n$ συγκλίνει στο $\mathbf{x}$ στην ευκλείδια μετρική.
(2) Για κάθε $i = 1, ..., d$, έχουμε $\mathbf{x}_n(i) \to \mathbf{x}(i)$ στον $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, όπου $\mathbf{x}(i)$ είναι η i-συντεταγμένη του διανύσματος $\mathbf{x}$.

(β) Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $A \subseteq X$ άπειρο. Δείξτε ότι το A έχει τουλάχιστον ένα σημείο συσσώρευσης.

Ζήτημα 4. Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ θέτουμε $d(x, y) = \min\{1, |x - y|\}$.
(α) Δείξτε ότι η d είναι μετρική στον $\mathbb{R}$.
(β) Δείξτε ότι η d είναι ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική $\rho_{|\cdot|}$ του $\mathbb{R}$ (*Υπόδειξη*: δείξτε ότι μια ακολουθία $(x_n)_n$ συγκλίνει ως προς τη d σε ένα x αν και μόνο συγκλίνει στο x ως προς τη $\rho_{|\cdot|}$).
(γ) Δείξτε ότι ο $(\mathbb{R}, d)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Ζήτημα 5. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $f, f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, 1-Lipschitz.
(α) Έστω $\varepsilon > 0$ και $F = \{x_1, ..., x_d\}$ ένα πεπερασμένο ε-δίκτυο στον X. Αν για κάθε $i = 1, ..., d$ έχουμε $f_n(x_i) \to f(x_i)$, δείξτε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\|f_n - f\|_\infty < 3\varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.
(β) Έστω $f, f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, 1-Lipschitz. Αν για κάθε $q \in \mathbb{Q}$ έχουμε $f_n(q) \to f(q)$, δείξτε ότι η $(f_n)_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.