

Εξετάσεις Πραγματικής Ανάλυσης, 13/10/2003

Θέμα 1 (i) Έστω $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{Q}_+\}$. Βρείτε την κλειστότητα \bar{A} του A στον \mathbb{R}^2 με την ευκλείδεια μετρική.

(ii) Εξετάστε ποια από τα επόμενα σύνολα είναι ανοικτά υποσύνολα του \mathbb{R}^2 με την ευκλείδεια μετρική.

(α) $I = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_1 < 1 \text{ και } x_2 = 0\}$.

(β) $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0 \text{ και } x_1^2 + x_2^2 < 1\} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq 0 \text{ και } |x_1| + |x_2| < 1\}$.

(iii) Έστω $A = \{n + \frac{1}{m} : n, m = 1, 2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ με την ευκλείδεια μετρική.

(α) Δείξτε ότι $A' = \mathbb{N}$ (όπου A' το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του A).

(β) Δείξτε ότι: $\mathbb{N} \setminus \{1\} \subset A$ και ότι το $A \cup \{1\}$ είναι κλειστό.

Θέμα 2 (i) Έστω $K \subset \mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική, K φραγμένο. Δώστε τον ορισμό του $\sup K$ και του $\inf K$ και δείξτε ότι το $\sup K$ και το $\inf K$ είναι ορισμένα σημεία του K .

(ii) Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής.

(α) Δείξτε ότι το $f[X]$ είναι συμπαγές υποσύνολο του \mathbb{R} .

(β) Δείξτε ότι: υπάρχουν $x_0, y_0 \in X$ ώστε $f(x_0) = \sup f[X]$ και $f(y_0) = \inf f[X]$.

Θέμα 3 Έστω $(X, \rho_1), (Y, \rho_2)$ μετρικοί χώροι. Ορίζουμε

$$\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \rho_1(x_1, x_2) + \rho_2(y_1, y_2), \quad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y.$$

(i) Δείξτε ότι η ρ είναι μετρική στον $X \times Y$.

(ii) Άν $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ακολουθία στον $X \times Y$ και $(x, y) \in X \times Y$ δείξτε ότι $(x_n, y_n) \xrightarrow{\rho} (x, y)$ αν και μόνο αν $x_n \xrightarrow{\rho_1} x$ και $y_n \xrightarrow{\rho_2} y$.

(iii) Άν οι $(X, \rho_1), (Y, \rho_2)$ είναι συμπαγείς δείξτε ότι και ο $(X \times Y, \rho)$ είναι συμπαγής.

Θέμα 4 (i) Για $f, g \in C[0, 1]$ θέτουμε $\rho_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty$.

(α) Δείξτε ότι η ρ_∞ είναι μετρική.

(β) Άν $a < b$ στο \mathbb{R} δείξτε ότι ο $(C[a, b], \rho_\infty)$ είναι ισομετρικός με τον $(C[0, 1], \rho_\infty)$.

(ii) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $f, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$. Δώστε τον ορισμό της ομοιόμορφης σύγχλισης της ακολουθίας $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στην f . Δείξτε ότι αν η f_n είναι συνεχής για κάθε $n = 1, 2, \dots$ και η ακολουθία $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ συγχλίνει ομοιόμορφα στην f τότε και η f είναι συνεχής.

(iii) Δείξτε ότι ο $(C[0, 1], \rho_\infty)$ είναι πλήρης μετρικός χώρος.

Θέμα 5 (i) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $\{U_1, \dots, U_n\}$ πεπερασμένη ουκογένεια από ανοικτά και πυκνά υποσύνολα του X . Δείξτε ότι το $\bigcap_{i=1}^n U_i$ είναι ανοικτό και πυκνό.

(ii) Έστω (X, ρ) συμπαγής μετρικός χώρος ώστε κάθε σημείο του X είναι σημείο συσσώρευσης του X . Δείξτε ότι ο X είναι υπερεχριθμήσιμος.

(iii) Έστω (X, ρ) συμπαγής αριθμήσιμος μετρικός χώρος. Δείξτε ότι το σύνολο των μεμονωμένων σημείων του X είναι ανοικτό και πυκνό υποσύνολο του X .